平成18年度　学位論文

Riemann-Roch の定理について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
Ｍ０５２３９I　糟谷仁志

目 次

0章　序

本論文の目的は Riemann-Roch の定理を証明することである．Riemann-Roch の定理は Riemann が 1857 年に証明した不等式

$$\ell(D) \geq \deg D + 1 - g$$

を G.Roch が Crelle 誌に発表した論文 (1863 年) で等式として完成したものである．

定理　(Riemann-Roch) 非特異射影曲線 V 上の任意の因子 D に対して次の等式が成り立つ．ただし K_V は V の標準因子, g は V の種数, $\ell(D)$ は線型空間 $L(D)$ の次元である．

$$\ell(D) - \ell(K_V - D) = \deg D + 1 - g$$

Riemann-Roch の定理は元来 Riemann 面の位相的な量である種数 g を, 代数的な量と関連づけたものである．その後, 1929 年に一般の代数曲線に対して証明され, 1950 年に Hirzebruch により n 次元多様体に拡張された後, さらなる一般化が Grothendieck によってなされている．この論文では非特異射影曲線の場合の Riemann-Roch の定理を証明する．なお Roch は Göttingen 大学で Riemann の講義を聴講したが, 共同研究をしたわけではないようである．また Riemann-Roch の定理という呼び方は M.Noether と A.Brill の共著の論文 (1874 年) でそのように引用されたことが端緒とされている．

代数的閉体 k 上の非特異射影曲線とは, 射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ 内にある, 特異点を持たない 1 次元射影多様体のことであり, 非特異射影曲線 V 上の因子とは, V の有限個の点の形式的な整数係数 1 次結合をいう．因子 D の係数の和を次数といい $\deg D$ と表す．因子自体は非特異射影曲線に限らず一般の集合上でも定義できるが, Riemann-Roch の定理で曲線 V の性質を反映しているのは $\ell(D)$ と K_V と種数 g である．V が非特異であることから各点 P での局所環 $O_P(V)$ は離散付値環となり, 有理関数体 $k(V)$ に離散付値 ord_P を定める．V 上の有理関数 f の極と零点が有限個であることより有理関数 f から主因子

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in V} \mathrm{ord}_P(f)\, P$$

が定まる．これより有理関数体 $k(V)$ の k 線型部分空間

$$L(D) = \{f \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

が得られ, その次元 $\ell(D)$ が有限であることが導かれる．一方 $k(V)$ の微分加群が 1 次元 $k(V)$ 線型空間であることが示され, その生成元から標準因子 K_V が定まる．Riemann が示した不等式から $\deg D - \ell(D) + 1$ が D によらず上に有界であることがわかり, その最大値として V の種数 g が定義される．最大値との差が $L(K_V - D)$ の次元に一致する, すなわち

$$\ell(K_V - D) = g - \deg D + \ell(D) - 1$$

が成り立つというのが Riemann-Roch の定理である．

本論文では 1 章で準備, 2 章でアフィン多様体の基本事項, 3 章で射影多様体の基本事項を説明し, 4 章で Riemann の定理, 5 章で Riemann-Roch の定理を証明する．以下, 各章の概要について述べる．

１章では, 後章で必要となる可換環論の基本事項, 5 章で必要となる, べき有限次線型変換, 微分加群などについて説明し, 最後に完全体上有限生成な体が高々超越次数+1 個の元で生成されることを証明する．この事実は２章でアフィン曲線上の特異点が高々有限個であることを証明する際に必要となる．

２章では, アフィン多様体の基本事項について述べる．アフィン代数的集合およびアフィン多様体, Hilbert の零点定理などについて述べた後, アフィン代数的集合と根基イデアルが１対１に対応することを示す．このときアフィン多様体に素イデアルが対応するのでその座標環は整域となり, 分数体として有理関数体が定まる．1 点で定義される有理関数全体が局所環をなすことを示した後, 有理関数体の k 上の超越次数として多様体の次元を定義し, 1 次元アフィン多様体としてアフィン曲線を定義する．アフィン曲線上の有理関数の極と零点が有限個であることは 3 章で利用され, ４章で主因子を定義するときの根拠を与える．またアフィン多様体の特異・非特異性を局所環から代数的に定義し, アフィン曲線上の特異点が高々有限個であることを証明する．

３章では, 射影多様体の基本事項について述べる．斉次イデアルの零点集合として射影代数的集合を定義し, アフィン空間の場合と同様に既約な射影代数的集合として射影多様体を定義する．射影零点定理を証明した後, 空でない射影代数的集合と, $\langle X_0, ..., X_n\rangle$ と異なる斉次な根基イデアルとが１対１に対応すること, この対応において射影多様体と素イデアルが対応することを証明する．さらに射影多様体の斉次座標環を定義し, その分数体の元で分母と分子が同次数の斉次元であるもの全体のなす部分体として有理関数体を

定義する．有理関数の極全体が真の射影代数的集合になることを示した後, 射影多様体全体で正則な有理関数が定数に限ることを証明する．有理関数体の k 上の超越次数を射影多様体の次元と定め, 1 次元射影多様体を射影曲線と定義する．アフィン多様体の場合と同様に 1 点における局所環の極大イデアルをその平方で割った剰余空間の次元が多様体の次元に一致しない点を特異点と定義し, 非特異射影多様体の概念を導入する．アフィン多様体と射影多様体とを結ぶ概念として, 多項式の斉次化, 非斉次化を定義し, イデアルおよび代数的集合の斉次化, 非斉次化とその相互関係について考察する．特にアフィン代数的集合と, その既約成分が斉次座標のある成分を 0 にすることがないような射影代数的集合との間に斉次化・非斉次化による 1 対 1 対応が存在すること, この対応でアフィン多様体と射影多様体が対応し, それぞれの関数体が同型になることなどを証明する．

4 章では, Riemann-Roch の定理の原型ともいえる Riemann の定理を証明する．非特異射影曲線 V 上の点 P での局所環 $O_P(V)$ が離散付値環であることから, 有理関数体 $k(V)$ に離散付値 ord_P が定まる．この離散付値に関して「与えられた有限個の有理関数との差の, 与えられた有限個の点における離散付値の値が, 与えられた整数以上になるような有理関数が存在する」という近似定理を証明する．また非特異射影曲線上の有限個の点の形式的な整数係数 1 次結合として因子を定義し, 有理関数の極と零点が有限個であることを証明した後, 有理関数から主因子が定まることを導く．さらに因子 D に対して線型空間 $L(D)$ を定義し, その次元 $\ell(D)$ が有限であることを証明する．定数でない有理関数 f で生成される部分体の有理関数体における余次元が, f の零点 P すべてに渡る $\mathrm{ord}_P(f)$ の和, および f の極 Q すべてに渡る $-\mathrm{ord}_Q(f)$ の和に一致することを示し, f から定まる主因子 $\mathrm{div}(f)$ の次数が 0 であることを導く．最後に, それまでに得られた結果を基に Riemann の定理を証明する．

5 章では, 非特異射影曲線についての Riemann-Roch の定理を証明する．関数体 $k(V)$ の直積環 $\prod_{P\in V} k(V)$ の部分環 $\mathcal{A}_V$, および因子 $D=\sum_P n_P P$ から定まる $\mathcal{A}_V$ の k 線型部分空間

$$\mathcal{A}_V(D)=\{(f_P)\in\mathcal{A}_V \mid \mathrm{ord}_P(f_P)\geq -n_P\}$$

を導入し, k 線型空間 $I(D)=\mathcal{A}_V/(\mathcal{A}_V(D)+k(V))$ の次元 $i(D)$ が有限で Riemann-Roch の定理の暫定版

$$\ell(D)-i(D)=\deg D+1-g$$

が成り立つことを証明する．次に非特異射影曲線 V の有理関数体 $k(V)$ の微分加群 $\Omega(k(V))$ が 1 次元 $k(V)$ 線型空間であることを示した後, 有理関数の局所パラメータに関するローラン展開の主要部から有理微分の留数を定義し, 留数が局所パラメータによらず定まることを示す．さらに有理微分 $f dg$ の点 P における留数と $k(V)$ のべき有限次線型変換 $[\pi f, g]$

のトレースが一致することを利用して留数の総和が 0 になるという留数定理を証明する. 留数定理を用いて 0 でない有理微分が因子を定めること, これらの因子が線型同値を除いて一意に定まることなどから標準因子 K_V を定義する. 最後に $\mathcal{A}_V/k(V)$ の双対空間の部分空間 J_V を考察することにより $I(D)$ の双対空間が $L(K_V - D)$ と k 線型同型であるという双対定理を証明し, Riemann-Roch の定理を導く.

なお本論文の主たる参考文献は [2] である. ここで, その著者に敬意を表する.

最後に, 本論文の作成にあたり多大なご指導, ご助言をいただいた松山廣先生, そして数学教室の諸先生方に心から厚く感謝の意を表する.

1章　準備

１章では, 後章で必要となる可換環論の基本事項, 5 章で必要となる, べき有限次線型変換, 微分加群などについて説明し, 最後に完全体上有限生成な体が高々超越次数+1 個の元で生成されることを証明する．この事実は２章でアフィン曲線上の特異点が高々有限個であることを証明する際に必要となる.

なお, 参考文献 [3] にあるような線型代数学の内容, 参考文献 [4, 5] にあるような群・環・体の基本事項は既知とする．また参考文献 [5] にあるような可換環論の基本事項も既知とするが, 特に重要と思える定理については §1.1 にまとめておいた．この章を通じて k は体, $k[X_1, ..., X_n]$ は k 上の n 変数多項式環を表す.

1.1　可換環論の基本事項

この節で述べる可換環論の諸定理の証明については参考文献 [4, 5] などを参照されたい.

定理 1.1 ([5, 定理 7.2],[4, 問 6.7])　k が無限体のとき, 任意の $(a_1, ..., a_n) \in k^n$ に対して $F(a_1, ..., a_n) = 0$ となる多項式 $F(X_1, ..., X_n) \in k[X_1, ..., X_n]$ は零多項式のみである.

定理 1.2 ([4, 例題 23.5])　多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$ が既約多項式であることと, F の生成するイデアル $\langle F \rangle$ が素イデアルであることとは同値である.

定理 1.3 ([4, 例題 22.5])　R を可換環, I を R のイデアルとする．自然な準同型 $R \mapsto R/I$ により, I を含む R のイデアルと R/I のイデアルが１対１に対応する.

定理 1.3 の対応で, 素イデアルは素イデアルに, 極大イデアルは極大イデアルに, 根基イデアルは根基イデアルに, それぞれ対応することを注意しておく.

補題 1.4 ([5, 定理 30.6]) R を整域, S を R の部分環とする. R が有限 S 加群であるとき, すなわち有限個の元 $u_1, ..., u_n \in R$ により $R = Su_1 + \cdots + Su_n$ と表されるとき次が成り立つ.

(1) R は S 上整である.

(2) R が体であることと S が体であることは同値である.

定理 1.5 (Hilbert の基底定理, [5, 定理 28.3],[4, 定理 29.11]) ネーター環 R 上の n 変数多項式環 $R[X_1, ..., X_n]$ はネーター環である. 特に体 k 上の n 変数多項式環 $k[X_1, ..., X_n]$ はネーター環である.

定理 1.6 ([5, p.183, 系]) 任意の $a_1, ..., a_n \in k$ に対して $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ は $k[X_1, ..., X_n]$ の極大イデアルである. 逆に k が代数的閉体のときは $k[X_1, ..., X_n]$ の極大イデアル M は適当な $a_1, ..., a_n \in k$ により $M = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ と表される.

次の中山の補題は一般の非可換環で成り立つがこの論文では可換環に対してのみ適用する (定理 2.38, 4.1, 5.10).

定理 1.7 (中山の補題, [4, 定理 31.3]) M を可換環 R 上有限生成加群とする. $S \subseteq M$ が $\langle S \rangle + J(R)M = M$ を満たせば $\langle S \rangle = M$ が成り立つ. ただし, $\langle S \rangle$ は S で生成された M の R 部分加群, $J(R)$ は R の根基 (極大イデアルすべての共通部分) である.

1.2 べき有限次線型変換

V を体 k 上の線型空間, θ を V の線型変換とする. ある自然数 n に対して

$$\dim_k \theta^n(V) < \infty$$

が成り立つとき, θ はべき有限次であるという. $\dim_k \theta^n(V) < \infty$ のとき, θ は剰余空間 $\theta^n(V)/\theta^{n+1}(V)$ に零写像として作用するので, $\theta|_{\theta^n(V)}$ と $\theta|_{\theta^{n+1}(V)}$ のトレースは一致する. すなわち

$$\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)}) = \mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^{n+1}(V)})$$

が成り立つ. 従って $\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)})$ は $\dim_k \theta^n(V) < \infty$ となる n の選び方によらず一定である. この値を $\mathrm{Tr}_V(\theta)$ と表すことにする. 以下, べき有限次線型変換の基本事項について述べる. 次の定理が成り立つことは明らかであろう.

定理 1.8 V が有限次線型空間のとき，V の任意の線型変換 θ はべき有限次で，$\mathrm{Tr}_V(\theta)$ は通常のトレース $\mathrm{Tr}(\theta)$ と一致する．

定理 1.9 線型空間 V のべき零な線型変換 θ はべき有限次で $\mathrm{Tr}_V(\theta)=0$ である．

Proof　ある自然数 n が存在して $\theta^n(V)=0$ となることから導かれる． ∎

定理 1.10 θ が線型空間 V のべき有限次線型変換，W が θ 不変な V の部分空間のとき，$\theta|_W$, $\theta|_{V/W}$ はべき有限次で, 次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{Tr}_V(\theta)=\mathrm{Tr}_W(\theta)+\mathrm{Tr}_{V/W}(\theta)$$

Proof　$\theta^n(V)$ が有限次であるとする．このとき $\theta^n(W)\subseteq\theta^n(V)$ より $\theta^n(W)$ は有限次である．従って $\theta|_W$ はべき有限次である．また

$$\theta^n(V/W)=(\theta^n(V)+W)/W\simeq\theta^n(V)/(\theta^n(V)\cap W)$$

であるから $\theta^n(V/W)$ も有限次, 従って $\theta|_{V/W}$ はべき有限次である．次に

$$\mathrm{Tr}_W(\theta)=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(W)}),\quad \mathrm{Tr}_{V/W}(\theta)=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V/W)})=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)/(\theta^n(V)\cap W)})$$

であるが，θ が $(\theta^n(V)\cap W)\,/\theta^n(W)$ にべき零に作用することから

$$\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)\cap W})=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(W)})$$

が成り立つ．従って

$$\mathrm{Tr}_W(\theta)+\mathrm{Tr}_{V/W}(\theta)=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)\cap W})+\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)/(\theta^n(V)\cap W)})=\mathrm{Tr}(\theta|_{\theta^n(V)})=\mathrm{Tr}_V(\theta)$$

が得られる． ∎

V の有限次部分空間 W が θ 不変で, ある $\theta^n(V)$ を含むとき，θ は剰余空間 $W/\theta^n(V)$ にべき零に作用するので, 定理 1.9, 定理 1.10 より次の定理が得られる．

定理 1.11 θ を線型空間 V のべき有限次線型変換とする．V の有限次部分空間 W が θ 不変で, ある $\theta^n(V)$ を含むとき $\mathrm{Tr}_V(\theta)=\mathrm{Tr}_W(\theta)$ が成り立つ．

定理 1.12 $\theta_1, ..., \theta_n$ は線型空間 V の線型変換で, ある自然数 N が存在して, $\{1, ..., n\}$ から N 個選んでできる任意の重複順列 $i_1, ..., i_N$ に対して $\dim_k \theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_N}(V) < \infty$ であるとする. このとき $\theta_1, ..., \theta_n$, $\sum_i \theta_i$ はべき有限次で次が成り立つ.

$$\mathrm{Tr}_V\left(\sum_i \theta_i\right) = \sum_i \mathrm{Tr}_V(\theta_i)$$

Proof　任意の $1 \leq j \leq n$ に対して, $i_1 = \cdots = i_N = j$ とおけば $\dim_k \theta_j^N(V) < \infty$ が得られる. ゆえに $\theta_1, ..., \theta_n$ はべき有限次である. 一方

$$\left(\sum_i \theta_i\right)^N (V) = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_N} \theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_N}\right)(V) \subseteq \sum_{i_1,\ldots,i_N} \theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_N}(V)$$

は有限次元空間有限個の和であるから有限次である. よって $\sum_i \theta_i$ もべき有限次である. 次に

$$W = \sum_{i_1,\ldots,i_N} \theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_N}(V)$$

とおけば, W は $\theta_1, ..., \theta_n$ により不変である. 従って定理 1.11 より

$$\mathrm{Tr}_V\left(\sum_i \theta_i\right) = \mathrm{Tr}_W\left(\sum_i \theta_i\right) = \sum_i \mathrm{Tr}_W(\theta_i) = \sum_i \mathrm{Tr}_V(\theta_i)$$

が成り立つ. ∎

補題 1.13 θ を線型空間 V のべき有限次線型変換とすると, ある自然数 N に対して $\theta^N(V) = \theta^{N+1}(V) = \cdots$ が成り立つ.

Proof　仮定より $\theta^n(V)$ が有限次となるような自然数 n がある. ここで

$$\dim_k \theta^n(V) \geq \dim_k \theta^{n+1}(V) \geq \dim_k \theta^{n+2}(V) \geq \cdots$$

に注意すると, ある N に対して $\dim_k \theta^N(V) = \dim_k \theta^{N+1}(V)$ となる. このとき $\theta^N(V) = \theta^{N+1}(V) = \cdots$ が成り立つ. ∎

定理 1.14 φ, ψ は線型空間 V の線型変換で $\varphi\psi$ がべき有限次であるとする. このとき $\psi\varphi$ もべき有限次で $\mathrm{Tr}_V(\varphi\psi) = \mathrm{Tr}_V(\psi\varphi)$ が成り立つ.

Proof　$(\varphi\psi)^n(V)$ が有限次であるとすると

$$(\psi\varphi)^{n+1}(V) = \psi((\varphi\psi)^n)\varphi(V) \subseteq \psi(\varphi\psi)^n(V)$$

より $(\psi\varphi)^{n+1}(V)$ も有限次となる. 従って $\psi\varphi$ もべき有限次である. 補題 1.13 より, ある自然数 N に対して

$$(\varphi\psi)^N(V) = (\varphi\psi)^{N+1}(V) = \cdots, \qquad (\psi\varphi)^N(V) = (\psi\varphi)^{N+1}(V) = \cdots$$

が成り立つ. $W = (\varphi\psi)^N(V)$, $W' = (\psi\varphi)^N(V)$ とおくと $\varphi\psi$ は W の線型自己同型, $\psi\varphi$ は W' の線型自己同型である. ここで

$$\psi : W \mapsto W', \qquad \varphi : W' \mapsto W$$

であり, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ が線型自己同型であるから, ψ, φ も線型同型である. $r = \dim_k W = \dim_k W'$ とおき, $e_1, ..., e_r$ を W の基底, $e'_1, ..., e'_r$ を W' の基底とし

$$\begin{bmatrix} \psi(e_1) \\ \vdots \\ \psi(e_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_r \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} \in k)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi(e'_1) \\ \vdots \\ \varphi(e'_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \qquad (b_{ij} \in k)$$

とおく. このとき $\varphi\psi$ の基底 $e_1, ..., e_r$ に関する行列, および $\psi\varphi$ の基底 $e'_1, ..., e'_r$ に関する行列は, それぞれ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

であるので $\varphi\psi$ と $\psi\varphi$ のトレースは一致する. ∎

注意　φ, ψ がべき有限次であっても $\varphi + \psi$ がべき有限次であるとは限らない. 例えば W_i を 2 次元空間, φ_i, ψ_i をある基底に関して, それぞれ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で表される線型変換とする. φ_i, ψ_i はべき零であるが, $\varphi_i + \psi_i$ は正則である. $V = \prod_{i=1}^{\infty} W_i$, $\varphi = \prod_{i=1}^{\infty} \varphi_i$, $\psi = \prod_{i=1}^{\infty} \psi_i$ とすれば φ, ψ はべき有限次であるが, $\varphi + \psi$ はべき有限次

でない.

部分空間の関係 $\prec$

体 k 上の線型空間 V の部分空間 B, C が $\dim_k (B+C)/C < \infty$ を満たすとき $B \prec C$ と表す. これは $\dim_k B/(B\cap C) < \infty$ が成り立つことと同値である (定理 1.15, (2)). $B \prec C$ かつ $C \prec B$ のとき $B \sim C$ と表す. 明らかに $C \subseteq B$ のとき $C \prec B$ が成り立つ. 従って, 任意の B に対して $0 \prec B$ が成り立つ. また $B \sim 0$ であることと B が有限次であることとは同値である.

定理 1.15 体 k 上の線型空間 V の部分空間 B, C, D に対して次が成り立つ.

(1) $B \prec C$ かつ $C \prec D$ ならば $B \prec D$ である.

(2) $B \prec C$ ならば $B \prec B \cap C$ かつ $B + C \sim C$ である.

(3) $B \prec C$ ならば V の任意の線型変換 φ に対して $\varphi(B) \prec \varphi(C)$ である.

Proof (1) $B \prec C$ かつ $C \prec D$ であると仮定すると, $B/(B\cap C), C/(C\cap D)$ は有限次である. 次の 2 つの準同型

$$B\cap C \xrightarrow{\text{入射}} C \xrightarrow{\text{自然な準同型}} \frac{C}{C\cap D}$$

の合成の核は $B\cap C\cap D$ であるから, $(B\cap C)/(B\cap C\cap D)$ は $C/(C\cap D)$ の部分空間と見なせる. ゆえに $(B\cap C)/(B\cap C\cap D)$ は有限次である. $B/(B\cap C)$, $(B\cap C)/(B\cap C\cap D)$ が有限次であるから $B/(B\cap C\cap D)$, 従って $B/(B\cap D)$ も有限次である. よって $B \prec D$ が成り立つ.

(2) $B \prec C$ ならば $\dim_k (B+C)/C < \infty$ であるから

$$\dim_k \frac{(B+C)+C}{C} = \dim_k \frac{B+C}{C} < \infty \quad \Rightarrow \quad B+C \prec C$$

$$\dim_k \frac{B+B\cap C}{B\cap C} = \dim_k \frac{B}{B\cap C} = \dim_k \frac{B+C}{C} < \infty \quad \Rightarrow \quad B \prec B\cap C$$

が成り立つ.

(3)　次の 2 つの全射準同型

$$B+C \xrightarrow{\varphi} \varphi(B)+\varphi(C) \xrightarrow{\text{自然な準同型}} \frac{\varphi(B)+\varphi(C)}{\varphi(C)}$$

の合成の核が C を含むので $(\varphi(B)+\varphi(C))/\varphi(C)$ は $(B+C)/C$ の剰余空間と見なせるから, 有限次である. 従って $\varphi(B) \prec \varphi(C)$ が成り立つ. ∎

定理 1.16 体 k 上の線型空間 V の部分空間 B に対して, V の線型変換 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が $\varphi_i(V) \prec B$ かつ $\varphi_i(B) \sim 0$ を満たすならば, 任意の i, j に対して $\dim_k \varphi_i\varphi_j(V) < \infty$, および $\dim_k(\sum_i \varphi_i)^2(V) < \infty$ が成り立つ. 特に φ_i, $\sum_i \varphi_i$ はべき有限次で次の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Tr}_V\left(\sum_i \varphi_i\right) = \sum_i \mathrm{Tr}_V(\varphi_i)$$

Proof　次の 2 つの全射線型写像

$$\varphi_i(V) \xrightarrow{\varphi_j} \varphi_j\varphi_i(V) \xrightarrow{\text{自然準同型}} \varphi_j\varphi_i(V)/(\varphi_j\varphi_i(V) \cap \varphi_j(B))$$

の合成の核が $\varphi_i(V) \cap B$ を含むので, 全射線型写像

$$\varphi_i(V)/(\varphi_i(V) \cap B) \longrightarrow \varphi_j\varphi_i(V)/(\varphi_j\varphi_i(V) \cap \varphi_j(B))$$

が得られる. 仮定より $\varphi_i(V)/(\varphi_i(V) \cap B)$ は有限次であるから $\varphi_j\varphi_i(V)/(\varphi_j\varphi_i(V) \cap \varphi_j(B))$ は有限次である. また $\varphi_j(B)$ も有限次であるから $\varphi_j\varphi_i(V)$ が有限次である. $j = i$ とすることにより φ_i がべき有限次であることがわかる. また

$$\left(\sum_i \varphi_i\right)^2 (V) \subseteq \sum_{i,j} \varphi_j\varphi_i(V)$$

より $\sum_i \varphi_i$ もべき有限次である. $W = \sum_{i,j} \varphi_j\varphi_i(V)$ とおくと, W は 有限次, かつ φ_i 不変で, $\varphi_i^2(V) \subseteq W$ であるから定理 1.11 より $\mathrm{Tr}_V(\varphi_i) = \mathrm{Tr}_W(\varphi_i)$ が成り立つ. 同様に $(\sum_i \varphi_i)^2(V) \subseteq W$ であるから $\mathrm{Tr}_V(\sum_i \varphi_i) = \mathrm{Tr}_W(\sum_i \varphi_i)$ が成り立つ. 以上から W が有限次であることに注意すれば

$$\mathrm{Tr}_V\left(\sum_i \varphi_i\right) = \mathrm{Tr}_W\left(\sum_i \varphi_i\right) = \sum_i \mathrm{Tr}_W(\varphi_i) = \sum_i \mathrm{Tr}_V(\varphi_i)$$

が得られる. ∎

定理 1.17 体 k 上の線型空間 V の部分空間 B に対して，V の線型変換 φ, ψ が次の (1), (2) のいずれかを満たすとする．

(1) $\varphi(V) \prec B$, $\varphi(B) \sim 0$, $\psi(B) \prec B$

(2) $\varphi(V) \prec B$, $\psi(B) \sim 0$

このとき次が成り立つ．ただし $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ である．

(i) $\varphi\psi(V) \prec B$, $\varphi\psi(B) \sim 0$，$\psi\varphi(V) \prec B$, $\psi\varphi(B) \sim 0$

(ii) $\dim_k(\varphi\psi)^2(V) < \infty$，$\dim_k(\psi\varphi)^2(V) < \infty$，$\dim_k[\varphi, \psi]^2(V) < \infty$ が成り立つ．特に $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, $[\varphi, \psi]$ はべき有限次で，$\mathrm{Tr}_V([\varphi, \psi]) = 0$ である．

Proof (1) $\Rightarrow$(i). $\varphi\psi(V) \prec \varphi(V)$，$\varphi(V) \prec B$ であるから，定理 1.15, (1) より $\varphi\psi(V) \prec B$ が得られる．また $\psi(B) \prec B$ に定理 1.15, (3) を適用して $\varphi\psi(B) \prec \varphi(B)$ となるが，これと $\varphi(B) \sim 0$ より $\varphi\psi(B) \prec 0$ となるので，$\varphi\psi(B) \sim 0$ が得られる．次に $\varphi(V) \prec B$ より，$\psi\varphi(V) \prec \psi(B)$ となり，$\psi(B) \prec B$ であるから $\psi\varphi(V) \prec B$ を得る．最後に $\varphi(B) \sim 0$ から $\psi\varphi(B) \sim \psi(0) = 0$ が得られる．

(2) $\Rightarrow$(i). $\varphi\psi(V) \prec B$ は上と同様に $\varphi(V) \prec B$ から得られる．$\psi(B) \sim 0$ より $\varphi\psi(B) \sim 0$ が得られる．また $\varphi(V) \prec B$ から $\psi\varphi(V) \prec \psi(B)$ となり，$\psi(B) \prec 0$ より $\psi\varphi(V) \prec 0$ となる．$\psi\varphi(V)$ が有限次であるので，$\psi\varphi(V) \prec B$, $\psi\varphi(B) \sim 0$ が成り立つ．

(i) $\Rightarrow$(ii). $n = 2$ とし, φ_1 を $\varphi\psi$，φ_2 を $-\psi\varphi$ に置き換えれば, 定理 1.16 の仮定を満たすので

$$\dim_k(\varphi\psi)^2(V) < \infty, \quad \dim_k(\psi\varphi)^2(V) < \infty, \quad \dim_k[\varphi, \psi]^2(V) < \infty$$

が導かれる．特に $\varphi\psi$，$-\psi\varphi$, $[\varphi, \psi]$ はべき有限次で

$$\mathrm{Tr}_V([\varphi, \psi]) = \mathrm{Tr}_V(\varphi\psi) - \mathrm{Tr}_V(\psi\varphi)$$

が成り立つ．また定理 1.14 を適用すれば $\mathrm{Tr}_V([\varphi, \psi]) = 0$ を得る． ∎

補題 1.18 V を体 K 上の線型空間, k を K の部分体とする. B を k 線型空間 V の部分空間, $f,g,h \in K^\times$ を V の k 線型変換と見なして, $f(B) \prec B$, $g(B) \prec B$, $h(B) \prec B$ であるとする. このとき次が成り立つ.

$$\dim_k \frac{B+h(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)} < \infty$$

Proof 仮定より $\dim_k(B+h(B))/B < \infty$ である. また f,g は V の k 線型自己同型であるから

$$f(B) \prec B \ \Rightarrow\ B \prec \frac{1}{f}(B)$$

および

$$g(B) \prec B \ \Rightarrow\ B \prec \frac{1}{g}(B) \ \Rightarrow\ \frac{1}{f}(B) \prec \frac{1}{fg}(B)$$

が成り立つ. 従って

$$\frac{B+h(B)}{B}, \quad \frac{B}{B \cap \frac{1}{f}(B)}, \quad \frac{\frac{1}{f}(B)}{\frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)}$$

は有限次元となる. ここで 2 つの全射準同型

$$B \cap \frac{1}{f}(B) \xrightarrow{\text{入射}} \frac{1}{f}(B) \xrightarrow{\text{自然な準同型}} \frac{\frac{1}{f}(B)}{\frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)}$$

の合成の核が $B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)$ であるので $\frac{B \cap \frac{1}{f}(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)}$ は $\frac{\frac{1}{f}(B)}{\frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)}$ の部分空間と見なせる. ゆえに

$$\frac{B \cap \frac{1}{f}(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)}$$

も有限次元であり, 上述のことと合わせて

$$\dim_k \frac{B+h(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)} < \infty$$

が得られる. ∎

補題 1.19 V を体 K 上の線型空間, k を K の部分体とする. B を k 線型空間 V の部分空間, $f, g, f', g' \in K$ を V の k 線型変換と見なして, $f(B) \prec B$, $g(B) \prec B$, $f'(B) \prec B$, $g'(B) \prec B$ であるとする. このとき任意の k 線型な射影 $\pi : V \mapsto B$, $\pi' : V \mapsto B$ に対して, $\dim_k[\pi f, g](B+g(B)) < \infty$, および $\dim_k[\pi f, g][\pi' f', g'](V) < \infty$ が成り立つ.

Proof　f, g, f', g' の 1 つが 0 ならば $[\pi f, g][\pi' f', g'] = 0$ となるので補題の主張が成り立つ. 従って, 以下 $f, g, f', g' \in K^\times$ であるとする.

$$[\pi' f', g'](V) \subseteq B + g'(B)$$

であり, 補題 1.18 より

$$\dim_k \frac{B + g'(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)} < \infty$$

が成り立つ. また, 任意の $x \in B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)$ に対して $fg(x), f(x) \in B$, $fg = gf$ であることに注意すれば

$$[\pi f, g](x) = \pi fg(x) - g\pi f(x) = fg(x) - gf(x) = 0$$

が成り立つ. よって

$$[\pi f, g]\left(B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)\right) = 0$$

であるから

$$\dim_k[\pi f, g](B + g'(B)) < \infty$$

を得る. $[\pi' f', g'](V) \subseteq B + g'(B)$ であったから $\dim_k[\pi f, g][\pi' f', g'](V) < \infty$ も成り立つ. ∎

定理 1.20 V を体 K 上の線型空間, k を K の部分体とする. B を k 線型空間 V の部分空間, $f, g \in K$ を V の k 線型変換と見なして, $f(B) \prec B$, $g(B) \prec B$ であるとする. このとき任意の k 線型な射影 $\pi : V \mapsto B$ に対して $\dim_k[\pi f, g]^2(V) < \infty$ が成り立つ. 特に $[\pi f, g]$ はべき有限次である. また $\mathrm{Tr}_V([\pi f, g])$ は射影 π の選び方によらず一定である.

Proof　$f = 0$ または $g = 0$ ならば射影 π の選び方によらず $[\pi f, g] = 0$ となり, 定理の主張が成り立つ. 従って, 以下 $f, g \in K^\times$ とする. $f = f'$, $g = g'$,

$\pi = \pi'$ として補題 1.19 を適用すると $\dim_k [\pi f, g]^2(V) < \infty$ が得られる. 特に $[\pi f, g]$ はべき有限次である.

次に π' も k 線型な B への射影であるとし, $\varphi_1 = [\pi f, g]$, $\varphi_2 = [\pi' f, g]$ とおく. このとき

$$\varphi_1(V) = [\pi f, g](V) \subseteq B + g(B) \prec B \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(V) \prec B$$

が成り立つ. また

$$\varphi_1(B) \subseteq \varphi_1 \left(B + g(B)\right)$$

であるが, 補題 1.19 の証明と同様に

$$\varphi_1 \left(B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B) \right) = 0 \quad \text{かつ} \quad \dim_k \frac{B + g(B)}{B \cap \frac{1}{f}(B) \cap \frac{1}{fg}(B)} < \infty$$

より $\dim_k \varphi_1(B) < \infty$ を得る. よって $\varphi_1(B) \sim 0$ が成り立つ. 同様にして $\varphi_2(V) \prec B$, $\varphi_2(B) \sim 0$ も導かれるので, 定理 1.16 より

$$\mathrm{Tr}_V(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathrm{Tr}_V(\varphi_1) - \mathrm{Tr}_V(\varphi_2)$$

となるので

$$\mathrm{Tr}_V([(\pi - \pi')f, g]) = \mathrm{Tr}_V([\pi f, g]) - \mathrm{Tr}_V([\pi' f, g])$$

が得られる.

$\mathrm{Tr}_V([(\pi - \pi')f, g]) = 0$ を示せばよいのであるが, まず $\varphi = (\pi - \pi')f$, $\psi = g$ として, 定理 1.17 の条件 (1) が満たされることを示そう.

$$\varphi(V) = (\pi - \pi')f(V) \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \varphi(V) \prec B$$

が成り立つ. さらに

$$x \in \frac{1}{f}(B) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = (\pi - \pi')f(x) = 0$$

となるので $\frac{1}{f}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ が成り立つ. これより

$$\frac{1}{f}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi), \quad \dim_k \frac{B}{B \cap \frac{1}{f}(B)} < \infty \quad \Rightarrow \quad \dim_k \varphi(B) < \infty$$

となるので $\varphi(B) \sim 0$ が成り立つ．仮定より $\psi(B) = g(B) \prec B$ も成り立つので条件 (1) が満たされる．ゆえに定理 1.17 を適用して $\mathrm{Tr}_V([(\pi - \pi')f, g]) = 0$ を得る．これと前述の結果

$$\mathrm{Tr}_V([(\pi - \pi')f, g]) = \mathrm{Tr}_V([\pi f, g]) - \mathrm{Tr}_V([\pi' f, g])$$

を合わせると $\mathrm{Tr}_V([\pi f, g]) = \mathrm{Tr}_V([\pi' f, g])$ が得られる．すなわち $\mathrm{Tr}_V([\pi f, g])$ は π の選び方によらない． ∎

1.3 微分加群

以下, R は単位元 1 を含む可換な k 代数とする．対応 $k \ni a \mapsto a \cdot 1 \in R$ により k は R に含まれていると見なす．

R から R 加群 M への k 線型写像 $D : R \mapsto M$ が次の条件を満たすとき，R から M への k 導分という．

$$D(xy) = xD(y) + yD(x) \qquad (\forall x, y \in R) \tag{1.1}$$

定理 1.21 R 加群 M への k 導分 D は次を満たす．

(1) $a \in k$ のとき $D(a) = 0$ である．

(2) 整数 $m \geq 0$ と $x \in R$ に対して $D(x^m) = mx^{m-1}D(x)$ が成り立つ．

(3) $F(X_1, ..., X_n) \in k[X_1, ..., X_n]$ と $x_1, ..., x_n \in R$ に対して次が成り立つ．ただし F_{X_i} は多項式 F の X_i に関する代数的偏微分を表す．

$$D\left(F(x_1, ..., x_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_1, ..., x_n) D(x_i)$$

Proof

(1) $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1)$ より $D(1) = 0$ となる．D が k 線型写像であることから $D(a) = aD(1) = 0$ が得られる．

(2) m についての帰納法で示す． $m = 0$ のときは (1) より成り立つ．以下

$m \geq 1$ として $m-1$ 以下では成り立つと仮定する．式 (1.1) より

$$\begin{aligned} D(x^m) &= D(x \cdot x^{m-1}) = xD(x^{m-1}) + x^{m-1}D(x) \\ &= x \cdot (m-1)x^{m-2}D(x) + x^{m-1}D(x) \\ &= mx^{m-1}D(x) \end{aligned}$$

となるので, m のときも成り立つことが示された.

(3) D および代数的偏微分が k 線型写像であること，$F(X_1, ..., X_n)$ が単項式の k 係数１次結合として表されることから, $F(X_1, ..., X_n)$ が単項式の場合に示せばよい．$F(X_1, ..., X_n) = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$ とおくと

$$\begin{aligned} D(x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}{x_i^{m_i}} D(x_i^{m_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}{x_i^{m_i}} m_i x_i^{m_i - 1} D(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_1, ..., x_n) D(x_i) \end{aligned}$$

となり, (3) が示された. ∎

R を添数集合とする記号 e_r $(r \in R)$ を導入し, それらを基底とする 自由 R 加群を $\oplus_{r \in R} Re_r$ とする．このとき次式で定まる剰余加群を $\Omega_k(R)$ と表し，R の微分加群という．ただし $S \subseteq \oplus_{r \in R} Re_r$ に対して $\langle S \rangle$ は S で生成される R 部分加群を表す.

$$\frac{\oplus_{r \in R} Re_r}{\left\langle \{ e_{r+s} - e_r - e_s,\ e_{ar} - ae_r,\ e_{rs} - re_s - se_r \mid r, s \in R, a \in k \} \right\rangle} \tag{1.2}$$

明らかに $\Omega_k(R)$ は R 加群として，e_r の属する類 $\overline{e_r}$ $(r \in R)$ で生成される.

定理 1.22 写像 $d_R : R \ni r \mapsto \overline{e_r} \in \Omega_k(R)$ は k 導分である.

Proof　$r, s \in R, a, b \in k$ に対して，$\Omega_k(R)$ における関係式

$$\overline{e_{r+s}} = \overline{e_r} + \overline{e_s}, \quad \overline{e_{ar}} = a\overline{e_r}, \quad \overline{e_{rs}} = r\overline{e_s} + s\overline{e_r}$$

を用いれば

$$d_R(ar + bs) = \overline{e_{ar+bs}} = \overline{e_{ar}} + \overline{e_{bs}} = a\overline{e_r} + b\overline{e_s} = ad_R(r) + bd_R(s)$$

$$d_R(rs) = \overline{e_{rs}} = r\overline{e_s} + s\overline{e_r} = rd_R(s) + sd_R(r)$$

となるので d_R は k 導分である. ∎

定理 1.23 任意の R 加群 M と k 導分 $D: R \mapsto M$ に対して, 右の図式を可換にする R 準同型 $\varphi: \Omega_k(R) \mapsto M$ が唯一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d_R"] \arrow[d, "D"'] & \Omega_k(R) \arrow[dl, "\varphi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Proof　まず存在を示す. $\oplus_{r\in R}Re_r$ は自由 R 加群であるから R 準同型 $\varphi' : \oplus_{r\in R}Re_r \mapsto M$ で $\varphi'(e_r) = D(r)$ を満たすものが唯一つ存在する. ここで $r, s \in R$ に対して

$$\varphi'(e_{r+s}) = D(r+s) = D(r) + D(s) = \varphi'(e_r) + \varphi'(e_s)$$

より $e_{r+s} - e_r - e_s$ は φ' の核に含まれる. 同様にして

$$e_{rs} - re_s - se_r, \quad e_{ar} - ae_r \quad (r, s \in R, a \in k)$$

も φ' の 核に含まれることがわかる. ゆえに φ' の核は $\Omega_k(R)$ の定義式 (1.2) の分母を含むこととなり, R 準同型 $\varphi: \Omega_k(R) \mapsto M$ を誘導する. φ の定め方から

$$\varphi \circ d_R(r) = \varphi'(e_r) = D(r) \quad (r \in R)$$

となるので $\varphi \circ d_R = D$ が成り立つ. 次に一意性を示す. R 準同型 $\psi: \Omega_k(R) \mapsto M$ も $\psi \circ d_R = D$ を満たすと仮定すると

$$D(r) = \varphi \circ d_R(r) = \psi \circ d_R(r) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\overline{e_r}) = \psi(\overline{e_r})$$

となり, $\overline{e_r}$ の全体が $\Omega_k(R)$ を生成することから $\varphi = \psi$ が得られる. ∎

定理 1.24 R 加群 Ω と k 導分 $d: R \mapsto \Omega$ が次の条件を満たすならば R 加群として $\Omega \simeq \Omega_k(R)$ が成り立つ.

任意の R 加群 M と k 導分 $D: R \mapsto M$ に対して, 右の図式を可換にする R 準同型 $\varphi: \Omega \mapsto M$ が唯一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] \arrow[d, "D"'] & \Omega \arrow[dl, "\varphi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Proof

条件より $d_R = \varphi d$ を満たす R 準同型 $\varphi : \Omega \mapsto \Omega_k(R)$ が存在する. また定理 1.23 より $d = \psi d_R$ を満たす R 準同型 $\psi : \Omega_k(R) \mapsto \Omega$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_R"'] & \Omega \arrow[dl, shift right, "\varphi"'] \\ \Omega_k(R) \arrow[ur, shift right, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

このとき $d_R = \varphi\psi d_R$ となるが, 定理 1.23 よりこのような $\varphi\psi$ はただ一つであるから $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\Omega_k(R)}$ となる. 同様に $\psi\varphi = \mathrm{id}_\Omega$ が得られるので ψ, φ はそれぞれ R 同型である. 従って $\Omega \simeq \Omega_k(R)$ が成り立つ. ∎

$d_R(R)$ が上の定理の条件を満たすことに注意すれば次の系が得られる.

系 1.25 $\Omega_k(R)$ は R 加群として $d_R(R)$ で生成される.

1.4 完全体上有限生成な体

ここでは完全体 k 上有限生成な体 K が k 上の有理関数体の有限次分離拡大であること, 従って高々 $\mathrm{tr.deg}_k K + 1$ 個の元で生成されることを示す. ここで $\mathrm{tr.deg}_k K$ は K の k 上の超越次数を表す. また k 自身も 0 変数有理関数体と見なす.

完全体とは任意の代数拡大が分離拡大である体のことであり, 標数 0 の体, 有限体, 代数的閉体などは完全体である ([4, §36]). また標数 $p > 0$ の体 k が完全体であるための条件は $k = k^p$ が成り立つことである ([4, 定理 36.14]). ここで $k^p = \{a^p \mid a \in k\}$ である.

定理 1.26 K が完全体 k 上有限生成な体であるとき, k 上代数的独立な元 $x_1, ..., x_n \in K$ が存在して K は $k(x_1, ..., x_n)$ 上有限次分離拡大となる.

Proof k の標数が 0 のときは $x_1, ..., x_n$ として K の超越基をとれば, $K/k(x_1, ..., x_n)$ は有限次分離拡大となる. 従って以下 k の標数は $p > 0$ であると仮定する. K が k 上 $y_1, ..., y_m$ で生成されたとし, m に関する帰納法で示す. $m = 0$ のときは明らかに成り立つ. $m = 1$ のときも y_1 が k 上代数的であれば k が完全体であることから K は k の有限次分離拡大であり, y_1 が k 上超越的であれば K は k 上の 1 変数有理関数体となり, いずれの場合も定理の主張が成り立

つ. 従って, 以下 $m \geq 2$ とし, $m-1$ 個以下の元で生成される k の拡大体については定理の主張が成り立っているとする.

$y_1, ..., y_m$ の中の $m-1$ 個の元で k 上代数的従属であるものが存在したとする. 適当に番号を付け替えて $y_1, ..., y_{m-1}$ が k 上代数的従属であったとする. このとき $\mathrm{tr.deg}_k\, k(y_1, ..., y_{m-1}) \leq m-2$ である. 帰納法の仮定から $k(y_1, ..., y_{m-1})$ に k 上代数的独立な元 $z_1, ..., z_r$ が存在して, $k(y_1, ..., y_{m-1})$ は $k(z_1, ..., z_r)$ 上有限次分離拡大, 従って単拡大 $k(z_1, ..., z_r)(z)$ となる. 一方 $r \leq m-2$ より $k(z_1, ..., z_r, y_m)$ に帰納法の仮定を適用すると, $k(z_1, ..., z_r, y_m)$ に k 上代数的独立な元 $x_1, ..., x_n$ が存在して $k(z_1, ..., z_r, y_m)$ は $k(x_1, ..., x_n)$ 上有限次分離拡大となる. z は $k(z_1, ..., z_r, y_m)$ 上分離的であるから $k(z_1, ..., z_r, y_m, z)$ が $k(x_1, ..., x_n)$ 上有限次分離拡大となる. ここで

$$k(z_1, ..., z_r, y_m, z) = k(z_1, ..., z_r, z, y_m) = k(y_1, ..., y_{m-1}, y_m) = K$$

より, K が $k(x_1, ..., x_n)$ 上有限次分離拡大となり, この場合は定理の主張が成り立つ.

以下 $y_1, ..., y_m$ の中の $m-1$ 個の元はすべて k 上代数的独立であるとする. $y_1, ..., y_m$ が k 上代数的独立であれば K 自身が k 上の有理関数体となるので, $y_1, ..., y_m$ は k 上代数的従属である. 従って, ある 0 でない既約多項式 $F \in k[X_1, ..., X_m]$ が存在して $F(y_1, ..., y_m) = 0$ となる. ここで F における各項の X_i の次数がすべて p の倍数であれば, $k = k^p$ であることから

$$\begin{aligned} F(X_1, ..., X_m) &= \sum_{i_1, ..., i_m} a_{i_1, ..., i_m} (X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m})^p \\ &= \sum_{i_1, ..., i_m} b^p_{i_1, ..., i_m} (X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m})^p \\ &= \left(\sum_{i_1, ..., i_m} b_{i_1, ..., i_m} X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m} \right)^p \end{aligned}$$

となり F の既約性に反する. ゆえにある変数 X_j の次数の中に p の倍数でないものがある. 適当に番号を付け替えて変数 X_m の次数の中に p の倍数でないものがあるとしてよい. このとき y_m は $k(y_1, .., y_{m-1})$ 上分離的となる. よって $K = k(y_1, .., y_m)$ は $k(y_1, .., y_{m-1})$ 上有限次分離的となり, 定理が証明された. ∎

定理の $x_1, ..., x_n$ は K の k 上の超越基となるので $n = \mathrm{tr.deg}_k K$ である．また有限次分離拡大は単拡大である ([4, 定理 36.13])．これより次の定理が成り立つ．

定理 1.27 K が完全体 k 上有限生成な体であるとき，K は高々 $\mathrm{tr.deg}_k K + 1$ 個の元で生成される．

2章　アフィン多様体

2章では, アフィン多様体の基本事項について述べる. §2.1, §2.2, §2.3 では, アフィン代数的集合およびアフィン多様体, Hilbert の零点定理などについて述べた後, アフィン代数的集合と根基イデアルが１対１に対応することを示す. §2.4 では, アフィン多様体の座標環が整域であることから, その分数体として有理関数体を定義し, k 上有限生成な任意の整域を座標環とするアフィン多様体が一意に定まることを示す. §2.5 では, 有理関数の極全体が代数的集合になること, 1 点で定義される有理関数全体が局所環をなすことなどを示し, §2.6 では有理関数体の k 上の超越次数として多様体の次元を定義し, 1 次元アフィン多様体としてアフィン曲線を定義する. アフィン曲線上の有理関数の極と零点が有限個であることは 3 章で利用され, 4 章で主因子を定義するときの根拠を与える. §2.7 ではアフィン多様体の特異・非特異性を局所環から代数的に定義し, アフィン曲線上の特異点が高々有限個であることを証明する.

k は 1 章同様, 体を表す. また §2.3 以降は代数的閉体であるとする.

2.1　アフィン代数的集合

$\mathbb{A}^n(k) = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in k\}$ を n 次元アフィン空間という. 1 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^1(k)$ をアフィン直線, 2 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^2(k)$ をアフィン平面などと呼ぶ. また $\mathbb{A}^n(k)$ の元を $\mathbb{A}^n(k)$ の点と呼ぶ.

多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$ と点 $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ に対して $F(A) = F(a_1, ..., a_n)$ と定める. $F(A) = 0$ を満たす点 $A \in \mathbb{A}^n(k)$ を F の零点という. $S \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ に対して, $\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 $\mathbf{V}(S)$ を

$$\mathbf{V}(S) := \{A \in \mathbb{A}^n(k) \mid \text{任意の } F \in S \text{ に対して } F(A) = 0\}$$

と定め, アフィン代数的集合という. 混同のおそれがない限り, アフィン代数的集合を単

に代数的集合という． $\mathbf{V}$ は次のような写像と見なせる．

$$\mathbf{V}:\{k[X_1,...,X_n] \text{ の部分集合 }\} \ni S \mapsto \mathbf{V}(S) \in \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の部分集合 }\}$$

$\mathbf{V}$ は次の (1)〜(5) を満たす．ただし $S, T \subseteq k[X_1,...,X_n]$ とする．

(1) $S \subseteq T$ ならば $\mathbf{V}(S) \supseteq \mathbf{V}(T)$ である．

(2) $\mathbf{V}(\emptyset) = \mathbf{V}(\{0\}) = \mathbb{A}^n(k)$, $\mathbf{V}(\{1\}) = \mathbf{V}(k[X_1,...,X_n]) = \emptyset$

(3) $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(\langle S\rangle)$. ここで $\langle S\rangle$ は S で生成される $k[X_1,...,X_n]$ のイデアルを表す．

(4) $k[X_1,...,X_n]$ のイデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して,

$$\mathbf{V}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{V}(I_\lambda) \qquad \text{である．}$$

(5) $\mathbf{V}(S) \cup \mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(\{FG \mid F \in S, G \in T\}) = \mathbf{V}(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle)$

(∵) (1), (2) は明らかである．(3) については $S=\emptyset$ のときは $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$ となるので, (2) より成り立つ． $S \neq \emptyset$ のときも $\langle S\rangle$ が次式で与えられることから導かれる．

$$\langle S\rangle = \{G_1F_1 + \cdots + G_nF_n \mid G_i \in R, F_i \in S\}$$

(4) 任意の $\beta \in \Lambda$ に対して $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \supseteq I_\beta$ であるから $\mathbf{V}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq \mathbf{V}(I_\beta)$ が成り立つ．これより

$$\mathbf{V}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq \bigcap_{\beta\in\Lambda} \mathbf{V}(I_\beta)$$

を得る．次に $A \in \bigcap_{\beta\in\Lambda} \mathbf{V}(I_\beta)$ とすると, 任意の $F \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ に対して, ある $\beta \in \Lambda$ が存在して $F \in I_\beta$ となるが, $A \in \mathbf{V}(I_\beta)$ であるから $F(A) = 0$ が成り立つ．ゆえに $A \in \mathbf{V}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$ となる．よって $\mathbf{V}(\bigcup_{\lambda\in A} I_\lambda) \supseteq \bigcap_{\lambda\in A} \mathbf{V}(I_\lambda)$ となり, (4) が示された．

(5) $U = \{FG \mid F \in S, G \in T\}$ とおくと $U \subseteq \langle S\rangle \cap \langle T\rangle$ が成り立つ．従って

$$\mathbf{V}(U) \supseteq \mathbf{V}(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle)$$

が得られる．一方

$$\langle S\rangle \cap \langle T\rangle \subseteq \langle S\rangle, \qquad \langle S\rangle \cap \langle T\rangle \subseteq \langle T\rangle$$

であるから

$$\mathbf{V}(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) \supseteq \mathbf{V}(\langle S\rangle) \cup \mathbf{V}(\langle T\rangle)$$

となるので

$$\mathbf{V}(U) \supseteq \mathbf{V}(\langle S \rangle \cap \langle T \rangle) \supseteq \mathbf{V}(\langle S \rangle) \cup \mathbf{V}(\langle T \rangle)$$

が成り立つ．従って $\mathbf{V}(U) \subseteq \mathbf{V}(\langle S \rangle) \cup \mathbf{V}(\langle T \rangle)$, すなわち $\mathbf{V}(U) \subseteq \mathbf{V}(S) \cup \mathbf{V}(T)$ を示せば求める等式が得られる．そのためには $A \in \mathbf{V}(U) - \mathbf{V}(S)$ に対して $A \in \mathbf{V}(T)$ が成り立つことを示せばよい．$A \notin \mathbf{V}(S)$ ならば $F(A) \neq 0$ となる $F \in S$ が存在する．任意の $G \in T$ に対して $FG \in U$ かつ $A \in \mathbf{V}(U)$ より，$F(A)G(A) = (FG)(A) = 0$ となり，$G(A) = 0$ を得る．以上から $A \in \mathbf{V}(T)$ となるので (5) が示された．

アフィン空間 $\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 V に対して

$$\mathbf{I}(V) := \{F \in k[X_1, ..., X_n] \mid \text{任意の } A \in V \text{ に対して } F(A) = 0\}$$

と定義すると，$\mathbf{I}(V)$ は $k[X_1, ..., X_n]$ のイデアルになる．$\mathbf{I}(V)$ を V のイデアルという．$\mathbf{I}$ は次のような写像と見なせる．

$$\mathbf{I} : \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の部分集合 }\} \ni V \mapsto \mathbf{I}(V) \in \{k[X_1..., X_n] \text{ のイデアル }\}$$

$\mathbf{V}, \mathbf{I}$ について次の (1)〜(9) が成り立つ．ただし $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ とする．

(1) $V \subseteq W$ ならば $\mathbf{I}(V) \supseteq \mathbf{I}(W)$ である．

(2) $\mathbf{I}(V \cup W) = \mathbf{I}(V) \cap \mathbf{I}(W)$, $\mathbf{I}(V \cap W) \supseteq \mathbf{I}(V) + \mathbf{I}(W)$

(3) $\mathbf{I}(\emptyset) = k[X_1, ..., X_n]$

(4) k が無限体であるならば $\mathbf{I}(\mathbb{A}^n(k)) = 0$ である．

(5) $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ に対して $\mathbf{I}(\{A\}) = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ である．

(6) $S \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ に対して $\mathbf{I}(\mathbf{V}(S)) \supseteq S$, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(S))) = \mathbf{V}(S)$ である．

(7) $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) \supseteq W$, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))) = \mathbf{I}(W)$

(8) V が代数的集合であるならば $V = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V))$ である．

(9) I がある集合のイデアルであるならば $I = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ である．

($\because$) (1)~(3) は明らかである．また定理 1.1 より (4) が導かれる．

(5) $\mathbf{I}(\{A\}) \supseteq \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ は明らかである．逆に $F \in \mathbf{I}(\{A\})$ とする．いま F を X_1 の多項式とみて $X_1 - a_1$ で割ると余りは X_1 を含まない多項式である．

同様に $X_2-a_2,...,X_n-a_n$ で順に割ると

$$F=\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_i)G_i+b \quad (G_i\in k[X_1,...,X_n],\ b\in k)$$

と表される．このとき $F(A)=0$ より $b=0$ である．よって $F\in\langle X_1-a_1,...,X_n-a_n\rangle$ となるので (5) が示された．

(6), (7)　$\mathbf{I}(\mathbf{V}(S))\supseteq S$,　$\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))\supseteq W$ は明らかである．$\mathbf{I}(\mathbf{V}(S))\supseteq S$ より $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(S)))\subseteq\mathbf{V}(S)$ が成り立つ．次に $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))\supseteq W$ で $W=\mathbf{V}(S)$ とおくと $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(S)))\supseteq\mathbf{V}(S)$ となるので $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(S)))=\mathbf{V}(S)$ が得られる．最後に $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))\supseteq W$ より $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)))\subseteq\mathbf{I}(W)$ となるが，$\mathbf{I}(\mathbf{V}(S))\supseteq S$ で $S=\mathbf{I}(W)$ とおけば $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)))\supseteq\mathbf{I}(W)$ となるので $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)))=\mathbf{I}(W)$ を得る．

(8), (9)　V が代数的集合ならば $V=\mathbf{V}(S)$ と表されるので (6) より (8) が導かれる．また I がある集合のイデアルならば $I=\mathbf{I}(W)$ と表されるので (7) より (9) が導かれる．

定理 2.1　$\mathbb{A}^n(K)$ の部分集合 V に対して，V のイデアル $\mathbf{I}(V)$ は根基イデアルである．

Proof　$\mathbf{I}(V)=\sqrt{\mathbf{I}(V)}$ を示せばよい．根基イデアルの定義より $\mathbf{I}(V)\subseteq\sqrt{\mathbf{I}(V)}$ が成り立つ．逆に $F\in\sqrt{\mathbf{I}(V)}$ とすると，ある自然数 m が存在して $F^m\in\mathbf{I}(V)$ となるので，任意の $A\in V$ に対して $(F^m)(A)=(F(A))^m=0$ より $F(A)=0$ が得られる．ゆえに $F\in\mathbf{I}(V)$ となり $\mathbf{I}(V)=\sqrt{\mathbf{I}(V)}$ が示された．∎

p.25 の (8) および定理 2.1 から $\mathbf{I}$ は $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合全体から $k[X_1,...,X_n]$ の根基イデアル全体への単射であることがわかる．これより次の定理が得られる．

定理 2.2　$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 $V,\ W$ に対して次が成り立つ．

$$V=W \iff \mathbf{I}(V)=\mathbf{I}(W)$$

定理 2.3　$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合は有限個の多項式の共通零点集合に等しい．

Proof　V を代数的集合とすると，あるイデアル $I\subseteq k[X_1,...,X_n]$ により $V=\mathbf{V}(I)$ と表される．一方，Hilbert の基底定理 (定理 1.5) より $I=\langle F_1,...,F_r\rangle$ $(F_i\in k[X_1,...,X_n])$ と表されるので p.24, (4) より

$$V=\mathbf{V}(I)=\mathbf{V}(F_1,...,F_r)=\bigcap_{i=1}^{r}\mathbf{V}(F_i)$$

が成り立つ. ∎

2.2 既約な代数的集合

$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V が可約であるとは, 次の条件を満たす代数的集合 V_1, V_2 が存在するときにいう.

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1, V_2 \subsetneq V$$

また代数的集合 $(\neq \emptyset)$ が可約でないとき既約であるという.

定理 2.4 代数的集合 $V \neq \emptyset$ に対して次は同値である.

(1) V は既約である.

(2) 代数的集合 V_1, V_2 が $V \subseteq V_1 \cup V_2$ を満たすならば $V \subseteq V_1$ または $V \subseteq V_2$ である.

Proof (1) $\Rightarrow$ (2) V が既約であるとする. 代数的集合 V_1, V_2 が $V \subseteq V_1 \cup V_2$ を満たすならば

$$V = (V \cap V_1) \cup (V \cap V_2)$$

が成り立つ. p.24, (4) より $V \cap V_1, V \cap V_2$ は代数的集合であるから $V = V \cap V_1$ または $V = V \cap V_2$ となる. よって $V \subseteq V_1$ または $V \subseteq V_2$ が成り立つ.

(2) $\Rightarrow$ (1) V が可約であると仮定すると, ある代数的集合 U_1, U_2 が存在して

$$V = U_1 \cup U_2 \ \text{ かつ } \ U_1 \subsetneq V, \quad U_2 \subsetneq V$$

となるが, 仮定より $V \subseteq U_1$ または $V \subseteq U_2$ となるので $V = U_1$ または $V = U_2$ が得られ矛盾が生じる. よって V は既約である. ∎

p.24, (5) より代数的集合の和は代数的集合となるので, 上の定理を繰り返し用いることにより次の定理が得られる.

定理 2.5 既約な代数的集合 V および代数的集合 $V_i \quad (i = 1, ..., m)$ が $V \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_m$ を満たすならば $V \subseteq V_i$ となる V_i が存在する.

補題 2.6 代数的集合 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ および $F, G \in k[X_1, ..., X_n]$ が $FG \in \mathbf{I}(V)$ を満たすならば $V \subseteq \mathbf{V}(FG) = \mathbf{V}(F) \cup \mathbf{V}(G)$ が成り立つ.

Proof　$V=\emptyset$ のときは明らかに成り立つので $V\neq\emptyset$ の場合について証明する．$A\in V$ とすると $FG\in\mathbf{I}(V)$ より $(FG)(A)=0$ となるので $A\in\mathbf{V}(FG)$ が成り立つ．これより $V\subseteq\mathbf{V}(FG)$ が得られる．$\mathbf{V}(FG)=\mathbf{V}(F)\cup\mathbf{V}(G)$ は p.24, (5) より導かれる． ∎

定理 2.7　$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V について次は同値である．

(1)　V は既約である．

(2)　$\mathbf{I}(V)$ は $k[X_1,...,X_n]$ の素イデアルである．

Proof　(1) $\Rightarrow$ (2)　V は既約であるから $V\neq\emptyset$, 従って定理2.2により，$\mathbf{I}(V)\neq\mathbf{I}(\emptyset)=k[X_1,...,X_n]$ である．$F,G\in k[X_1,...,X_n]$ が $FG\in\mathbf{I}(V)$ を満たすとする．このとき補題 2.6 より $V\subseteq\mathbf{V}(F)\cup\mathbf{V}(G)$ が成り立つ．定理 2.4 より $V\subseteq\mathbf{V}(F)$ または $V\subseteq\mathbf{V}(G)$ となる．$V\subseteq\mathbf{V}(F)$ ならば $F\in\mathbf{I}(V)$, $V\subseteq\mathbf{V}(G)$ ならば $G\in\mathbf{I}(V)$ となるので $\mathbf{V}$ は素イデアルである．

(2) $\Rightarrow$ (1)　$\mathbf{I}(V)$ が素イデアルであるから $\mathbf{I}(V)\neq k[X_1,...,X_n]$ となるので定理2.2 より $V\neq\emptyset$ である．次に V が可約であると仮定して矛盾を導く．代数的集合 V_1,V_2 が存在して

$$V=V_1\cup V_2,\quad V_1\subsetneq V,\quad V_2\subsetneq V \tag{2.1}$$

が成り立つことから

$$\mathbf{I}(V_1)\supsetneq\mathbf{I}(V),\qquad \mathbf{I}(V_2)\supsetneq\mathbf{I}(V)$$

が成り立つ．$F\in\mathbf{I}(V_1)-\mathbf{I}(V)$, $G\in\mathbf{I}(V_2)-\mathbf{I}(V)$ となる F,G を選ぶと

$$\mathbf{V}(FG)=\mathbf{V}(F)\cup\mathbf{V}(G)\supseteq V_1\cup V_2=V$$

が得られる．従って $FG\in\mathbf{I}(V)$ となるので $\mathbf{I}(V)$ が素イデアルであったことに矛盾する． ∎

定理 2.8　$\mathbb{A}^n(k)$ の任意の代数的集合 $V\neq\emptyset$ に対して，$V=V_1\cup\cdots\cup V_m$ となる既約な代数的集合 $V_1,...,V_m$ が存在する．さらに条件 “ 任意の $i\neq j$ に対して $V_i\not\subseteq V_j$ ” を満たすような代数的集合 $V_1,...,V_m$ は一意に定まる．

Proof　有限個の既約な代数的集合の和として表すことができない代数的集合 $V \neq \emptyset$ が存在したと仮定する．このとき V は既約でないから

$$V = V_1 \cup V_1', \qquad V \neq V_1, \;\; V \neq V_1'$$

となる代数的集合 $V_1,\ V_1'$ が存在する． $V_1,\ V_1'$ がともに有限個の既約な代数的集合の和であれば V 自身が有限個の既約な代数的集合の和となるから, V_1 または V_1' のいずれかは有限個の既約な代数的集合の和として表すことができない．一般性を失うことなく V_1 が有限個の既約な代数的集合の和でないとしてよい．このとき V_1 は既約ではないから,

$$V_1 = V_2 \cup V_2', \qquad V_1 \neq V_2, \;\; V_1 \neq V_2'$$

となる代数的集合 $V_2,\ V_2'$ が存在する．上と同様にして V_2 が有限個の既約な代数的集合の和でないとしてよいので

$$V_2 = V_3 \cup V_3', \qquad V_2 \neq V_3, \;\; V_2 \neq V_3'$$

となる代数的集合 V_3, V_3' が存在する．以下, この議論を繰り返して代数的集合の無限列

$$V \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq V_m \supsetneqq \cdots\cdots$$

が得られ, 対応するイデアルの列

$$\mathbf{I}(V) \subsetneqq \mathbf{I}(V_1) \subsetneqq \mathbf{I}(V_2) \subsetneqq \cdots\cdots \subsetneqq \mathbf{I}(V_m) \subsetneqq \cdots\cdots$$

から $k[X_1, ..., X_n]$ がネーター環であることへの矛盾が生じる．以上で, 任意の代数的集合 $(\neq \emptyset)$ が有限個の既約な代数的集合の和として表されることが示された．

次に既約な代数的集合 $V_1, ..., V_m, W_1, ..., W_\ell$ が存在して

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m = W_1 \cup \cdots \cup W_\ell, \;\; V_i \not\subseteq V_j, \;\; W_i \not\subseteq W_j \;\; (i \neq j)$$

を満たすとする．このとき任意の i に対して

$$V_i \subseteq V = W_1 \cup \cdots \cup W_\ell$$

であるから, 定理 2.5 より $V_i \subseteq W_h$ となる $h \in \{1, ..., \ell\}$ が存在する．この h

に対して

$$W_h \subseteq V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

であるから，$W_h \subseteq V_j$ となる $j \in \{1, ..., m\}$ が存在する．このとき $V_i \subseteq V_j$ となるが, 仮定より $i = j$ でなければならないので $V_i = W_h$ が成り立つ．以上で任意の i に対して $V_i = W_h$ となる h の存在が示された. 同様にして任意の W_i に対して $W_i = V_h$ となる $h \in \{1, ..., m\}$ が存在するので，$m = \ell$ であり, $W_1, ..., W_\ell$ は $V_1, ..., V_m$ を並び換えたものであることがわかる. ∎

定理 2.8 により $\mathbb{A}^n(k)$ の任意の代数的集合 $V \neq \emptyset$ に対して,

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m, \qquad V_i \not\subseteq V_j \quad (i \neq j)$$

となる既約な代数的集合 $V_1, ..., V_m$ が一意的に存在する． $V_1, ..., V_m$ を V の既約成分という.

2.3 Hilbert の零点定理

この節以降は特に断わらない限り，k は代数的閉体を表すものとする.

定理 2.9 (Hilbert の弱零点定理) 多項式環 $k[X_1, ..., X_n]$ の真のイデアル I に対して, $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ が成り立つ.

Proof　M を I を含む $k[X_1, ..., X_n]$ の極大イデアルとする． k が代数的閉体であるから定理 1.6 により

$$M = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle, \qquad a_1, ..., a_n \in k$$

と表されるので，$\mathbf{V}(M) = \{(a_1, ..., a_n)\}$ となる. 一方

$$\mathbf{V}(I) \supseteq \mathbf{V}(M) = \{(a_1, ..., a_n)\}$$

であるから $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ が成り立つ. ∎

定理 2.10 (Hilbert の零点定理) 多項式環 $k[X_1, ..., X_n]$ の任意のイデアル I に対して，$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ が成り立つ.

Proof　$I = k[X_1, ..., X_n]$ のときは $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(k[X_1, ..., X_n]) = \emptyset$ であるから

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\emptyset) = k[X_1, ..., X_n] = \sqrt{k[X_1, ..., X_n]}$$

より成り立つので, 以下 $I \subsetneq k[X_1, ..., X_n]$ であるとする． $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \supseteq \sqrt{I}$ は明らかであるから $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subseteq \sqrt{I}$ を示せばよい． $F \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$, $F \neq 0$ を任意に選ぶ． $k[X_1, ..., X_n]$ はネーター環であるから， $I = \langle F_1, ..., F_r \rangle$ となる $F_1, ..., F_r \in k[X_1, ..., X_n]$ が存在する．多項式環 $k[X_1, ..., X_{n+1}]$ のイデアル $J = \langle F_1, ..., F_r, FX_{n+1} - 1 \rangle$ に対して $\mathbf{V}(J) = \emptyset$ を示そう．いま $\mathbf{V}(J) \neq \emptyset$ と仮定し，$(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \in \mathbf{V}(J)$ であるとすると

$$F_1(a_1, ..., a_n) = \cdots = F_r(a_1, ..., a_n) = a_{n+1}F(a_1, ..., a_n) - 1 = 0$$

が成り立つ．このとき $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(I)$ であるが， $F \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ であるから $F(a_1, ..., a_n) = 0$ となる．これより

$$0 = a_{n+1}F(a_1, ..., a_n) - 1 = 0 - 1 = -1$$

となり矛盾が生じる．よって $\mathbf{V}(J) = \emptyset$ が成り立つ．Hilbert の弱零点定理 (定理 2.9) より $J = k[X_1, ..., X_{n+1}]$, 従って $1 \in J$ であるから,

$$1 = \sum_{i=1}^{r} F_i G_i + (FX_{n+1} - 1)H, \qquad G_i, H \in k[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$$

と表される．この等式の右辺を $k[X_1, ..., X_n]$ の分数体 $k(X_1, ..., X_n)$ 上の変数 X_{n+1} の多項式と見なして X_{n+1} に $\frac{1}{F} \in k(X_1, ..., X_n)$ を代入すると

$$1 = \sum_{i=1}^{r} F_i\, G_i(X_1, ..., X_n, \frac{1}{F})$$

が成り立つ．上式の両辺に, すべての $F^N G_i(X_1, ..., X_n, \frac{1}{F})$ が $k[X_1, ..., X_n]$ に含まれるような F^N をかけると

$$F^N = \sum_{i=1}^{r} F_i F^N G_i(X_1, ..., X_n, \frac{1}{F}) \in I$$

となるので $F \in \sqrt{I}$ が成り立つ．よって $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subseteq \sqrt{I}$ が示された． ∎

定理 2.11 $k[X_1, ..., X_n]$ の根基イデアル I に対して $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ が成り立つ．特に次の写像 $\mathbf{I}$ は全単射であり，逆写像は $\mathbf{V}$ である．

$$\mathbf{I} : \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の代数的集合}\} \ni V \mapsto \mathbf{I}(V) \in \{k[X_1..., X_n] \text{ の根基イデアル}\}$$

$$\mathbf{V} : \{k[X_1..., X_n] \text{ の根基イデアル}\} \ni S \mapsto \mathbf{V}(S) \in \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の代数的集合}\}$$

Proof　I が根基イデアルのとき Hilbert の零点定理 (定理2.10) より $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I} = I$ が成り立つ．これより写像 $\mathbf{I}$ が全射であることがわかる．単射であることは定理2.2で示したので，$\mathbf{I}$ は全単射である．また p.25, (8) より $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ となるので $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{V}$ が成り立つ．∎

定理2.7より，V が既約な代数的集合であることと $\mathbf{I}(V)$ が素イデアルであることは同値であるから，$\mathbf{I}$ は次の全単射を誘導する．

$$\mathbf{I} : \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の既約な代数的集合}\} \longmapsto \{k[X_1..., X_n] \text{ の素イデアル}\}$$

また k が代数的閉体であるから，定理1.6より極大イデアル M は $M = \langle X_1-a_1, ..., X_n-a_n\rangle$ と表されるので，$\mathbf{I}$ は次の全単射も誘導する．

$$\mathbf{I} : \mathbb{A}^n(k) \ni (a_1, ..., a_n) \mapsto \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle \in \{k[X_1..., X_n] \text{ の極大イデアル}\}$$

以上を次の定理にまとめておく．

定理 2.12 定理2.11の全単射 $\mathbf{I}$ は次の2つの全単射を誘導する．

$$\mathbf{I} : \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の既約な代数的集合}\} \longmapsto \{k[X_1..., X_n] \text{ の素イデアル}\}$$

$$\mathbf{I} : \mathbb{A}^n(k) \ni (a_1, ..., a_n) \mapsto \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle \in \{k[X_1..., X_n] \text{ の極大イデアル}\}$$

定理 2.13 $k[X_1, ..., X_n]$ の真のイデアル I に対して，次を満たす素イデアル $P_1, ..., P_m$ が一意に存在する．

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_m, \qquad P_i \not\subseteq P_j \ \ (i \neq j)$$

Proof　I が真のイデアルであることから $V = \mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ である．このとき定理2.8より

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m, \qquad V_i \not\subseteq V_j \ \ (i \neq j)$$

を満たす既約な代数的集合 $V_1, ..., V_m$ が一意に存在する. 写像 $\mathbf{I}$ を施すと

$$\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_1) \cap \cdots \cap \mathbf{I}(V_m), \qquad \mathbf{I}(V_i) \not\supseteq \mathbf{I}(V_j) \ (i \neq j)$$

が得られる. $\mathbf{I}(V_i) = P_i$ とおけば P_i は素イデアルで

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_m, \qquad P_i \not\subseteq P_j \ (i \neq j)$$

を満たす. 次に素イデアル Q_i で

$$\sqrt{I} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell, \qquad Q_i \not\subseteq Q_j \ (i \neq j)$$

を満たすものがあったとする. 写像 $\mathbf{V}$ を施すと

$$V = \mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(Q_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(Q_\ell), \qquad \mathbf{V}(Q_i) \not\supseteq \mathbf{V}(Q_j) \ (i \neq j)$$

が得られる. $\mathbf{V}(Q_i)$ は既約な代数的集合であるから定理 2.8 より $\ell = m$ で, 適当に番号を付け替えると $\mathbf{V}(Q_i) = V_i$ となる. このとき

$$\mathbf{I}\left(\mathbf{V}(Q_i)\right) = \mathbf{I}(V_i) \implies Q_i = P_i$$

となるので一意性が示された. ∎

2.4 アフィン多様体

$\mathbb{A}^n(k)$ の既約な代数的集合をアフィン閉部分多様体, アフィン多様体, または単に閉部分多様体という. この論文では閉部分多様体と呼ぶことにする. 既約多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$ により $V = \mathbf{V}(F)$ と表される V を超曲面という. $\langle F \rangle$ は素イデアルであるから超曲面は閉部分多様体である. $\mathbb{A}^2(k)$ の超曲面を平面曲線, $\mathbb{A}^3(k)$ の超曲面を曲面という.

代数的集合 V に対して剰余環

$$O(V) := k[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V)$$

を V の座標環という. V が閉部分多様体のとき $O(V)$ は整域である.

写像 $f : V \mapsto k$ が代数的集合 V 上の多項式関数であるとは, 任意の $(a_1, ..., a_n) \in V$

に対して

$$f(a_1, ..., a_n) = F(a_1, ..., a_n)$$

となる多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$ が存在するときにいう． f を F で定まる多項式関数という． V 上の多項式関数全体を $\mathcal{P}(V)$ と表すことにする．

代数的集合 V から k への写像全体はよく知られているように可換環の構造を持ち, 多項式関数全体 $\mathcal{P}(V)$ はその部分環である．また多項式を多項式関数に対応させる写像

$$k[X_1, ..., X_n] \ni F \mapsto f \in \mathcal{P}(V)$$

は k 代数としての全射準同型であり, その核は $\mathbf{I}(V)$ である．これより次の定理を得る．なお, 以下において k 代数としての準同型, 同型をそれぞれ k 準同型, k 同型という．

定理 2.14 代数的集合 V 上の多項式関数全体のなす環 $\mathcal{P}(V)$ と V の座標環 $O(V)$ は k 同型である．

$\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V, W に対して $W \subseteq V$ であるとき W は V の閉部分多様体であるという．閉部分多様体 V と代数的集合 $W \subseteq V$ に対して

$$\mathbf{I}_V(W) := \{\bar{F} \in O(V) \mid \text{任意の } A \in W \text{ に対して } F(A) = 0\}$$

を V における W のイデアルという．また閉部分多様体 V と $O(V)$ のイデアル I に対して

$$\mathbf{V}_V(I) := \{A \in V \mid \text{任意の} \bar{F} \in I \text{ に対して } F(A) = 0\}$$

と定義する．自然な準同型 $\pi : k[X_1, ..., X_n] \mapsto O(V)$ により

$$\pi(\mathbf{I}(W)) = \mathbf{I}_V(W), \qquad \mathbf{V}(\pi^{-1}(I)) = \mathbf{V}_V(I)$$

が成り立つ．また定理 2.14 より $O(V) \simeq \mathcal{P}(V)$ であるから, $O(V)$ と $\mathcal{P}(V)$ を同一視し

$$\mathbf{I}_V(W) = \{f \in O(V) \mid \text{任意の } A \in W \text{ に対して } f(A) = 0\}$$
$$\mathbf{V}_V(I) = \{A \in V \mid \text{任意の } f \in I \text{ に対して } f(A) = 0\}$$

のように見なすことがある．

定理 2.11 の全単射 $\mathbf{I}$ は V に含まれる代数的集合 W を $\mathbf{I}(V)$ を含む根基イデアル $\mathbf{I}(W)$ に対応させる． $\mathbf{I}(W)$ は自然に $O(V)$ の根基イデアルと見なせるので $\mathbf{I}$ は次の全単射を

誘導する.

$$\mathbf{I} : \{V \text{ に含まれる代数的集合}\} \quad \longmapsto \quad \{O(V) \text{ の根基イデアル}\}$$

I が閉部分多様体を素イデアルに, 1 点を極大イデアルに移すことに注意すれば次の定理を得る. ただし 1 点からなる集合は 1 点と同一視する.

定理 2.15 定理 2.11 の全単射 **I** は次の 3 つの全単射を誘導する.

$$\begin{array}{llcl} \mathbf{I} : & \{V \text{ に含まれる代数的集合}\} & \longmapsto & \{O(V) \text{ の根基イデアル}\} \\ \mathbf{I} : & \{V \text{ に含まれる閉部分多様体}\} & \longmapsto & \{O(V) \text{ の素イデアル}\} \\ \mathbf{I} : & \quad V & \longmapsto & \{O(V) \text{ の極大イデアル}\} \end{array}$$

定理 2.16 V を $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体, W を V の閉部分多様体とする. このとき次の写像は上への k 準同型であり, k 同型 $O(V)/\mathbf{I}_V(W) \simeq O(W)$ を導く.

$$\mathcal{P}(V) \ni f \quad \longmapsto \quad f|_W \in \mathcal{P}(W)$$

Proof　$f|_W$ が W の多項式関数であること, および

$$(f+g)|_W = f|_W + g|_W, \quad (fg)|_W = (f|_W)(g|_W)$$

は明らかである. また $a \in k$ による定数関数 $a \in \mathcal{P}(V)$ に対して $a|_W$ は a による W 上の定数関数であるので, この対応は k の元を不変にする. さらに, $g \in \mathcal{P}(W)$ が多項式 F から定まるとき, F から定まる V 上の多項式関数 f の W への制限 $f|_W$ が g に一致するので, この対応は上への k 準同型である. $\mathcal{P}(*)$ と $O(*)$ の同一視をすると, この準同型の核が $\mathbf{I}_V(W)$ であることも容易に確認できる. よって準同型定理より $O(V)/\mathbf{I}_V(W) \simeq O(W)$ が得られる. ∎

$\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V と $\mathbb{A}^m(k)$ の閉部分多様体 W に対して写像 $\varphi : V \mapsto W$ が多項式写像であるとは, $T_1, ..., T_m \in k[X_1, ..., X_n]$ が存在して, 任意の $A \in V$ に対して

$$\varphi(A) = (T_1(A), ..., T_m(A))$$

が成り立つときにいう. φ を $T = (T_1, ..., T_m)$ が定める多項式写像ということもある. また多項式写像 $\varphi : V \mapsto W$ が同型写像であるとは, 多項式写像 $\psi : W \mapsto V$ が存在して

$$\varphi\psi = \mathrm{id}_W, \quad \psi\varphi = \mathrm{id}_V$$

であるときにいう．ただし $\mathrm{id}_W, \mathrm{id}_V$ はそれぞれ W, V の恒等写像である．

定理 2.17 V を $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体, W を $\mathbb{A}^m(k)$ の閉部分多様体とし，$\varphi : V \mapsto W$ を多項式写像とする．多項式関数 $f \in \mathcal{P}(W)$ に対して $\varphi^*(f) : V \mapsto k$ を

$$\varphi^*(f)(A) = (f\varphi)(A) = f(\varphi(A)) \qquad (A \in V)$$

と定めると，$\varphi^*(f)$ は V 上の多項式関数である．

Proof　φ は多項式写像であるから, 任意の $A \in V$ に対して $\varphi(A) = (T_1(A), ..., T_m(A))$ となる $T_1, ..., T_m \in k[X_1, ..., X_n]$ が存在する．また f は W 上の多項式関数であるから, 任意の $B \in W$ に対して $F(B) = f(B)$ となる $F \in k[X_1, ..., X_m]$ が存在する．このとき任意の $A \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi^*(f)(A) &= f(T_1(A), ..., T_m(A)) = F(T_1(A), ..., T_m(A)) \\ &= (F(T_1, ..., T_m))(A)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$F(T_1, ..., T_m) = F(T_1(X_1, .., X_n), ..., T_m(X_1, ..., X_n)) \in k[X_1, ..., X_n]$$

であるから $\varphi^*(f) \in \mathcal{P}(V)$ となる．∎

$\varphi^*(f) \in \mathcal{P}(V)$ を φ による f の引き戻しという．

定理 2.18 V を $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体，W を $\mathbb{A}^m(k)$ の閉部分多様体，$\varphi : V \mapsto W$ を多項式写像とする．多項式関数 $f \in \mathcal{P}(W)$ に，φ による引き戻しを対応させる写像 $\varphi^* : \mathcal{P}(W) \ni f \longmapsto \varphi^*(f) \in \mathcal{P}(V)$ は k 準同型である．

Proof　$f, g \in \mathcal{P}(W)$ に対して

$$\varphi^*(f+g) = \varphi^*(f) + \varphi^*(g), \quad \varphi^*(fg) = \varphi^*(f)\varphi^*(g)$$

は容易に確かめることができる．また $c \in k$ による W の定数関数が，c による V の定数関数に対応するので，φ^* は k 準同型である．∎

k 準同型 $\varphi^* : \mathcal{P}(W) \mapsto \mathcal{P}(V)$ を φ による引き戻し写像という．同一視 $\mathcal{P}(V) \simeq O(V)$, $\mathcal{P}(W) \simeq O(W)$ により $\varphi^* : O(W) \mapsto O(V)$ と見なすことができる．恒等写像 id_V による引き戻し写像 $\mathrm{id}^* : O(V) \mapsto O(V)$ が恒等写像であることは明らかである．

定理 2.19 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $U \subseteq \mathbb{A}^\ell(k)$ を閉部分多様体とする．このとき多項式写像 $\varphi : V \mapsto W$, $\psi : W \mapsto U$ に対して合成写像 $\psi\varphi$ も多項式写像で $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$ が成り立つ．

Proof　$\psi\varphi$ が多項式写像であることは明らかである．任意の $f \in \mathcal{P}(U)$ に対して

$$(\varphi^*\psi^*)(f) = \varphi^*(\psi^*(f)) = \varphi^*(f\psi) = (f\psi)\varphi = f(\psi\varphi) = (\psi\varphi)^*(f)$$

となるので $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$ が成り立つ． ∎

定理 2.20　$V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ をそれぞれ閉部分多様体とするとき次の写像は全単射である．

$$\Phi : \{V \mapsto W \mid \text{多項式写像}\} \ni \varphi \mapsto \varphi^* \in \{O(W) \mapsto O(V) \mid k\,\text{準同型}\}$$

また φ が同型写像である条件は φ^* が k 同型となることである．

Proof　まず Φ が全射であることを示す．

$$O(V) = k[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V), \qquad O(W) = k[Y_1, ..., Y_m]/\mathbf{I}(W)$$

とおき，k 準同型 $\alpha : O(W) \mapsto O(V)$ を任意に選ぶ．$\overline{Y_i} \in O(W)$ に対して $\alpha(\overline{Y_i}) = \overline{T_i}$ とおく．$T_1, ..., T_m \in k[X_1, ..., X_n]$ である．T_i から定まる多項式写像 φ を

$$\varphi = (T_1, ..., T_m) : V \ni A \longmapsto \varphi(A) = (T_1(A), ..., T_m(A)) \in \mathbb{A}^m(k)$$

とする．任意の $G \in \mathbf{I}(W)$ に対して，$G(\overline{Y_1}, ..., \overline{Y_m}) = \overline{0}$ であり, α は k 準同型であるから

$$G(\overline{T_1}, ..., \overline{T_m}) = \alpha(G(\overline{Y_1}, ..., \overline{Y_m})) = \alpha(\overline{0}) = \overline{0}$$

より $G(\overline{T_1}(A), ..., \overline{T_m}(A)) = 0$ となる．$G \in \mathbf{I}(W)$ は任意であったから

$$\varphi(A) = (T_1(A), ..., T_m(A)) \in \mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) = W$$

が成り立つ. ゆえに φ は V から W への多項式写像である．φ による引き戻し写像 φ^* は

$$\varphi^*(\overline{Y_i}) = \overline{Y_i} \cdot \varphi = \overline{T_i} = \alpha(\overline{Y_i})$$

を満たすので, $\overline{Y_i}$ が $O(W)$ を生成することに注意すれば $\varphi^* = \alpha$ であることがわかる．ゆえに Φ は全射である．

次に Φ が単射であることを示す． φ_1, φ_2 を V から W への異なる多項式写像とする．このときある $A \in V$ に対して $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$ である． $\varphi_1(A)$ に対応する $O(W)$ の極大イデアルを M とすると $\mathbf{I}_V(M)$ は $\varphi_1(A)$ のみからなるので, ある $f \in M$ が存在して $f(\varphi_2(A)) \neq 0$ となる．このとき

$$\varphi_1^*(f)(A) = f(\varphi_1(A)) = 0,\ \varphi_2^*(f)(A) = f(\varphi_2(A)) \neq 0 \implies \varphi_1^* \neq \varphi_2^*$$

となるので Φ は単射である．以上で Φ が全単射であることが示された．

後半の主張について，まず $\varphi : V \mapsto W$ を同型写像とすると，多項式写像 $\psi : W \mapsto V$ が存在して

$$\psi\varphi = \mathrm{id}_V, \quad \varphi\psi = \mathrm{id}_W$$

が成り立つ. このとき

$$\varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^* = (\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{O(V)}, \qquad \psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^* = (\mathrm{id}_W)^* = \mathrm{id}_{O(W)}$$

となるので φ^* は k 同型である.

最後に $\varphi^* : O(W) \mapsto O(V)$ が k 同型であると仮定する． Φ が全射であるから φ^* の逆写像は多項式写像 $\psi : W \mapsto V$ の引き戻し写像 $\psi^* : O(V) \mapsto O(W)$ として得られ

$$\psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^* = \mathrm{id}_{O(W)}, \qquad \varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^* = \mathrm{id}_{O(V)}$$

が成り立つ．ここで Φ は単射であり,

$$(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{O(V)}, \qquad (\mathrm{id}_W)^* = \mathrm{id}_{O(W)}$$

であるから

$$\varphi\psi = \mathrm{id}_W, \qquad \psi\varphi = \mathrm{id}_V$$

が成り立つ．従って φ は同型写像である． ∎

定理 2.21 k 上有限生成な整域 R に対して, $R \simeq O(V)$ (k 同型) を満たす $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V が同型を除いて一意に存在する.

Proof R が k 上 n 個の元で生成されるとすると, 全射準同型

$$k[X_1, ..., X_n] \mapsto R$$

が存在する. この核を I とおくと, I は素イデアルで k 同型 $k[X_1, ..., X_n]/I \simeq R$ が得られる. R は単位元を含むので I は真のイデアルで, $\mathbf{V}(I)$ は $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体となり, $O(V) = k[X_1, ..., X_n]/I \simeq R$ が成り立つ.

V の一意性については, $O(V) \simeq O(V')$ となる閉部分多様体 V' があるとすると, 定理 2.20 より同型な多項式写像 $V \mapsto V'$ が存在することになるので, V と V' は同型である. ∎

2.5 有理関数

閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ の座標環 $O(V)$ の分数体を V の関数体といい, $k(V)$ で表す. また $k(V)$ の元を V 上の有理関数という.

$$k(V) = \left\{ \frac{g}{h} \,\middle|\, g, h \in O(V), h \neq 0 \right\}$$

有理関数 f が点 $A \in V$ で定義されるとは, ある $g, h \in O(V)$, $h(A) \neq 0$, が存在して

$$f = \frac{g}{h},$$

と表されるときにいう. f が定義されない V の点を f の極という. A で定義される有理関数全体を

$$O_A(V) := \{f \in k(V) \mid f \text{ は } A \text{ で定義される }\}$$

とおく. $f \in O_A(V)$ のとき, 点 A での f の値 $f(A)$ を

$$f(A) = \frac{g(A)}{h(A)} \qquad (h(A) \neq 0)$$

で定義する. これは well-defined である. なぜならば

$$f = \frac{g'}{h'} \qquad (h'(A) \neq 0)$$

とすると, 分数体の定義から $gh' = hg'$ となり

$$\frac{g(A)}{h(A)} = \frac{g'(A)}{h'(A)}$$

が成り立つからである. $f(A) = 0$ のとき A を f の零点という. A を零点に持つ有理関数全体を

$$\mathrm{m}_A(V) := \{f \in O_A(V) \mid f(A) = 0\}$$

とおく. さらに V 上の有理関数 $f \in k(V)$ に対して

$$Z_f := \{f \text{ の極}\}, \qquad J_f := \{H \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \bar{H} f \in O(V)\}$$

とおく. ここで $\bar{H} \in O(V) = k[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V)$ である.

定理 2.22 有理関数 $f \neq 0$ の零点は $\frac{1}{f}$ の極である.

Proof　A が f の零点のとき

$$f = \frac{g}{h}, \qquad h(A) \neq 0,\ \ g(A) = 0$$

となる $g, h \in O(V)$ が存在する. $f \neq 0$ より $\frac{1}{f} \neq 0$ であるが, A が $\frac{1}{f}$ の極でないとすると

$$\frac{1}{f} = \frac{h'}{g'}, \qquad g'(A) \neq 0$$

となる $g', h' \in O(V)$ が存在する. このとき

$$f = \frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \quad \Longrightarrow \quad g(A)h'(A) - h(A)g'(A) = -h(A)g'(A) = 0$$

となり矛盾が生じる. よって A は $\frac{1}{f}$ の極である. ∎

f の極が $\frac{1}{f}$ の零点になるとは限らない. 例えば閉部分多様体 $\mathbf{A}^2(k)$ 上の有理関数 $f = \frac{y}{x}$ は原点 $(0, 0)$ を極に持つが, 原点は $\frac{1}{f}$ の極でもある. 一般に f の極は $\frac{1}{f}$ の零点か極のいずれかである.

補題 2.23 $\mathbf{V}(J_f) = Z_f$ である. 特に Z_f は代数的集合である.

Proof　$A \in \mathbf{V}(J_f)$ とする. 任意の

$$f = \frac{g}{h} \qquad (g, h \in O(V), h \neq 0)$$

なる表示に対して，$h = \bar{H}$ となる多項式 H は $\bar{H}f \in O(V)$ を満たすので J_f の元である．$A \in \mathbf{V}(J_f)$ であるから $h(A) = H(A) = 0$ となる．従って f は A で定義できず，$A \in Z_f$ が成り立つ．逆に $A \in Z_f$ とする．このとき 任意の $H \in J_f$ に対して，$H \in \mathbf{I}(V)$ のときは明らかに $H(A) = 0$ であり，$H \notin \mathbf{I}(V)$ のときは

$$f = \frac{g}{\bar{H}}, \qquad g \in O(V)$$

と表されるので，f が A で定義されないことから $H(A) = 0$ となる．よって $A \in \mathbf{V}(J_f)$ が成り立つ．以上で $\mathbf{V}(J_f) = Z_f$ が示された． ∎

定理 2.24 f を閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ 上の有理関数とすると $Z_f \subsetneq V$ が成り立つ．

Proof　f は $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in O(V)$, $h \neq 0$ と表される．$h \neq 0$ より h はある点 $A \in V$ で $h(A) \neq 0$ となる．このとき f は A で定義されるので $A \notin Z_f$ が成り立つ．よって $Z_f \subsetneq V$ が示された． ∎

定理 2.25 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体とすると次が成り立つ．

$$O(V) = \bigcap_{A \in V} O_A(V)$$

Proof　$O(V)$ の元は V のすべての点で定義されるので $O(V) \subseteq \bigcap_{A \in V} O_A(V)$ が成り立つ．逆に $f \in \bigcap_{A \in V} O_A(V)$ とすると，$\mathbf{V}(J_f) = Z_f = \emptyset$ であるから，定理 2.9 より $J_f = k[X_1, ..., X_n]$ となる．これより $f = \bar{1} \cdot f \in O(V)$ が得られる．よって $O(V) \supseteq \bigcap_{A \in V} O_A(V)$ も成り立つ．以上で定理が証明された． ∎

定理 2.26 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体，$A \in V$ とする．このとき $f \in O_A(V)$ に対して次の (1), (2) は同値である．

(1)　f は可逆である．

(2)　$f(A) \neq 0$ である．

特に $\mathrm{m}_A(V) = O_A(V) - O_A(V)^\times$ が成り立つ．

Proof　(1) $\Rightarrow$ (2)　　$f \in O_A(V)$ が可逆であるとすると，ある $g \in O_A(V)$ が存在して $fg = 1$ が成り立つ．このとき $(fg)(A) = 1(A) = 1$ であるから $f(A) \neq 0$ が成り立つ．

(2) $\Rightarrow$ (1)　$f(A) \neq 0$ とする．$f \in O_A(V)$ であるから

$$f = \frac{g}{h}, \qquad h(A) \neq 0$$

となる $g, h \in O(V)$ が存在する．$f(A) \neq 0$ より $g(A) \neq 0$ となるから, $g \neq 0$ でもあるので有理関数

$$\frac{h}{g}$$

が A で定義され, 従って $\frac{h}{g} \in O_A(V)$ が成り立つ．これが f の逆元であることが容易に確かめられるので f は可逆である．

$f \in O_A(V)$ について

$$f \in \mathrm{m}_A(V) \iff f(A) = 0 \iff f \text{ が可逆でない} \iff f \in O_A(V) - O_A(V)^\times$$

であるから $\mathrm{m}_A(V) = O_A(V) - O_A(V)^\times$ が成り立つ．∎

可換環 R の非可逆元全体 M がイデアルをなすとき R を局所環という．このとき M は R の唯一つの極大イデアルである．詳細は参考文献 [4, §25.2], [5, 定理 25.1] を参照されたい．

定理 2.27　$V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体，$A \in V$ とする．このとき $O_A(V)$ は局所環である．

Proof　$\mathrm{m}_A(V)$ は $O_A(V)$ のイデアルであり, 定理 2.26 より

$$\mathrm{m}_A(V) = O_A(V) - O_A(V)^\times$$

が成り立つ．真のイデアルは可逆元を含まないので, すべてが $\mathrm{m}_A(V)$ に含まれる．従って $\mathrm{m}_A(V)$ は $O_A(V)$ の非可逆元全体と一致するので, $O_A(V)$ は局所環である．∎

$O_A(V)$ を V の点 A での局所環という．

定理 2.28 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体，$A \in V$ とし，$\mathrm{m}_A = \{f \in O(V) \mid F(A) = 0\}$ とおくと次が成り立つ．

(1)　$O(V)/\mathrm{m}_A \simeq k$ であり，m_A は $O(V)$ の極大イデアルである．

(2)　$O_A(V)$ は $O(V)$ の m_A における局所化と同型である．

Proof (1) 準同型 $\varphi_A : O(V) \ni f \mapsto f(A) \in k$ は全射で, その核が m_A であるから $O(V)/\mathrm{m}_A \simeq k$ が成り立つ. 特に m_A は $O(V)$ の極大イデアルである.

(2) $O(V)$ が整域であることから, $O(V)$ の m_A における局所化の元と $O_A(V)$ の元が自然に１対１に対応し, 同型を導く. ∎

一般に整域 R の積閉集合 $S\,(\not\ni 0)$ による局所化 $S^{-1}R$ は R の分数体に含まれる次の部分整域に同型である.

$$\left\{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\right\}$$

また S と交わらない R の素イデアル I に対して $S^{-1}I \cap R = I$ が成り立つ. 従って入射 $R \mapsto S^{-1}R$ と自然準同型 $S^{-1}R \mapsto S^{-1}R/S^{-1}I$ の合成の核が I に一致するので R/I は $S^{-1}R/S^{-1}I$ の部分整域と見なすことができる. 特に I が R の極大イデアルのときは任意の $s \in S$ に対して

$$Rs + I = R$$

が成り立つので同型 $R/I \simeq S^{-1}R/S^{-1}I$ が得られる. 以上から $O_A(V)$ を $O(V)$ の m_A における局所化と同一視することができる. また次の環同型が成り立つ.

$$O(V)/\mathrm{m}_A \simeq O_A(V)/\mathrm{m}_A(V) \simeq k \tag{2.2}$$

同様に, 任意の $f \in O(V) - \mathrm{m}_A$ に対して

$$\langle f \rangle + {\mathrm{m}_A}^2 = O(V)$$

が成り立つことから次の環同型が得られる.

$$O(V)/{\mathrm{m}_A}^2 \simeq O_A(V)/\mathrm{m}_A(V)^2$$

これより $O(V)$ 加群としての次の同型が得られる.

$$\mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2 \simeq \mathrm{m}_A(V)/\mathrm{m}_A(V)^2 \tag{2.3}$$

定理 2.29 閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, 点 $A \in V$ に対して $O_A(V)$ はネーター局所整域である.

Proof $O_A(V)$ は定理 2.27 より局所環であり, $k(V)$ の部分環であることから整域である. また, ネーター環 $O(V)$ の局所化であるからネーター環でもある ([4, 問 29.10]). よって $O_A(V)$ はネーター局所整域である. ∎

$V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ を閉部分多様体, $\varphi : V \mapsto W$ を多項式写像とする. $A \in V$, $h \in O(W) - \mathrm{m}_{\varphi(A)}$ のとき

$$\varphi^*(h)(A) = h(\varphi(A)) \neq 0$$

である. 従って $O_{\varphi(A)}(W)$ の元

$$f = \frac{g}{h}, \qquad g, h \in O(W), h(\varphi(A)) \neq 0$$

を φ^* で移した $\dfrac{\varphi^*(g)}{\varphi^*(h)}$ は $O_A(V)$ の元となる. ここで φ_A^* を

$$\varphi_A^* : O_{\varphi(A)}(W) \ni \frac{g}{h} \quad \longmapsto \quad \frac{\varphi^*(g)}{\varphi^*(h)} \in O_A(V)$$

と定めると, $\varphi^* : O(W) \mapsto O(V)$ が k 準同型であることから, φ_A^* が well-defined であること, k 準同型であることが確かめられる. また $O_{\varphi(A)}(W)$ の元が $O(W)$ の元の商として表されることから, k 準同型 $\psi : O_{\varphi(A)}(W) \mapsto O_A(V)$ で $\psi|_{O(W)} = \varphi^*$ となるものが φ_A^* に限ることがわかる.

定理 2.30 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体, $F \in k[X_1, \ldots, X_n] - \mathbf{I}(V)$, $f = \bar{F} \in O(V)$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\widetilde{V} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V) \cup \{X_{n+1}F - 1\})$ は $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ の閉部分多様体である.

(2) $O(V)_f \simeq O(\widetilde{V})$ である. ただし $O(V)_f$ は積閉集合 $\{f^m\}_{m=0,1,2,\ldots}$ による $O(V)$ の局所化である.

(3) $O_{\varphi(A)}(V) \simeq O_A(\widetilde{V})$ (k 同型) である. ただし $A \in \widetilde{V}$, $\varphi : \widetilde{V} \ni (a_1, ..., a_{n+1}) \mapsto (a_1, ..., a_n) \in V$ は多項式写像である.

Proof (1) $O(V)_f$ は有理関数体 $k(V)$ の部分整域であり, $O(V)$ に $\frac{1}{f}$ を添加して得られる. すなわち $O(V)_f = O(V)[\frac{1}{f}]$ である. 準同型

$$O(V)[X_{n+1}] \ni G(X_{n+1}) \longmapsto G\left(\frac{1}{f}\right) \in O(V)_f$$

は全射準同型であり, その核が単項イデアル $\langle fX_{n+1} - 1 \rangle$ であることは容易に確かめられる. ここで準同型 $k[X_1, ..., X_n] \mapsto O(V)$ から生じる全射準同型

$$k[X_1, ..., X_n][X_{n+1}] \mapsto O(V)[X_{n+1}]$$

との合成

$$k[X_1, ..., X_n][X_{n+1}] \mapsto O(V)[X_{n+1}] \mapsto O(V)_f$$

は全射準同型

$$k[X_1, ..., X_n][X_{n+1}] \ni \sum_i G_i(X_1, ..., X_n)X_{n+1}^i \mapsto \sum_i \overline{G_i}\left(\frac{1}{f}\right)^i \in O(V)_f$$

となり, その核は

$$I = \langle \mathbf{I}(V), X_{n+1}F - 1\rangle = \mathbf{I}(V)k[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}] + \langle X_{n+1}F - 1\rangle$$

である. 準同型定理から

$$k[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]/I \simeq O(V)_f$$

が成り立つので I は素イデアルであり, $\widetilde{V} = \mathbf{V}(I)$ は閉部分多様体である.

(2)　上で定めた I は素イデアルであるから, $\mathbf{I}(\widetilde{V}) = \sqrt{I} = I$ が成り立つ. 従って (1) で示したことから

$$O(\widetilde{V}) = k[X_1, ..., X_{n+1}]/I \simeq O(V)_f$$

が成り立つ. このとき次の写像 ψ が全単射であることを注意しておく (矢印の向きに注意).

$$\psi : O(\widetilde{V}) \ni \sum_i \overline{G_i(X_1, ..., X_n)X_{n+1}^i} \longleftarrow \sum_i \overline{G_i}\left(\frac{1}{f}\right)^i \in O(V)_f \tag{2.4}$$

(3)　$A \in \widetilde{V}$ とすると, 定理の前に説明したように多項式写像

$$\varphi : \widetilde{V} \ni \left(a_1, \ldots, a_n, \frac{1}{f(a_1, \ldots, a_n)}\right) \quad\longmapsto\quad (a_1, \ldots, a_n) \in V$$

から生じる k 準同型 $\varphi^* : O(V) \mapsto O(\widetilde{V})$ は k 準同型

$$\varphi_A^* : O_A(\widetilde{V}) \quad\longleftarrow\quad O_{\varphi(A)}(V)$$

を誘導する. $\varphi(A) \in V - \mathbf{V}_V(f)$ より $O(V)_f \subseteq O_{\varphi(A)}(V)$ となるので φ_A^* は k 準同型 $O(V)_f \mapsto O_A(\widetilde{V})$ を引き起こすが, 任意の $g \in O(V)_f$ に対して

$\varphi_A^*(g) = \psi(g)$ が容易に確かめられる．従って

$$\varphi_A^* : O(\widetilde{V}) \longleftarrow O(V)_f$$

は k 同型である．これより φ_A^* は分数体の同型 $k(\widetilde{V}) \simeq k(V)$ を導き, 定理の前の説明と同様にして $O_A(\widetilde{V}) \simeq O_{\varphi(A)}(V)$ が得られる． ∎

2.6 アフィン多様体の次元

閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ の次元 $\dim V$ を

$$\dim V := \mathrm{tr.deg}_k k(V)$$

と定義する． $\dim V = 1$ のときアフィン曲線, $\dim V = 2$ のときアフィン曲面という．また $k \subseteq R$ である 整域 R に対して R の分数体の k 上の超越次数を $\mathrm{tr.deg}_k\, R$ と表す．

定理 2.31 $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V に対して次の (1) と (2) は同値である．

(1) V は 1 点集合である．

(2) $\dim V = 0$

Proof (1) $\Rightarrow$ (2) $V = \{(a_1, ..., a_n)\}$ のとき定理 2.12 より

$$\mathbf{I}(V) = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$$

となり $k(V) = k[X_1..., X_n]/\mathbf{I}(V) \simeq k$ となるので $\mathrm{tr.deg}_k k(V) = 0$ が成り立つ．

(2) $\Rightarrow$ (1) k が代数的閉体であることに注意すると

$$\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr.deg}_k k(V) = 0 \Leftrightarrow k(V)/k \text{ は代数拡大である} \Leftrightarrow k(V) = k$$

が成り立つので $\mathbf{I}(V)$ は $k[X_1, ..., x_n]$ の極大イデアルとなる．従って定理 2.12 より V は 1 点集合である． ∎

定理 2.32 $\mathbb{A}^n(k)$ の曲線 V に対して， $W \subsetneq V$ を満たす代数的集合 W は有限個の点からなる．

Proof　$W=\emptyset$ のときは明らかであるから，$W \subsetneq V, W \neq \emptyset$ とする．このとき定理 2.8 より $W = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ となる既約な代数的集合 $W_1, \ldots, W_m$ が存在する．従って W が既約な代数的集合の場合に示せばよい．

$W \subsetneq V$ であるから $\mathbf{I}_V(V) \subsetneq \mathbf{I}_V(W)$ が成り立つ．従って $\mathbf{I}_V(W)$ に 0 でない元 f が存在する．いま f が k 上代数的であると仮定すると，$k(f)/k$ は代数拡大となる．k は代数的閉体であるから $k(f) = k$ となる．従って $f \in k$ より，f は定数となるが，これは f が W の上で 0，V のある点 A に対して $f(A) \neq 0$ となることに矛盾する．よって $f \in O(V)$ は k 上超越的である．

$\dim V = 1$ であることから，$k(V)/k(f)$ は代数拡大である．任意に $g \in O(V)$, $g \neq 0$ を選ぶと，f, g は k 上代数的従属であるから $F(f, g) = 0$ となる多項式 $F \in k[X_1, X_2]$, $F \neq 0$ が存在する．このような多項式の中で次数が最小のものを選び, 改めて F とおき

$$F(X_1, X_2) = F_0(X_2) + F_1(X_2)X_1 + \cdots + F_d(X_2)X_1^d$$

とする．$F_0(X_2) = 0$ ならば

$$F(X_1, X_2) = X_1(F_1(X_2) + \cdots + F_d(X_2)X_1^{d-1}) = X_1G_1(X_1, X_2)$$

となるが，$F(f, g) = fG_1(f, g) = 0$，$f \neq 0$ かつ $O(V)$ が整域であることから $G_1(f, g) = 0$ となる．$F \neq 0$ より $G_1 \neq 0$ となり，$\deg G_1 < \deg F$ より F の選び方に矛盾する．従って $F_0(X_2) \neq 0$ が成り立つ．これより $F(0, X_2) \neq 0$ であることがわかる．一方 $f \in \mathbf{I}_V(W)$ であるから

$$0 = F(f, g) \equiv F(0, g) \bmod \mathbf{I}_V(W)$$

が成り立つ．ゆえに $\bar{g} \in O(V)/\mathbf{I}_V(W) = O(W)$ は k 上代数的である．g は任意であったから $O(W)$ は k の代数拡大となり $O(W) = k$ が得られる．よって定理 2.31 より W は 1 点集合となり, 定理が証明された．■

定理 2.33 $\mathbb{A}^n(k)$ の曲線 V に対して，V 上の 有理関数 $f \neq 0$ の極および零点は有限個である．

Proof　補題 2.23, 定理 2.24 より f の極全体のなす集合 Z_f は $Z_f \subsetneq V$ を満たす代数的集合である．よって定理 2.32 より Z_f は有限集合である．一方 f の零点全体のなす集合は定理 2.22 から $\frac{1}{f}$ の極全体のなす集合に含まれるので有限集合である．■

$\mathbb{A}^n(k)$ は閉部分多様体であり，$\mathbf{I}(\mathbb{A}^n(k)) = 0$ であるから

$$O(\mathbb{A}^n(k)) = k[X_1, \ldots, X_n]/\langle 0 \rangle = k[X_1, \ldots, X_n]$$

となり，$k(\mathbb{A}^n(k)) = k(X_1, \ldots, X_n)$ が成り立つ．従って $\dim \mathbb{A}^n(k) = n$, すなわち $\mathbb{A}^n(k)$ は n 次元多様体である．

定理 2.34 既約多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$ に対して，$\mathbf{V}(F)$ は $\mathbb{A}^n(k)$ の $n-1$ 次元閉部分多様体である．

Proof　$\langle F \rangle$ は素イデアルであるから，$V = \mathbf{V}(F)$ とおくと V は閉部分多様体である．以下 $\dim V = n-1$ であることを示す．$k(X_1, ..., X_n)$ の元と見て F は k 上超越的であるから, 適当に番号を付けかえて $F, X_2, ..., X_n$ が $k(X_1, ..., X_n)$ の k 上の超越基になるようにできる．このとき $k(X_1, ..., X_n)$ は $k(F, X_2, ..., X_n)$ 上代数的であるから $k[X_1, ..., X_n]$ も $k[F, X_2, ..., X_n]$ 上代数的である．従って $k[X_1, ..., X_n]/\langle F \rangle$ は $k[F, X_2, ..., X_n]/\langle F \rangle$ 上代数的である．ゆえに

$$\mathrm{tr.deg}_k\, k[X_1, ..., X_n]/\langle F \rangle = \mathrm{tr.deg}_k\, k[F, X_2, ..., X_n]/\langle F \rangle$$

となるので $k[F, X_2, ..., X_n]/\langle F \rangle \simeq k[X_2, ..., X_n]$ に注意すれば

$$\dim V = \mathrm{tr.deg}_k\, k[X_1, ..., X_n]/\langle F \rangle = n - 1$$

が得られる． ∎

定理 2.35 $\mathbb{A}^n(k)$ の $n-1$ 次元閉部分多様体 V に対して $V = \mathbf{V}(F)$ となる既約多項式 $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ が存在する．

Proof　V が閉部分多様体であることから $\mathbf{I}(V)$ は $k[X_1, ..., X_n]$ の素イデアルである．また $\dim V = n - 1 < n = \dim \mathbb{A}^n(k)$ より $V \subsetneq \mathbb{A}^n(k)$ となるので定理 2.2 より $\mathbf{I}(V) \supsetneq \mathbf{I}(\mathbb{A}^n(k)) = 0$ が得られる．$\mathbf{I}(V)$ の 0 でない多項式は既約多項式に分解され, $\mathbf{I}(V)$ が素イデアルであることから，1 つの既約多項式 F が $\mathbf{I}(V)$ に含まれる．

$\langle F \rangle$ は素イデアルであるから $O(F) = k[X_1, \ldots, X_n]/\langle F \rangle$ は整域で, 定理 2.34 より $\dim \mathbf{V}(F) = n - 1$ が成り立つ．$\langle F \rangle \subseteq \mathbf{I}(V)$ より自然な全射準同型

$$\varphi : O(F) = k[X_1, ..., X_n]/\langle F \rangle \longmapsto O(V) = k[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V)$$

が存在する．φ が同型であることを示せば $\langle F\rangle = \mathbf{I}(V)$ となり, $V=\mathbf{V}(F)$ が導かれる．

$\dim V = n-1$ より k 上代数的独立な元 $y_1,\dots,y_{n-1}\in O(V)$ が存在する．φ が全射であることから

$$\varphi(z_1)=y_1,\quad \dots,\quad \varphi(z_{n-1})=y_{n-1}$$

となる $z_1,\dots,z_{n-1}\in O(F)$ が存在する．いま $z_1,\dots,z_{n-1}$ が k 上代数的従属であると仮定すると，$n-1$ 変数多項式 $G\in k[Y_1,...,Y_{n-1}]$ が存在して $G(z_1,...,z_{n-1})=0$ となる．このとき

$$\varphi(G(z_1,...,z_{n-1}))=G(y_1,...,y_{n-1})=0$$

となるが, これは $y_1,\dots,y_{n-1}$ が k 上代数的独立であったことに矛盾する．従って $z_1,\dots,z_{n-1}$ は k 上代数的独立である．ここで $\mathrm{Ker}(\varphi)\neq 0$ と仮定すると，0 でない $z\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ が存在する．整域 $O(F)$ の分数体を $k(F)$ とすると $k(F)/k(z_1,\dots,z_{n-1})$ は代数拡大であるから z は $k(z_1,\dots,z_{n-1})$ 上代数的である．よって

$$H(z_1,\dots,z_{n-1},z)=0$$

となる多項式 $H\in k[Y_1,\dots,Y_n], H\neq 0$ が存在する．H としてこのような多項式の中で次数最小のものを選んでおく．H を z で整理して

$$H(z_1,\dots,z_{n-1},z)=H_0(z_1,\dots,z_{n-1})+H_1(z_1,\dots,z_{n-1})z+\cdots+H_d(z_1,\dots,z_{n-1})z^d$$

とする．$H_0(z_1,\dots,z_{n-1})=0$ と仮定すると，$z_1,\dots,z_{n-1}$ が k 上代数的独立であったことから $H_0(Y_1,\dots,Y_{n-1})=0$ となり，H が Y_n の倍数となる．$O(F)$ が整域であることに注意すれば H より次数の小さい $H^*=H/Y_n\neq 0$ が $H^*(z_1,\dots,z_{n-1},z)=0$ を満たすことになり，H の選び方に矛盾する．従って $H_0(z_1,\dots,z_{n-1})\neq 0$ が成り立つ．このとき

$$\varphi(H(z_1,\dots,z_{n-1},z))=H(y_1,\dots,y_{n-1},0)=H_0(y_1,\dots,y_{n-1})=0$$

となるが, これは $y_1,\dots,y_{n-1}$ が代数的独立であったことに矛盾する．以上で $\mathrm{Ker}(\varphi)=0$ であること, 従って φ が同型であることが示された． ∎

2.7 非特異アフィン多様体

閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ と点 $A \in V$ に対して, 定理 2.28 で示したように

$$\mathrm{m}_A = \{f \in O(V) \mid f(A) = 0\}$$

は $O(V)$ の極大イデアルである. 特に $V = \mathbb{A}^n(k)$ のときは

$$\mathrm{n}_A = \{G \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid G(A) = 0\}$$

と表すことにする. $O(V)$ のイデアル m_A, ${\mathrm{m}_A}^2$ を $O(V)$ 部分加群と見なすと, その剰余加群 $\mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2$ は $O(V)$ 加群であり, $k \subseteq O(V)$ より k 線型空間とも見なすことができる. ここで

$$\dim_k \mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2 = \dim V$$

が成り立つとき, V は点 A で非特異であるという. V が点 A で非特異でないとき, V は点 A で特異であるといい, このとき点 A を V の特異点という. またすべての点で非特異であるとき V は非特異であるという. V が非特異であるかどうかは V の座標環 $O(V)$ のみから定まる性質である.

定理 2.36 $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V と点 $A \in V$ に対して $\dim_k \mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2 \geq \dim V$ が成り立つ.

定理 2.36 の証明には次の定理 2.37, 2.38 を必要とする. 証明については付録 A を参照されたい. ただし閉部分多様体 Z が閉部分多様体 V に含まれるとき

$$\operatorname{codim}_V Z := \max\{r \mid Z = Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subsetneq V,\ Z_i\text{は閉部分多様体}\}$$

とおく.

定理 2.37 閉部分多様体 Z が閉部分多様体 V に含まれるとき次が成り立つ.

$$\operatorname{codim}_V Z = \dim V - \dim Z$$

定理 2.38 (Krull の標高定理) $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体, $f_1, ..., f_r \in O(V)$ とし, $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ が空でないとする. このとき $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ の既約成分 Z について $\operatorname{codim}_V Z \leq r$ が成り立つ.

定理 2.36 の証明　$\mathrm{m}_A = (f_1, ..., f_m)$ とし, $f_1, ..., f_r$ を $\mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2$ の k 基底とすると $\mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2$ は $O(V)$ 加群として $f_1, ..., f_r$ で生成される. このとき V の A での局所環 $O_A(V)$ の極大イデアル $\mathrm{m}_A(V)$ に対して $\mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2 \simeq \mathrm{m}_A(V)/\mathrm{m}_A(V)^2$ より, $\mathrm{m}_A(V)/\mathrm{m}_A(V)^2$ も $O_A(V)$ 加群として $f_1, ..., f_r$ で生成される. $O_A(V)$ の根基 (極大イデアルすべての共通部分) が $\mathrm{m}_A(V)$ に一致するから, 中山の補題 (定理 1.7) が適用できて, $O_A(V)$ 加群として

$$\mathrm{m}_A(V) = O_A(V)f_1 + \cdots + O_A(V)f_r + \mathrm{m}_A(V)^2 = O_A(V)f_1 + \cdots + O_A(V)f_r$$

が成り立つ. 従って

$$f_j \in O(V)\frac{f_1}{g} + \cdots + O(V)\frac{f_r}{g}, \qquad j = r+1, ..., m.$$

となる $g \in O(V)$, $g(A) \neq 0$ が存在する. これより

$$(V - \mathbf{V}_V(g)) \cap \mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r) = \{A\}$$

が閉部分多様体となるので, $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ は $\{A\}$ と $\mathbf{V}_V(g)$ に含まれる既約成分に分解できる. 特に $\{A\}$ は $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ の既約成分である. 定理 2.37, 2.38 を適用すると

$$\dim V = \dim\, V - \dim\{A\} = \mathrm{codim}_V\{A\} \leq r = \dim_k \mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2$$

が成り立つ. ∎

補題 2.39 $\mathbb{A}^n(k)$ の閉部分多様体 V と点 $A = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ に対して, $\mathrm{n}_A/{\mathrm{n}_A}^2$ は $\overline{X_1 - a_1}, \ldots, \overline{X_n - a_n}$ を基底とする n 次元 k 線型空間である. ただし $\overline{X_i - a_i}$ は $\mathrm{n}_A/{\mathrm{n}_A}^2$ における $X_i - a_i$ の剰余類を表す.

Proof　$A \neq (0, \ldots, 0)$ の場合も同様にして証明できるので $A = (0, \ldots, 0)$ として証明する. $\mathrm{n}_A = (X_1, \ldots, X_n)$ であるから n_A は $O(\mathbb{A}^n(k))$ 加群として $X_1, \ldots, X_n$ で生成される. 従って n_A の元 F は

$$F = (c_1 + c_1'X_1 + \cdots)X_1 + \cdots + (c_n + c_n'X_n + \cdots)X_n \quad (c_i, c_i' \in k)$$

と表されるので

$$F \equiv c_1X_1 + \cdots + c_nX_n \pmod{{\mathrm{n}_A}^2}$$

となり, $\mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2$ が k 線型空間として $X_1,...,X_n$ で生成されることがわかる. 一方 $\mathrm{n}_A{}^2$ は次数が 2 以上の多項式からなるイデアルであるから

$$c_1X_1+\cdots+c_nX_n\in\mathrm{n}_A \implies c_1=\cdots=c_n=0$$

が成り立つ. ゆえに $X_1,...,X_n$ は $\mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2$ の基底である. ∎

定理 2.40 $V\subseteq\mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体, $\mathbf{I}(V)=\langle F_1,\ldots,F_r\rangle$, $F_i\in k[X_1,\ldots,X_n]$ とする. このとき V の点 $A=(a_1,\ldots,a_n)$ について次が成り立つ.

(1) 自然な準同型 $\varphi:O(\mathbb{A}^n(k))\mapsto O(V)$ が誘導する k 線型写像

$$\bar{\varphi}:\mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2\ni G(X_1,\ldots,X_n)\mapsto G(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2 \quad (x_i=\varphi(X_i))$$

の核 $\mathrm{Ker}(\bar{\varphi})$ は次式で与えられる.

$$\mathrm{Ker}(\bar{\varphi})=\left\langle\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_1}{\partial X_j}(A)\overline{X_j-a_j},\ldots,\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_r}{\partial X_j}(A)\overline{X_j-a_j}\right\rangle$$

(2) $\dim_k\,\mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2=n-\mathrm{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j}$

Proof $A=(0,\ldots,0)$ として証明する.

(1) $\varphi(\mathrm{n}_A)=\mathrm{m}_A$, $\varphi(\mathrm{n}_A{}^2)=\mathrm{m}_A{}^2$ となるので φ は k 線型写像 $\bar{\varphi}:\mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2\mapsto\mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2$ を誘導する. $\varphi^{-1}(\mathrm{m}_A{}^2)=\mathbf{I}(V)+\mathrm{n}_A{}^2$ であることから

$$\mathrm{Ker}(\bar{\varphi})=(\mathbf{I}(V)+\mathrm{n}_A{}^2)/\mathrm{n}_A{}^2$$

が成り立つ. 従って $\mathrm{Ker}(\bar{\varphi})$ は $F_1,...,F_r$ で生成される部分空間である. ゆえに

$$F_i\equiv\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\overline{X_j} \pmod{\mathrm{n}_A{}^2}$$

を示せば定理が証明されたことになる.

n_A は 1 次以上の多項式全体, $\mathrm{n}_A{}^2$ は 2 次以上の多項式全体であるから, $F_i\in\mathbf{I}(V)\subseteq\mathrm{n}_A$ より

$$F_i=\sum_{j=1}^n c_{ij}X_j+G_i \quad (c_{ij}\in k,\ G_i\in\mathrm{n}_A{}^2)$$

と表される．よって $\frac{\partial G_i}{\partial X_j}$ に定数項がないことに注意すれば

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A) = c_{ij} + \frac{\partial G_i}{\partial X_j}(A) = c_{ij}$$

となる．従って

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\,\overline{X_j} + G_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\,\overline{X_j} \pmod{\mathrm{n}_A{}^2}$$

が示された．

(2)　k 線型写像 $\bar{\varphi} : \mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2 \mapsto \mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2$ が全射であることから

$$\dim_k\ \mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2 + \dim_k\ \mathrm{Ker}(\bar{\varphi}) = \dim_k\ \mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2$$

が成り立つ．さらに (1) より

$$\mathrm{Ker}(\bar{\varphi}) = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial X_j}(A)\overline{X_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_r}{\partial X_j}(A)\overline{X_j} \right\rangle$$

であるから, $\overline{X_1}, ..., \overline{X_n}$ が $\mathrm{n}_A/\mathrm{n}_A{}^2$ の基底であることに注意すれば

$$\dim_k \mathrm{Ker}(\bar{\varphi}) = \mathrm{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j}$$

となるので

$$\dim_k\ \mathrm{m}_A/\mathrm{m}_A{}^2 = n - \mathrm{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j}$$

が成り立つ． ∎

定理 2.40 から次の定理が得られる．

定理 2.41 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体，$\mathbf{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$, $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ とする．このとき V の点 $A = (a_1, \ldots, a_n)$ について次の (1) と (2) は同値である．

(1)　V が 点 A で非特異である．

(2)　$\mathrm{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} = n - \dim V$

系 2.42 定理 2.41 と同じ条件の下で次の (1)' と (2)' は同値である.

(1)' 点 A が特異点である.

(2)' $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} < n - \dim V$

Proof　定理 2.41 より

$$\text{点 } A \text{ が } V \text{ の特異点} \iff \operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} \neq n - \dim V$$

が成り立つ. 一方, 定理 2.36, 2.40 より

$$\dim_k \mathrm{m}_A/{\mathrm{m}_A}^2 = n - \operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} \geq \dim V$$

となるので

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} \leq n - \dim V$$

が成り立つ. 従って

$$\text{点 } A \text{ が } V \text{ の特異点} \iff \operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} < n - \dim V$$

が成り立つ. ∎

定理 2.43 閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ の特異点全体のなす集合 V_{sing} は代数的集合であり, $V_{sing} \subsetneq V$ を満たす.

Proof　$\mathbf{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$ とする. 系 2.42 より

$$\text{点 } A \text{ が } V \text{ の特異点} \iff \operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j} < n - \dim V$$

が成り立つ. $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j}$ は行列 $\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(A)\right]_{i,j}$ の 0 でない小行列式の次数の最大値に一致するから, $\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right]_{i,j}$ の $(n - \dim V)$ 次の小行列式の共通零点に含まれる V の点が特異点である. ゆえに V_{sing} は代数的集合である.

次に $V_{sing} \subsetneq V$ を示す. まず $\mathbf{I}(V) = \langle F \rangle$, F は既約多項式, の場合を示し, 次いで一般の場合を示す.

$\mathbf{I}(V) = \langle F \rangle$ のとき, 定理 2.34 より $\dim V = n-1$ となる．ここで $V_{sing} = V$ と仮定して矛盾を導くことにする．$n - \dim V = 1$ に注意して系 2.42 を適用すると, 任意の $A \in V$ に対して

$$\mathrm{rank}\left[\frac{\partial F}{\partial X_1}(A) \cdots \frac{\partial F}{\partial X_n}(A)\right] = 0$$

となるので

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}(A) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial X_n}(A) = 0$$

が得られる．ここで $F_{X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i}$ とおくと

$$F_{X_1}, \ldots, F_{X_n} \in \mathbf{I}(V) = \langle F \rangle$$

が成り立つ．従って

$$F_{X_1} = G_1 F, \ldots, F_{X_n} = G_n F, \qquad G_1, \ldots, G_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

と表されるが，$\deg F_{X_1}, \ldots, \deg F_{X_n} < \deg F$ であるから $G_1 = \cdots = G_n = 0$ となり

$$F_{X_1} = \cdots = F_{X_n} = 0 \tag{2.5}$$

が得られる．k の標数が 0 のときは，F を $X_1, \ldots, X_n$ でそれぞれ整理して

$$\begin{cases} F = F_{10} + \cdots + F_{1d_1} X_1^{d_1} & (F_{1i} \in k[X_2, \ldots, X_n],\ F_{1d_1} \neq 0) \\ \qquad \vdots & \\ F = F_{n0} + \cdots + F_{nd_n} X_n^{d_n} & (F_{ni} \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}],\ F_{nd_n} \neq 0) \end{cases} \tag{2.6}$$

と表すと (2.5) より

$$F_{11} = \cdots = F_{1d_1} = \cdots\cdots = F_{n1} = \cdots = F_{nd_n} = 0$$

となる．よって

$$F = F_{10} \in k[X_2, \ldots, X_n],\ \ldots,\ F = F_{n0} \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$$

となり F は定数となるが, これは F が既約多項式であることに矛盾する．

k の標数が $p > 0$ のときも同様に (2.6) のように表すと, (2.5) より

$$F_{ij} \neq 0 \implies j \text{ は } p \text{ の倍数}$$

となるから, F における $X_1, \dots, X_n$ の指数はすべて p の倍数となるので

$$F = \sum c_{j_1,\dots,j_n} X_1^{pj_1} \cdots X_n^{pj_n} \quad (c_{j_1,\dots,j_n} \in k)$$

と表される. ここで k は代数的閉体であるから $c \in k$ に対して $c^{\frac{1}{p}} \in k$ であることに注意すれば

$$F = \left(\sum c'_{j_1,\dots,j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n} \right)^p \quad (c'_{j_1,\dots,j_n} \in k)$$

と表されるが, これは F が既約多項式であることに矛盾する. 以上で $\mathbf{I}(V) = \langle F \rangle$ の場合は $V_{sing} \subsetneq V$ であることが示された.

次に一般の場合について示すことにする. この場合も $V_{sing} = V$ と仮定して矛盾を導くことにする. $d = \dim V$ とおく. 定理 1.27 より V の関数体 $k(V)$ は k 上 $d+1$ 個の元 $y_1, \dots, y_{d+1}$ で生成されるので

$$k(V) = k(y_1, \dots, y_{d+1})$$

と表される. ここで $y_1, \dots, y_{d+1}$ が生成する $k(V)$ の部分整域を $k[y_1, \dots, y_{d+1}]$ とすると, 定理 2.21 より

$$O(V') = k[Y_1, ..., Y_{d+1}]/\mathbf{I}(V') \ni \overline{Y_i} \quad \xrightarrow{\text{同型}} \quad y_i \in k[y_1, \dots, y_{d+1}]$$

を満たす $\mathbb{A}^{d+1}(k)$ の閉部分多様体 V' が存在して

$$\dim V' = \mathrm{tr.deg}_k O(V') = \mathrm{tr.deg}_k k(y_1, \dots, y_{d+1}) = \mathrm{tr.deg}_k k(V) = d$$

となるから, 定理 2.35 より

$$\mathbf{I}(V') = \langle F \rangle, \quad V' = \mathbf{V}(F)$$

を満たす既約多項式 $F \in k[Y_1, \dots, Y_{d+1}]$ が存在する. このとき上で示したことから $V'_{sing} \subsetneq V'$ が成り立つことを注意しておく. さて $O(V) = k[X_1, \dots, X_n]/\mathbf{I}(V)$ であるから $x_i = X_i \bmod \mathbf{I}(V)$ とすると

$$k(V) = k(x_1, \dots, x_n) = k(y_1, \dots, y_{d+1})$$

である. 従って

$$y_1 = \frac{H_1}{H}, \ldots, y_{d+1} = \frac{H_{d+1}}{H} \qquad (H \neq 0, H_i \in k[x_1, \ldots, x_n])$$

および

$$x_1 = \frac{G_1}{G}, \ldots, x_n = \frac{G_n}{G} \qquad (G \neq 0, G_j \in k[y_1, \ldots, y_{d+1}])$$

と表される. このとき

$$y_i \in k\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{H}\right], \qquad x_j \in k\left[y_1, \ldots, y_{d+1}, \frac{1}{G}\right]$$

であるから

$$k\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{H}, \frac{1}{G}\right] = k\left[y_1, \ldots, y_{d+1}, \frac{1}{G}, \frac{1}{H}\right] \tag{2.7}$$

が成り立つ. ここで閉部分多様体 $W \subseteq \mathbb{A}^{n+2}(k)$, $W' \subseteq \mathbb{A}^{d+3}(k)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{V}(\mathbf{I}(V) \cup \{X_{n+1}H - 1\} \cup \{X_{n+2}G - 1\}) \\ W' &= \mathbf{V}((F) \cup \{Y_{d+2}G - 1\} \cup \{Y_{d+3}H - 1\}) \end{aligned}$$

$V = V_{sing}$ と仮定したから, 定理 2.30, (3) を繰り返し適用すると W の点がすべて特異点であること, すなわち $W_{sing} = W$ であることがわかる. 一方 G は $k[y_1, \ldots, y_{d+1}]$ の 0 でない元であり, V' が既約であることから

$$V'_{sing} \cup \mathbf{V}_{V'}(G) \subsetneq V'$$

となるので $V' - \mathbf{V}_{V'}(G)$ に V' の非特異点が存在する. 従って定理 2.30, (3) より $\mathbf{V}((F) \cup \{Y_{d+2}G - 1\})$ に非特異点が存在する. 同様に H が $k\left[y_1, \ldots, y_{d+1}, \frac{1}{G}\right]$ の 0 でない元であり, $\mathbf{V}((F) \cup \{Y_{d+2}G - 1\})$ が閉部分多様体であることから W' に非特異点の存在することがわかる. これは式 (2.7) から $O(W) \simeq O(W')$ が得られることに矛盾する. 以上で $V_{sing} \subsetneq V$ が示された. ∎

定理 2.32, 2.43 より次の定理が得られる.

定理 2.44 アフィン曲線上の特異点は高々有限個である.

3 章　射影多様体

この章では射影多様体の基本事項について述べる．特に §3.2 で証明する "射影多様体上の正則関数が定数に限る" という定理は Riemann-Roch の定理の証明で必要となり, §3.3 で述べる斉次化・非斉次化による射影多様体とアフィン多様体の１対１対応においてそれぞれの関数体が同型になるという結果は４章における近似定理の証明で必要となる.

§3.1 では, 射影空間, 斉次イデアル, 射影代数的集合等の概念を導入した後, アフィン空間の場合と同様に既約な射影代数的集合として射影多様体を定義する．さらに射影零点定理を証明した後, 空でない射影代数的集合と $\langle X_0, ..., X_n\rangle$ と異なる斉次な根基イデアルとが１対１に対応すること, この対応において射影多様体と素イデアルが対応することなどを証明する.

§3.2 では, 射影多様体の斉次座標環を定義し, その分数体の元で分母と分子が同次数の斉次元であるもの全体のなす部分体として有理関数体を定義する．有理関数の極全体が真の射影代数的集合になることを示した後, 射影多様体全体で正則な有理関数が定数に限ることを証明する．有理関数体の k 上の超越次数を射影多様体の次元と定め, 1 次元射影多様体を射影曲線と定義する．さらにアフィン多様体の場合と同様に 1 点における局所環の極大イデアルをその平方で割った剰余空間の次元が多様体の次元に一致しない点を特異点と定義し, 非特異射影多様体の概念を導入する.

§3.3 では, 多項式の斉次化, 非斉次化を定義し, イデアルおよび代数的集合の斉次化, 非斉次化とその相互関係について考察する．特にアフィン代数的集合と, その既約成分が斉次座標のある成分を 0 にすることがないような射影代数的集合との間に斉次化・非斉次化による１対１対応が存在すること, この対応でアフィン多様体と射影多様体が対応し, それぞれの関数体が同型になることなどを証明する.

§3.4 では, 有理写像, 射, および正則行列から定まる射影変換等について述べる.

なおこの章でも k は代数的閉体を表す.

3.1 射影代数的集合

$\mathbb{A}^{n+1}(k)-\{0\}$ の 2 点 $P=(p_0,...,p_n)$, $Q=(q_0,...,q_n)$ に対して

$$P\sim Q \iff (p_0,...,p_n)=\lambda(q_0,...,\lambda q_n) \quad (\exists\lambda\in k^{\times})$$

と定めると $\sim$ は $\mathbb{A}^{n+1}(k)-\{0\}$ 上の同値関係となる. 商集合

$$\mathbb{P}^n(k)=(\mathbb{A}^{n+1}(k)-\{0\})/\sim$$

を n 次元射影空間, 各同値類を $\mathbb{P}^n(k)$ の点という. $P=(p_0,....,p_n)\in\mathbb{A}^{n+1}(k)-\{0\}$ を含む $\mathbb{P}^n(k)$ の点を $(p_0:...:p_n)$ と表し, その点の斉次座標という.

点 $P\in\mathbb{P}^n(k)$ が $F\in k[X_0,...,X_n]$ の零点であるとは, P の任意の斉次座標 $(p_0:...:p_n)$ が $F(p_0,...,p_n)=0$ を満たすときにいう. また P が F の零点であることを $F(P)=0$ と表す. $k[X_0,...,X_n]$ の部分集合 S に対して

$$\widetilde{\mathbf{V}}(S):=\{P\in\mathbb{P}^n(k)\mid \text{任意の } F\in S \text{ に対して } F(P)=0\}$$

とおく. $\widetilde{\mathbf{V}}(S)$ と表される $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合を射影代数的集合という. $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合 V に対して,

$$\widetilde{\mathbf{I}}(V):=\{F\in k[X_0,...,X_n]\mid \text{任意の } P\in V \text{ に対して } F(P)=0\}$$

とおくと $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は $k[X_0,...,X_n]$ のイデアルとなる. $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ を V のイデアルという.

$k[X_0,...,X_n]$ のイデアル I が斉次イデアルであるとは "$F\in I$ ならば F の斉次成分はすべて I に含まれる" が成り立つときにいう. 以下 F の j 次の斉次成分を $F^{(j)}$ と表すことにする. このとき m 次多項式 F は次のように斉次成分に分解される.

$$F=\sum_{j=0}^{m}F^{(j)}=F^{(0)}+F^{(1)}+\cdots+F^{(m)}$$

定理 3.1 $k[X_0,...,X_n]$ のイデアル I について次の (1) と (2) は同値である.

(1) I は斉次イデアルである.

(2) 斉次多項式 $F_1,...,F_r$ が存在して $I=\langle F_1,...,F_r\rangle$ と表される.

Proof (1)⇒(2) $k[X_1,...,X_n]$ がネーター環であるから $I=\langle F_1,...,F_r\rangle$ と表され, I が斉次イデアルであるから $F_i^{(j)}\in I$ となる. 従って $\deg F_i=d_i$ とお

くと

$$I = \langle F_1^{(0)}, ..., F_1^{(d_1)}, ..., F_r^{(0)}, ..., F_r^{(d_r)} \rangle$$

となるので I は斉次多項式で生成される.

(2)⇒(1)　任意に $F \in I$ を選ぶと

$$F = \sum_i G_i F_i \qquad (G_i \in k[X_0, ..., X_n])$$

と表される. ここで $G_i = \sum_j G_i^{(j)}$ とすると

$$G_i F_i = \sum_j G_i^{(j)} F_i$$

であるが, $G_i^{(j)} F_i$ は I に含まれる斉次多項式である. 一方 F の斉次成分はこれら $G_i^{(j)} F_i$ いくつかの和となるので I に含まれる. ゆえに I は斉次イデアルである. ∎

定理 3.2 $F \in k[X_0, ..., X_n]$, $P \in \mathbb{P}^n(k)$, $F(P) = 0$ とする. このとき F の斉次成分 $F^{(j)}$ に対して $F^{(j)}(P) = 0$ が成り立つ.

Proof　点 P の斉次座標の１つを任意に選び $(p_0 : ... : p_n)$ とする. $\deg F = m$ とすると仮定より

$$F(\lambda p_0, ..., \lambda p_n) = \sum_{j=0}^{m} F^{(j)}(p_0, ..., p_n)\, \lambda^j = 0 \qquad (\forall \lambda \in k^\times)$$

が成り立つ. k は代数的閉体であるから無限体であるので, 定理 1.1 より

$$F^{(j)}(p_0, ..., p_n) = 0, \qquad (j = 0, 1, ..., m)$$

が成り立つ. $(p_0 : ... : p_n)$ は任意であったから $F^{(j)}(P) = 0$ が成り立つ. ∎

定理 3.3 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ に対して, $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアルである.

Proof　$F \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ とすると, 任意の $P \in V$ に対して $F(P) = 0$ が成り立つ. このとき定理 3.2 より任意の $P \in V$ に対して $F^{(j)}(P) = 0$ が成り立つ. 従って $F^{(j)} \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ となるので $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は斉次イデアルである. ∎

$\widetilde{\mathbf{V}}$ について成り立つ性質を次にあげておく. ただし $S, T \subseteq k[X_0, ..., X_n]$ とする.

(1) $\widetilde{\mathbf{V}}(S) = \widetilde{\mathbf{V}}(\langle S \rangle)$

(2) R のイデアルの族 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して

$$\widetilde{\mathbf{V}}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \widetilde{\mathbf{V}}(I_\alpha)$$

(3) $S \subseteq T$ であるならば $\widetilde{\mathbf{V}}(S) \supseteq \widetilde{\mathbf{V}}(T)$

(4) $\widetilde{\mathbf{V}}(S) \cup \widetilde{\mathbf{V}}(T) = \widetilde{\mathbf{V}}(\{FG \mid F \in S, G \in T\}) = \widetilde{\mathbf{V}}(\langle S \rangle \cap \langle T \rangle)$

(5) $\widetilde{\mathbf{V}}(\{0\}) = \mathbb{P}^n(k),\ \widetilde{\mathbf{V}}(\{1\}) = \widetilde{\mathbf{V}}(k[X_1, ..., X_n]) = \emptyset$

(6) $\widetilde{\mathbf{V}}(X_0, ..., X_n) = \emptyset$

(6) 以外は p.24 の (1)〜(5) と同様に示すことができる. $\widetilde{\mathbf{V}}(X_0, ..., X_n)$ の点は座標がすべて 0 となり, 射影空間に存在しないので (6) も成り立つ.

$\widetilde{\mathbf{I}}$ についても次の性質が成り立つ. ただし $V, W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ とする.

(1) $V \subseteq W$ ならば $\widetilde{\mathbf{I}}(V) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(W)$

(2) $\widetilde{\mathbf{I}}(V \cup W) = \widetilde{\mathbf{I}}(V) \cap \widetilde{\mathbf{I}}(W),\ \widetilde{\mathbf{I}}(V \cap W) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(V) + \widetilde{\mathbf{I}}(W)$

(3) $\widetilde{\mathbf{I}}(\emptyset) = k[X_0, ..., X_n]$

(4) $\widetilde{\mathbf{I}}(\mathbb{P}^n(k)) = 0$

(5) $\widetilde{\mathbf{I}}(\{(p_0 : ... : p_n)\}) = \langle \{p_i X_j - p_j X_i \mid i, j = 0, ..., n\} \rangle$

(6) $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(S)) \supseteq S,\ \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(S))) = \widetilde{\mathbf{V}}(S)$

(7) $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(W)) \supseteq W,\ \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(W))) = \widetilde{\mathbf{I}}(W)$

(8) V が $\mathbb{P}^n(k)$ の射影代数的集合のとき $V = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(V))$

(9) I が $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合のイデアルのとき $I = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I))$

(5) 以外は p.25,(1)〜(9) と同様に示すことができる. 以下 (5) を示す. 両辺とも斉次イデアルであり, $\widetilde{\mathbf{I}}(\{(p_0 : ... : p_n)\}) \supseteq \langle \{p_i X_j - p_j X_i \mid i, j = 0, ..., n\} \rangle$ は明らかに成り立つので

$\subseteq$ を示す. 斉次多項式 $F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\{(p_0 : ... : p_n)\})$ に対して $F \in \langle\{p_iX_j - p_jX_i \mid i, j = 0, ..., n\}\rangle$ を示せばよい. $\deg F = m$ として, 0 でない p_i を選び, F を $X_j - \frac{p_j}{p_i}X_i$ $(j \neq i)$ で順次割っていく.

$$\begin{aligned} F &= G_0(X_0 - \frac{p_0}{p_i}X_i) + H_0 \\ &= G_0(X_0 - \frac{p_0}{p_i}X_i) + G_1(X_1 - \frac{p_1}{p_i}X_i) + H_1 \\ &\quad\vdots \\ &= G_0(X_0 - \frac{p_0}{p_i}X_i) + \cdots + G_n(X_n - \frac{p_n}{p_i}X_i) + H_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで H_n は X_i のみの斉次多項式であるから $H_n = cX_i^m$ $(c \in k)$ と表されるが

$$F(p_0, ..., p_n) = H_n(p_0, ..., p_n) = cp_i^m = 0$$

となり, $p_i \neq 0$ より $c = 0$, 従って $H_n = 0$ が得られる. ゆえに

$$F \in \langle\{p_iX_j - p_jX_i \mid i, j = 0, ..., n\}\rangle$$

が示された.

上の (8) から次の定理が導かれる.

定理 3.4 $\mathbb{P}^n(k)$ の射影代数的集合 V, W に対して, 次が成り立つ.

$$V = W \Longleftrightarrow \widetilde{\mathbf{I}}(V) = \widetilde{\mathbf{I}}(W)$$

定理 2.1 と同様にして次の定理が得られる.

定理 3.5 $\mathbb{P}^n(K)$ の部分集合 V に対して, V のイデアル $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は斉次な根基イデアルである.

射影代数的集合 V が可約であるとは, 射影代数的集合 V_1, V_2 で

$$V = V_1 \cup V_2, \qquad V_1, V_2 \subsetneq V$$

を満たすものが存在するときにいう. 可約でない射影代数的集合 $(\neq \emptyset)$ は既約であるといわれる. 既約な射影代数的集合を射影多様体という. アフィン代数的集合についての定理 2.4,2.5,2.7,2.8 は V を射影代数的集合に置き換えても成り立ち, 射影代数的集合 $V \neq \emptyset$ の既約成分が定義される.

既約斉次多項式 $F \in k[X_0, ..., X_n]$ によって $V = \widetilde{\mathbf{V}}(F)$ と表される射影多様体 V を超曲面という. 特に $\deg F = 1$ のとき超平面という.

射影代数的集合 V に対して次式で定まる $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ の部分集合 $C(V)$ を V 上の錐という.

$$C(V) := \{(p_0, ..., p_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) - \{0\} \mid (p_0 : ... : p_n) \in V\} \cup \{0\}$$

定理 3.6 $\mathbb{P}^n(k)$ の射影代数的集合 $V \neq \emptyset$, および斉次イデアル $I \subsetneq k[X_0, ..., X_n]$ に対して次が成り立つ.

(1) $\mathbf{I}(C(V)) = \widetilde{\mathbf{I}}(V)$

(2) $C(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) = \mathbf{V}(I)$

Proof (1) は $\widetilde{\mathbf{I}}$ と錐の定義より明らかである. (2) についても I が $k[X_0, ..., X_n]$ の真の斉次イデアルであることから $\mathbf{V}(I)$ が 0 を含むことに注意すれば, $\widetilde{\mathbf{V}}$ と錐の定義より得られる. ∎

補題 3.7 $k[X_0, ..., X_n]$ の真の斉次イデアル I に対して, $\widetilde{\mathbf{V}}(I) = \emptyset$ であることと, $\sqrt{I} = \langle X_0, ..., X_n \rangle$ は同値である.

Proof $\widetilde{\mathbf{V}}$ と錐の定義および定理 3.6 より

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I) = \emptyset \iff C(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) = \{0\} \iff \mathbf{V}(I) = \{0\}$$

が成り立つ. 一方定理 2.2 より

$$\mathbf{V}(I) = \{0\} \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\{0\}) = \langle X_0, ..., X_n \rangle$$

となるので, Hilbert の零点定理 (定理 2.10)

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

と合わせて

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I) = \emptyset \iff \sqrt{I} = \langle X_0, ..., X_n \rangle$$

が得られる. ∎

定理 3.8 (射影零点定理) $k[X_0,...,X_n]$ の斉次イデアル I に対して次が成り立つ.

(1) $\widetilde{\mathbf{V}}(I)=\emptyset$ であることと, $\{F \mid F$ は斉次多項式で $\deg F \geq N\} \subseteq I$ となる自然数 N が存在することとは同値である.

(2) $\widetilde{\mathbf{V}}(I)\neq\emptyset$ であるならば $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I))=\sqrt{I}$ である.

Proof (1) $S_N=\{F \mid F$ は斉次多項式で $\deg F \geq N\}$ とおく. $I=k[X_0,...,X_n]$ のときは $\widetilde{\mathbf{V}}(I)=\emptyset$ であり, 任意の自然数 N に対して $S_N\subseteq I$ となるので, 以下 $I\subsetneq k[X_0,...,X_n]$ とする. 補題 3.7 より

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I)=\emptyset \iff \sqrt{I}=\langle X_0,...,X_n\rangle \tag{3.2}$$

が成り立つ. 従って

$$\sqrt{I}=\langle X_0,...,X_n\rangle \iff S_N\subseteq I \text{ となる自然数 } N \text{ が存在する} \tag{3.3}$$

が成り立つことを示せばよい. まず $\sqrt{I}=\langle X_0,...,X_n\rangle$ とすると, $X_i^{m_i}\in I$ となる自然数 m_i が存在する. $N=m_0+\cdots+m_n$ とおくと $F\in S_N$ は

$$F=\sum_{i_0+\cdots+i_n\geq N} c_{i_0,...,i_n}X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}$$

と表される. $i_0+\cdots+i_n\geq N$ より $i_j\geq m_j$ を満たす i_j が存在するので, $c_{i_0,...,i_n}X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}\in I$ が成り立つ. よって $F\in I$ を得る.

逆に, ある自然数 N に対して $S_N\subseteq I$ であるとする. このとき $X_0^N,...,X_n^N\in I$ であるから $\langle X_0,...,X_n\rangle\subseteq\sqrt{I}$ が成り立つ. $\langle X_0,...,X_n\rangle\subsetneq\sqrt{I}$ と仮定すると, $\langle X_0,...,X_n\rangle$ は極大イデアルであるから $\sqrt{I}=k[X_0,...,X_n]$ となる. このとき $\sqrt{I}$ は 0 でない k の元を含むので, I も 0 でない k の元を含むことになり $I\neq k[X_0,...,X_n]$ と仮定したことに矛盾する. ゆえに $\sqrt{I}=\langle X_0,...,X_n\rangle$ が成り立つ. 以上で (3.3) が示された.

(2) $\widetilde{\mathbf{V}}(I)\neq\emptyset$ とする. このとき $I\subsetneq k[X_0,...,X_n]$ であるから定理 3.6 より $\mathbf{I}(C(\widetilde{\mathbf{V}}(I)))=\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I))$ および $C(\widetilde{\mathbf{V}}(I))=\mathbf{V}(I)$ が成り立つ. 一方 Hilbert の零点定理 (定理 2.10) より $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\sqrt{I}$ となるので

$$\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I))=\mathbf{I}(C(\widetilde{\mathbf{V}}(I)))=\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\sqrt{I}$$

が得られる. ∎

補題 3.9 $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアル I に対して次の (1) と (2) は同値である.

(1) I は素イデアルである.

(2) 斉次多項式 F, G が $FG \in I$ を満たすならば $F \in I$ または $G \in I$ である.

Proof (1)⇒(2) 素イデアルの定義より明らかである.

(2)⇒(1) $F \notin I$ かつ $G \notin I$ である多項式 $F, G \in k[X_0, ..., X_n]$ に対して $FG \notin I$ を示せばよい. $F \notin I$ かつ $G \notin I$ であるから, F および G の斉次成分の中で I に含まれないものが存在する. そのような斉次成分のうちで, 次数が最大のものを $F^{(i)}, G^{(j)}$ とする. 仮定より $F^{(i)}G^{(j)} \notin I$ であるが, FG の $i+j$ 次斉次成分

$$(FG)^{(i+j)} = \sum_{r+s=i+j} F^{(r)}G^{(s)} = F^{(0)}G^{(i+j)} + \cdots + F^{(i)}G^{(j)} + \cdots + F^{(i+j)}G^{(0)}$$

において $(r, s) \neq (i, j)$ のとき $F^{(r)}G^{(s)} \in I$ となるので $(FG)^{(i+j)} \notin I$ が得られる. I は斉次イデアルであるから $FG \notin I$ が成り立つ. ∎

補題 3.10 I は $k[X_0, ..., X_n]$ の真の斉次な根基イデアルで $I \neq \langle X_0, ..., X_n \rangle$ であるとする. このとき次の (1) と (2) は同値である.

(1) $\widetilde{\mathbf{V}}(I)$ は射影多様体である.

(2) I は素イデアルである.

Proof 仮定より $I \neq \langle X_0, ..., X_n \rangle$ であるから, 補題 3.7 より $\widetilde{\mathbf{V}}(I) \neq \emptyset$ が成り立つことを注意しておく.

(1)⇒(2) 斉次多項式 F, G が $FG \in I$ を満たすとする. $F \in I$ または $G \in I$ であることを示せばよい. $\widetilde{\mathbf{V}}(I) \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(FG)$ であるので p.61,(4) より

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I) \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(F) \cup \widetilde{\mathbf{V}}(G)$$

が成り立つ. $\widetilde{\mathbf{V}}(I) \neq \emptyset$ は既約であるから

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I) \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(F) \quad \text{または} \quad \widetilde{\mathbf{V}}(I) \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(G)$$

となるので, p.61, (1) より

$$\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(F)) \quad \text{または} \quad \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(G))$$

が得られる．ゆえに $I \supseteq \langle F \rangle$ または $I \supseteq \langle G \rangle$ となるので，$F \in I$ または $G \in I$ が示された.

(2)⇒(1)　$\widetilde{\mathbf{V}}(I)$ が既約でないと仮定して矛盾を導く．射影代数的集合 V_1, V_2 が存在して

$$\widetilde{\mathbf{V}}(I) = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \neq \widetilde{\mathbf{V}}(I),\ V_2 \neq \widetilde{\mathbf{V}}(I)$$

と表される．ここで定理 3.8, p.61, (1) を適用すると

$$I = \sqrt{I} = \widetilde{\mathbf{I}}(V_1 \cup V_2) = \widetilde{\mathbf{I}}(V_1) \cap \widetilde{\mathbf{I}}(V_2), \quad \widetilde{\mathbf{I}}(V_1) \neq I,\ \widetilde{\mathbf{I}}(V_2) \neq I$$

を得る．従って $F_1 \in \widetilde{\mathbf{I}}(V_1) - I$，$F_2 \in \widetilde{\mathbf{I}}(V_2) - I$ を満たす斉次多項式 F_1, F_2 が存在し

$$F_1 F_2 \in \widetilde{\mathbf{I}}(V_1) \cap \widetilde{\mathbf{I}}(V_2) = I$$

となるので, I が素イデアルであることに矛盾する. ∎

定理 3.11 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を次のように定める.

$$\mathcal{A} = \{V \mid V \text{ は } \mathbb{P}^n(k) \text{ の空でない射影代数的集合}\},$$
$$\mathcal{B} = \{I \mid\ I \text{ は } k[X_0, ..., X_n] \text{ の真の斉次な根基イデアルで } I \neq \langle X_0, ..., X_n \rangle\}$$

このとき次が成り立つ.

(1)　$\varphi : \mathcal{A} \ni V \mapsto \widetilde{\mathbf{I}}(V) \in \mathcal{B}$ は全単射であり，$\varphi^{-1}(I) = \widetilde{\mathbf{V}}(I)$ である.

(2)　φ は射影多様体全体のなす集合から $\langle X_0, ..., X_n \rangle$ と異なる素イデアル全体のなす集合への全単射を誘導する.

Proof　(2) は (1) と補題 3.10 から導かれるので (1) のみを示す．まず射影代数的集合 $V \neq \emptyset$ に対して $\widetilde{\mathbf{I}}(V) \in \mathcal{B}$ であることを示す．定理 3.3 と定理 3.5 により $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は斉次な根基イデアルである．一方 $V \neq \emptyset$ であるから $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(V)) \neq \emptyset$ となるので $\widetilde{\mathbf{I}}(V) \neq \langle X_0, ..., X_n \rangle, k[X_0, ..., X_n]$ が成り立つ．ゆえに $\widetilde{\mathbf{I}}(V) \in \mathcal{B}$ である．また定理 3.4 より φ は単射である．次に φ が全射であることを示す. $I \in \mathcal{B}$ に対して I は真の根基イデアルであるから，$\sqrt{I} = I \neq \langle X_0, ..., X_n \rangle$ と

なる．よって補題 3.7 より $\widetilde{\mathbf{V}}(I) \neq \emptyset$ が成り立つので射影零点定理 (定理 3.8) が適用できて

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I)) = \sqrt{I} = I$$

を得る．ゆえに φ は全射である． $\varphi^{-1}(I) = \widetilde{\mathbf{V}}(I)$ であることは上式から明らかである． ∎

3.2 有理関数

射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ に対して, 剰余環

$$O_h(V) := k[X_0, ..., X_n]/\widetilde{\mathbf{I}}(V)$$

を V の斉次座標環という． F が斉次多項式のとき

$$f = \bar{F} = F \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V) \in O_h(V)$$

を斉次元といい, $\deg f := \deg F$ を斉次元 f の次数という．これが well-defined であることは次の定理 3.12, (1) で示される．

定理 3.12 $O_h(V)$ において次が成り立つ．

(1) $F, G \in k[X_0, ..., X_n] - \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ が斉次多項式で $\bar{F} = \bar{G}$ であるならば $\deg F = \deg G$ である．

(2) $f \in O_h(V)$ に対して $f = \sum_i f_i$ となる斉次元 f_i が一意に存在する．

Proof (1) 仮定より $F - G \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ であるが, $\deg F \neq \deg G$ であると仮定すると, $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ が斉次イデアルであるから $F - G$ の斉次成分 F, G が $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ に含まれることになり, 矛盾が生じる．従って $\deg F = \deg G$ が成り立つ．

(2) $f = \bar{F}$ として F を $F = \sum_i F^{(i)}$ と斉次成分の和で表す． $f_i = \overline{F^{(i)}}$ とおくと $f_i \in O_h(V)$ は斉次元であり,

$$f = \bar{F} = \overline{\sum_i F^{(i)}} = \sum_i \overline{F^{(i)}} = \sum_i f_i$$

と表される. 次に

$$f = \sum_i g_i = \sum_j h_j$$

と斉次元の和として 2 通りに表されたとする. ここで

$$g_i = \overline{G_i}, \quad h_j = \overline{H_j}$$

となる斉次多項式 G_i, H_j を選び, $G = \sum_i G_i, H = \sum_j H_j$ とおくと $G - H \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ であるから, $G - H$ のすべての斉次成分について

$$(G - H)^{(\ell)} = G^{(\ell)} - F^{(\ell)} \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$$

が成り立つ. よって任意の $\ell \geq 0$ に対して, $g_\ell = h_\ell$ となるので一意性が示された. ∎

$V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ が射影多様体のとき, 定理 3.11 より $\widetilde{\mathbf{I}}(V)$ は素イデアルであるから V の斉次座標環 $O_h(V)$ は整域である. $O_h(V)$ の分数体を $k_h(V)$ で表す.

$$k_h(V) = \left\{ \frac{g}{h} \mid g, h \in O_h(V),\ h \neq 0 \right\}$$

ここで

$$k(V) := \left\{ \frac{g}{h} \in k_h(V) \mid g, h \in O_h(V) \text{ は斉次元で } \deg g = \deg h,\ h \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

と定義すると $k(V)$ は $k_h(V)$ の部分体である. $k(V)$ を V の関数体, $k(V)$ の元を V 上の有理関数という.

$O_h(V)$ の斉次元 $g = \bar{G}$ と点 $P = (p_0 : ... : p_n) \in V$, $\lambda \in k^\times$ に対して

$$G(\lambda p_0, .., \lambda p_n) = \lambda^{\deg G} G(p_0, .., p_n)$$

となるので $G(p_0, ..., p_n) \neq 0$ であるかどうかは斉次座標の選び方によらない. $g = \bar{H}$ となる斉次多項式 H に対しても $H - G \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ であり, 定理 3.12 より $\deg G = \deg H$ となるので $G(p_0, .., p_n) = H(p_0, .., p_n)$, および

$$G(\lambda p_0, .., \lambda p_n) = \lambda^{\deg G} G(p_0, .., p_n) = \lambda^{\deg H} H(p_0, .., p_n) = H(\lambda p_0, .., \lambda p_n)$$

が成り立つ. 従って $G(p_0, ..., p_n) \neq 0$ であるかどうかは斉次座標の選び方にも, 斉次多項式の選び方にもよらない. 以上から $G(p_0, ..., p_n) \neq 0$ のとき $g(P) \neq 0$ であると定義する

ことができる.

有理関数 $f \in k(V)$ が点 $P \in V$ で定義されるとは, $h(P) \neq 0$ であるような斉次元 $g, h \in O_h(V)$ により

$$f = \frac{g}{h}$$

と表されるときにいう. このとき点 $P \in V$ における $f \in k(V)$ の値 $f(P)$ を

$$f(P) := \frac{g(P)}{h(P)}$$

で定義する. これが well-defined であることを次の定理で示す.

定理 3.13 V は射影多様体, $f \in k(V)$ は点 $P \in V$ で定義されるとする. このとき $f(P)$ は f の表し方, および P の斉次座標のとり方に依存しない.

Proof f が P で定義されることから $h(P) \neq 0$ であるような斉次元 $g, h \in O_h(V)$ が存在して

$$f = \frac{g}{h}$$

と表される. $g = \bar{G}, h = \bar{H}$ となる斉次多項式 $G, H \in k[X_0, ..., X_n]$ を選び, P の斉次座標の 1 つを $(p_0 : ... : p_n)$ とする. このとき P の任意の斉次座標はある $\lambda \in k^\times$ により $(\lambda q_0, ..., \lambda q_n)$ と表される. ここで $\deg G = \deg H$ に注意すれば

$$\frac{G(\lambda p_0, ..., \lambda p_n)}{H(\lambda p_0, ..., \lambda p_n)} = \frac{\lambda^{\deg G} G(p_0, ..., p_n)}{\lambda^{\deg H} H(p_0, ..., p_n)} = \frac{G(p_0, ..., p_n)}{H(p_0, ..., p_n)}$$

となるから, $f(P)$ の値は P の斉次座標の選び方によらない.

次に斉次元 g', h' が

$$f = \frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}, \qquad h'(P) \neq 0$$

を満たすとして $g' = \overline{G'}, h' = \overline{H'}$ となる斉次多項式 G', H' を選ぶ. $gh' - g'h = 0$ であるから $GH' - G'H \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ となるので

$$G(p_0, ..., p_n)H'(p_0, ..., p_n) - G'(p_0, ..., p_n)H(p_0, ..., p_n) = 0$$

より

$$\frac{G(p_0, ..., p_n)}{H(p_0, ..., p_n)} = \frac{G'(p_0, ..., p_n)}{H'(p_0, ..., p_n)} \implies \frac{g(P)}{h(P)} = \frac{g'(P)}{h'(P)}$$

が得られる. 従って $f(P)$ は f の表し方にもよらない. ∎

有理関数 $f \in k(V)$ が定義されない点を f の極という．$P \in V$ に対して

$$O_P(V) := \{f \in k(V) \mid f \text{ は } P \text{ で定義される}\}$$

と定義すると $O_P(V)$ は $k(V)$ の部分環であり,

$$\mathrm{m}_P(V) := \{f \in O_P(V) \mid f(P) = 0\}$$

はそのイデアルである．定理 2.27, 2.28 と同様にして次の定理を得る．

定理 3.14 $O_P(V)$ は $\mathrm{m}_P(V)$ をただ 1 つの極大イデアルとしてもつ局所環であり, $O_P(V)/\mathrm{m}_P(V) \simeq k$ が成り立つ．$O_P(V)$ を V の点 P での局所環という．

U を V の部分集合とする．有理関数 $f \in k(V)$ が U 上の正則関数であるとは, 任意の $P \in U$ で f が定義されるときにいう．U 上の正則関数全体を

$$O(U) := \{f \in k(V) \mid f \text{ は } U \text{ 上の正則関数}\} = \bigcap_{P \in U} O_P(V)$$

とおく．また有理関数 $f \in k(V)^\times$ に対して

$$Z_f = \{f \text{ の極}\}, \quad J_f = \{H \in k[X_0, ..., X_n] \mid \bar{H} f \in O_h(V)\}$$

とおく．ただし $\bar{H}$ は斉次座標環 $O_h(V)$ における H の剰余類を表す．

補題 3.15 J_f は斉次イデアルである．

Proof　定義より $\widetilde{\mathbf{I}}(V) \subseteq J_f$ であることを注意しておく．$H \in J_f$ を任意に選び $H = \sum_j H^{(j)}$ と斉次成分の和に表す．$H^{(j)} \in J_f$ を示せばよい．$f \in k(V)^\times$ より

$$f = \frac{\overline{G_0}}{\overline{H_0}} \qquad (G_0, H_0 \text{ は斉次多項式, } \deg G_0 = \deg H_0,\ G_0, H_0 \notin \widetilde{\mathbf{I}}(V))$$

と表されるので, $\bar{H} \frac{\overline{G_0}}{\overline{H_0}} = \bar{G} \in O_h(V)$ となる多項式 G が存在する．$G = \sum_i G^{(i)}$ と斉次成分に分解すると

$$\sum_j \overline{H^{(j)} G_0} = \sum_i \overline{G^{(i)} H_0}$$

となる．$H^{(j)} \in \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ のときは $H^{(j)} \in J_f$ が成り立つので，$H^{(j)} \notin \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ としてよい．定理 3.12 より斉次元への分解は一意的であることから，$H^{(j)}G_0 \notin \widetilde{\mathbf{I}}(V)$，および $\deg G_0 = \deg H_0$ に注意すれば $\overline{H^{(j)}G_0} = \overline{G^{(j)}H_0}$ が成り立つ．このとき

$$\overline{H^{(j)}}f = \overline{H^{(j)}}\,\frac{\overline{G_0}}{\overline{H_0}} = \overline{G^{(j)}} \in O_h(V)$$

となるので $H^{(j)} \in J_f$ が示された． ∎

補題 2.23, 定理 2.24 と同様にして次の定理 3.16 を得る．

定理 3.16 射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ 上の有理関数 $f \in k(V)^\times$ に対して $\widetilde{\mathbf{V}}(J_f) = Z_f$ が成り立つ．特に Z_f は射影代数的集合で $Z_f \subsetneq V$ である．

定理 3.17 射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ 上の正則関数は定数しかない．すなわち $O(V) = k$ である．

Proof　$f \in k(V)^\times$ を V 上の正則関数とする．仮定より $Z_f = \widetilde{\mathbf{V}}(J_f) = \emptyset$ である．

$$S_r = \{H \mid \ H \text{ は } r \text{ 次斉次多項式}\}$$

とおくと射影零点定理 (定理 3.8) より, ある N に対して $S_N \subseteq J_f$ となる．ここで

$$\bar{S}_N = \{\bar{H} \in O_h(V) \mid H \in S_N\} \cup \{0\}$$

とおく．$\bar{S}_N$ は k 線型空間であり,

$$\{\overline{X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}} \mid i_0 + \cdots + i_n = N\}$$

で生成される．V の点 P を選び, その斉次座標の 1 つを $(p_0 : ... : p_n)$ とすると 0 でない成分 p_i が存在する．このとき $X_i^N \in S_N$ であり，$X_i^N(p_0, ..., p_n) = p_i^N \neq 0$ であるから，$X_i^N \in S_N - \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ となる．よって $\bar{S}_N \neq 0$ が成り立つ．

次に $f\bar{S}_N \subseteq \bar{S}_N$ を示そう．$\bar{H} \in \bar{S}_N$, $\bar{H} \neq 0$ として $f\bar{H} \in \bar{S}_N$ を示せばよい．

$$f = \frac{g}{h} \qquad (g, h \text{ は斉次元で } \deg g = \deg h)$$

と表すと, $H \in J_f$ であるから

$$\bar{H}\,f = \bar{H}\,\frac{g}{h} = \bar{G} \in O_h(V)$$

となる多項式 G が存在する．これより $\bar{H}g = \bar{G}h$ が得られるが，$\bar{H}, g, h$ は斉次元であるから $\bar{G}$ も斉次元となり，$\deg g = \deg h$ より $\deg \bar{G} = \deg \bar{H} = N$ が成り立つ．以上で $f\bar{H} = \bar{G} \in \bar{S}_N$ が示された．

さて $\bar{S}_N$ の k 基底を $x_1, ..., x_d$ とする．$fx_i \in \bar{S}_N$ であるから

$$fx_i = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{id}x_d \qquad (c_{ij} \in k)$$

と表される．従って

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{d1} & \cdots & c_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$$

となるので

$$(fE_d - [c_{ij}]) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (E_d \text{ は } d \text{ 次単位行列})$$

を得る．$\bar{S}_N \neq 0$ より, ある x_j は 0 でないので, 連立 1 次方程式が自明でない解を持つ条件から

$$\det(fE_d - [c_{ij}]) = 0$$

が成り立ち, f は k 係数 d 次多項式の根 $(d \geq 1)$ となる．すなわち f は k 上代数的となるが，k は代数的閉体であるから $f \in k$ が得られる． ∎

$O_h(V)$ の 0 でない元 g に対して

$$O_h(V)\left[\frac{1}{g}\right]_0 := \left\{ \frac{f}{g^m} \in k_h(V) \mid f \in O_h(V) \text{ は斉次元で } \deg f = m \cdot \deg g,\ m \geq 0 \right\}$$

と定義する．$O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ は $k(V)$ の部分整域である．ただし $O_h(V)$ を含んでいないことに注意されたい．

定理 3.18 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ を射影多様体，$G \in k[X_0, ..., X_n] - \widetilde{\mathbf{I}}(V)$ を斉次多項式で $g = \bar{G}$ とする．このとき $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ は $V - \widetilde{\mathbf{V}}(G)$ 上の正則関数全体 $O(V - \widetilde{\mathbf{V}}(G))$ に一致する．また $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ の分数体は $k(V)$ となる．

Proof　$\frac{f}{g^m} \in O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ とすると f, g^m は斉次元であり, $\deg f = \deg g^m$ であるから $\frac{f}{g^m}$ は $k(V)$ の元で, $V - \widetilde{\mathbf{V}}(G)$ 上正則である. 従って $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0 \subseteq O(V - \widetilde{\mathbf{V}}(G))$ が成り立つ.

逆に $f \in O(V - \widetilde{\mathbf{V}}(G))$ とする. $f \in k$ のときは明らかに $f \in O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ となるので, 以下 $f \notin k$ とする. このとき定理 3.16 より

$$\emptyset \neq \widetilde{\mathbf{V}}(J_f) = Z_f \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(G)$$

が成り立つ. 従って射影零点定理 (定理 3.8) より

$$\sqrt{J_f} = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(J_f)) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(G)) \supseteq \langle G \rangle$$

を得る. これより, ある自然数 m が存在して $G^m \in J_f$ となるので,

$$\overline{G^m} f = g^m f \in O_h(V)$$

が成り立つ. $h = g^m f$ は斉次元で, $\deg h = m \deg g$ となるから $f = \frac{h}{g^m} \in O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ が成り立つ. 以上で $O(V - \widetilde{\mathbf{V}}(G)) = O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ が示された.

最後に $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ の分数体が $k(V)$ に一致することを示す. $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ の分数体が $k(V)$ に含まれることはよい. $f \in k(V)$ を任意に選ぶと

$$f = \frac{h'}{h} \quad (h, h' \in O_h(V) \text{ は斉次元で } h \neq 0,\ \deg h = \deg h' = r)$$

と表される. $\deg g = s$ とおくと

$$f = \frac{h'}{h} = \frac{h' h^{s-1}}{h^s} = \frac{\frac{h' h^{s-1}}{g^r}}{\frac{h^s}{g^r}}$$

と表され

$$\frac{h^s}{g^r}, \frac{h' h^{s-1}}{g^r} \in O_h(V) \left[\frac{1}{g} \right]_0, \quad \frac{h^s}{g^r} \neq 0$$

が成り立つ. 従って $O_h(V)[\frac{1}{g}]_0$ の分数体は $k(V)$ に一致する. ∎

射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ の次元 $\dim V$ を

$$\dim V := \mathrm{tr.deg}_k\, k(V)$$

で定義する． $\dim V = 1$ のとき射影曲線， $\dim V = 2$ のとき射影曲面などという．定理 3.14 で示したように， $\mathrm{m}_P(V)$ は $O_P(V)$ のただ１つの極大イデアルである． $\mathrm{m}_P(V)$, $\mathrm{m}_P(V)^2$ を $O_P(V)$ 加群と見なすと， $k \subseteq O_P(V)$ より, 剰余加群 $\mathrm{m}_P(V)/\mathrm{m}_P(V)^2$ は k 線型空間と見なすことができる． V が点 $P \in V$ で非特異であるとは,

$$\dim_k (\mathrm{m}_P(V)/\mathrm{m}_P(V)^2) = \dim V$$

が成り立つときにいう．またすべての点で非特異であるとき， V は非特異であるという．点 P で非特異でないとき， V は点 P で特異であるといい, このとき点 P を V の特異点という．

3.3 アフィン多様体と射影多様体

多項式 $F \in k[X_1, ..., X_n]$, $F \neq 0$ に対して

$$F^\sharp(X_0, ..., X_n) := X_0^{\deg F} F\left(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0}\right)$$

とおき, F の斉次化という．定義より $F^\sharp$ は斉次多項式である．なお $0^\sharp = 0$ と定める． $k[X_1, ..., X_n]$ のイデアル I に対して

$$I^\sharp := \langle\, F^\sharp \mid F \in I \,\rangle$$

と定める． $F^\sharp$ が斉次多項式であることから $I^\sharp$ は $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアルである．多項式 $F \in k[X_0, ..., X_n]$ に対して

$$F_\sharp(X_1, ..., X_n) := F(1, X_1, ..., X_n)$$

と定め, F の非斉次化という． $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアル $\widetilde{I}$ に対して

$$\widetilde{I}_\sharp := \langle\, F_\sharp \mid F \in \widetilde{I} \,\rangle$$

と定める．次の (1)〜(6) は上の定義から容易に導かれる．

(1) $F \in k[X_1, ..., X_n]$ に対して $(F^\sharp)_\sharp = F$ である．

(2) 斉次多項式 $F \in k[X_0, ..., X_n]$ が $F = X_0^m G$ (G と X_0 は互いに素) と表されるとき $(F_\sharp)^\sharp = G$ である．

(3) $F, G \in k[X_1, ..., X_n]$ に対して $(FG)^\sharp = F^\sharp G^\sharp$ である.

(4) $F, G \in k[X_0, ..., X_n]$ に対して $(F+G)_\sharp = F_\sharp + G_\sharp$, $(FG)_\sharp = F_\sharp G_\sharp$ である.

(5) $k[X_1, ..., X_n]$ のイデアル I, J に対して $I \subseteq J$ ならば $I^\sharp \subseteq J^\sharp$ である.

(6) $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアル $\widetilde{I}, \widetilde{J}$ に対して $\widetilde{I} \subseteq \widetilde{J}$ ならば $\widetilde{I}_\sharp \subseteq \widetilde{J}_\sharp$ である.

補題 3.19 $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアル $\widetilde{I}$ に対して $\widetilde{I}_\sharp = \{F_\sharp \mid F \in \widetilde{I}\}$ が成り立つ.

Proof　$\{F_\sharp \mid F \in \widetilde{I}\} \subseteq \widetilde{I}_\sharp$ は定義より明らかである. 以下 $\widetilde{I}_\sharp \subseteq \{F_\sharp \mid F \in \widetilde{I}\}$ を示す. $G \in \widetilde{I}_\sharp$ を任意に選ぶ. $\widetilde{I}_\sharp = \langle F_\sharp \mid F \in \widetilde{I} \rangle$ であるから $F_i \in \widetilde{I}$, $H_i \in k[X_1, ..., X_n]$ が存在して $G = \sum_i H_i (F_i)_\sharp$ と表されるが, 上の (1),(4) より

$$G = \sum_i H_i (F_i)_\sharp = \sum_i (H_i^\sharp)_\sharp (F_i)_\sharp = \sum_i (H_i^\sharp F_i)_\sharp = \left(\sum_i H_i^\sharp F_i\right)_\sharp$$

となるので $\widetilde{I}_\sharp \subseteq \{F_\sharp \mid F \in \widetilde{I}\}$ が成り立つ. ∎

補題 3.20 $k[X_1, ..., X_n]$ のイデアル I に対して $(I^\sharp)_\sharp = I$ が成り立つ.

Proof　任意の $G \in I$ に対して $G = (G^\sharp)_\sharp \in (I^\sharp)_\sharp$ となるので $I \subseteq (I^\sharp)_\sharp$ が成り立つ. 逆に $G \in (I^\sharp)_\sharp$ とすると, 補題 3.19 より $G = F_\sharp$ となる $F \in I^\sharp$ が存在する. ここで

$$F = \sum_i H_i F_i^\sharp, \qquad H_i \in k[X_0, ..., X_n], \quad F_i \in I$$

と表されることから

$$G = F_\sharp = \left(\sum_i H_i F_i^\sharp\right)_\sharp = \sum_i (H_i)_\sharp (F_i^\sharp)_\sharp = \sum_i (H_i)_\sharp F_i \ \in I$$

となり, $(I^\sharp)_\sharp \subseteq I$ が得られる. 以上で $(I^\sharp)_\sharp = I$ が示された. ∎

補題 3.21 斉次イデアル $\widetilde{I} \subseteq k[X_0, ..., X_n]$ に対して $\widetilde{I} \subseteq (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$, および次が成り立つ.

$$(\widetilde{I}_\sharp)^\sharp = \{F \in k[X_0, ..., X_n] \mid F \text{ は斉次多項式で, ある } m \geq 0 \text{ に対して } X_0^m F \in \widetilde{I}\ \}$$

Proof　斉次多項式 $F_1, ...F_r$ が存在して $\widetilde{I} = \langle F_1, ...F_r \rangle$ と表される．ここで

$$F_i = X_0^{m_i} G_i, \quad m_i \geq 0, \quad G_i \text{ と } X_0 \text{ は互いに素}$$

と表すと，$((F_i)_\sharp)^\sharp = G_i$ であるから

$$F_i = X_0^{m_i} G_i = X_0^{m_i} ((F_i)_\sharp)^\sharp \in (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$$

が成り立つ．これより $\widetilde{I} = \langle F_1, ...F_r \rangle \subseteq (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$ が得られる．次に

$$\widetilde{J} = \{ F \in k[X_0, ..., X_n] \mid F \text{ は斉次多項式で, ある } m \geq 0 \text{ に対して } X_0^m F \in \widetilde{I} \}$$

とおく．$\widetilde{J}$ が斉次イデアルであることは明らかである．まず $(\widetilde{I}_\sharp)^\sharp \subseteq \widetilde{J}$ を示す．$(\widetilde{I}_\sharp)^\sharp = \langle (F_\sharp)^\sharp \mid F \in \widetilde{I} \rangle$ であるから $F \in \widetilde{I}$ に対して $(F_\sharp)^\sharp \in \widetilde{J}$ が成り立つことを示せばよい．$F = \sum_i F^{(i)}$ と斉次成分へ分解すると

$$F^{(i)} = X_0^{r_i} H_i, \quad r_i \geq 0, \quad H_i \text{ と } X_0 \text{ は互いに素}$$

と表される．$X_0^{r_i} ({F^{(i)}}_\sharp)^\sharp = F^{(i)} \in \widetilde{I}$ であるから $({F^{(i)}}_\sharp)^\sharp \in \widetilde{J}$ が成り立つ．一方適当な整数 $s_i \geq 0$ が存在して

$$(F_\sharp)^\sharp = \sum_i X_0^{s_i} ({F^{(i)}}_\sharp)^\sharp$$

と表されるので $(F_\sharp)^\sharp \in \widetilde{J}$ が成り立つ．従って $(\widetilde{I}_\sharp)^\sharp \subseteq \widetilde{J}$ が示された．

逆に $F \in \widetilde{J}$ とする．ある $m \geq 0$ が存在して $X_0^m F \in \widetilde{I}$ である．

$$F = X_0^\ell G, \quad \ell \geq 0, \quad G \text{ と } X_0 \text{ は互いに素}$$

と表すと $F' = X_0^{m+\ell} G \in \widetilde{I}$ が成り立つ．ここで

$$G = (F'_\sharp)^\sharp \in (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$$

となるので

$$F = X_0^\ell G \in (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$$

を得る．よって $\widetilde{J} \subseteq (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$ が示された．∎

補題 3.22 $\widetilde{I} \subseteq k[X_0, ..., X_n]$ が斉次イデアルのとき $\sqrt{\widetilde{I}}$ も斉次イデアルである．

Proof　任意に $F \in \sqrt{\widetilde{I}}$ を選び

$$F = \sum_j F^{(j)} = F^{(0)} + F^{(1)} + \cdots + F^{(d)}$$

と斉次成分に分解する． $F^{(j)} \in \sqrt{\widetilde{I}}$ が成り立つことを示せばよい． $F \in \sqrt{\widetilde{I}}$ より, ある自然数 N が存在して $F^N \in \widetilde{I}$ となる．ここで

$$F^N = (\sum_j F^{(j)})^N = (F^{(0)})^N + N(F^{(0)})^{N-1}F^{(1)} + \cdots\cdots + (F^{(d)})^N$$

となる． F^N の dN 次斉次成分は $(F^{(d)})^N$ であるが, $\widetilde{I}$ が斉次イデアルだから $(F^{(d)})^N \in \widetilde{I}$ となり， $F^{(d)} \in \sqrt{\widetilde{I}}$ が得られる．次に

$$F' = F^{(0)} + F^{(1)} + \cdots + F^{(d-1)} \in \sqrt{\widetilde{I}}$$

に同様の議論をすれば $F^{(d-1)} \in \sqrt{\widetilde{I}}$ が得られ, 以下同様にして $F^{(j)} \in \sqrt{\widetilde{I}}$ を得る． ∎

定理 3.23　(1)　イデアル $I \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ に対して $\sqrt{I^\sharp} = (\sqrt{I})^\sharp$ が成り立つ．

(2)　斉次イデアル $\widetilde{I} \subseteq k[X_0, ..., X_n]$ に対して $\sqrt{\widetilde{I}_\sharp} = \left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp$ が成り立つ．

Proof　(1)　$(\sqrt{I})^\sharp$ が斉次イデアルであることと, 補題 3.22 より $\sqrt{I^\sharp}$ も斉次イデアルであることを注意しておく．まず $\sqrt{I^\sharp} \subseteq (\sqrt{I})^\sharp$ を示す．任意の斉次多項式 $F \in \sqrt{I^\sharp}$ に対して $F \in (\sqrt{I})^\sharp$ を示せばよい．自然数 N が存在して $F^N \in I^\sharp$ となるから $(F^N)_\sharp \in (I^\sharp)_\sharp$ となる．p.75,(4) と補題 3.20 より

$$(F_\sharp)^N = (F^N)_\sharp \in (I^\sharp)_\sharp = I$$

が得られる．これより $F_\sharp \in \sqrt{I}$ となるので $(F_\sharp)^\sharp \in (\sqrt{I})^\sharp$ が成り立つ．ここで $F = X_0^m G$, G と X_0 は互いに素, と表すと， $G = (F_\sharp)^\sharp \in (\sqrt{I})^\sharp$ であるから $F = X_0^m G \in (\sqrt{I})^\sharp$ を得る．

逆に $F \in (\sqrt{I})^\sharp$ を斉次多項式とする．このとき補題 3.20 より $F_\sharp \in ((\sqrt{I})^\sharp)_\sharp = \sqrt{I}$ であるから, ある自然数 N に対して $(F_\sharp)^N \in I$ となる．p.75,(3) より

$$((F_\sharp)^\sharp)^N = ((F_\sharp)^N)^\sharp \in I^\sharp$$

となり，$(F_\sharp)^\sharp \in \sqrt{I^\sharp}$ を得る．ここで $F = X_0^m G$ (G と X_0 は互いに素) と表すと，$(F_\sharp)^\sharp = G \in \sqrt{I^\sharp}$ であるから $F = X_0^m G \in \sqrt{I^\sharp}$ となるので，$(\sqrt{I})^\sharp \subseteq \sqrt{I^\sharp}$ が成り立つ．以上で (1) が示された．

(2)　$F \in \sqrt{\widetilde{I}_\sharp}$ とすると, ある自然数 N が存在して $F^N \in \widetilde{I}_\sharp$ となることから, $(F^N)^\sharp = (F^\sharp)^N \in (\widetilde{I}_\sharp)^\sharp$ が成り立つ．従って補題 3.21 より, ある $m \geq 0$ が存在して $X_0^m(F^\sharp)^N \in \widetilde{I}$ となる．ここで $N' = \max\{m, N\}$ とすると $(X_0F^\sharp)^{N'} \in \widetilde{I}$ となり，$X_0F^\sharp \in \sqrt{\widetilde{I}}$ が得られる．これより

$$(X_0F^\sharp)_\sharp = (F^\sharp)_\sharp = F \in \left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp$$

となるので $\sqrt{\widetilde{I}_\sharp} \subseteq \left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp$ が成り立つ．逆に $F \in \left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp$ とすると，ある $G \in \sqrt{\widetilde{I}}$ が存在して $F = G_\sharp$ と表される．$G^r \in \widetilde{I}$ とすると

$$(G^r)_\sharp = (G_\sharp)^r = F^r \in (\widetilde{I})_\sharp$$

となるので $F \in \sqrt{(\widetilde{I})_\sharp}$ を得る．ゆえに $\left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp \subseteq \sqrt{\widetilde{I}_\sharp}$ が成り立ち, (2) が示された. ∎

$k[X_1, ..., X_n]$ のイデアル I から定まる代数的集合 $V = \mathbf{V}(I)$ に対して

$$V^\sharp := \widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp)$$

と定める．$V^\sharp$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の射影代数的集合であり, I の選び方によらない (定理 3.24)．また $k[X_0, ..., X_n]$ の斉次イデアル $\widetilde{I}$ から定まる射影代数的集合 $\widetilde{V} = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I})$ に対して

$$\widetilde{V}_\sharp := \mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp)$$

と定める．$\widetilde{V}_\sharp$ は $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合であり, $\widetilde{I}$ の選び方によらない (定理 3.25).

定理 3.24 イデアル $I, J \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ が $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J)$ を満たすとき $\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) = \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp)$ が成り立つ.

Proof　仮定より $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$ となるので，零点定理 (定理 2.10) より $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ となり，$(\sqrt{I})^\sharp = (\sqrt{J})^\sharp$ が得られる．さらに定理 3.23 より $\sqrt{I^\sharp} = \sqrt{J^\sharp}$ を得る．ここで $I^\sharp = k[X_0, ..., X_n]$ と仮定すると

$$\sqrt{J^\sharp} = \sqrt{I^\sharp} = k[X_0, ..., X_n]$$

より $J^\sharp = k[X_0, ..., X_n]$ を得る．従ってこの場合 $\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) = \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp)$ が成り立つ．$J^\sharp = k[X_0, ..., X_n]$ と仮定しても同様であるから $I^\sharp$, $J^\sharp$ は $k[X_0, ..., X_n]$ の真のイデアルであるとしてよい．$\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) = \emptyset$ と仮定すると補題 3.7 より

$$\sqrt{J^\sharp} = \sqrt{I^\sharp} = \langle X_0, ..., X_n \rangle$$

となるので $\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) = \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp) = \emptyset$ が成り立つ．$\widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp) = \emptyset$ と仮定しても同様であるから，$\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp), \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp) \neq \emptyset$ としてよい．このとき射影零点定理 (定理 3.8) より $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp)) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp))$ が成り立ち，定理 3.4 より $\widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) = \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp)$ が得られる．

∎

定理 3.25 斉次イデアル $\widetilde{I}, \widetilde{J} \subseteq k[X_0, ..., X_n]$ が $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I}) = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{J})$ を満たすとき $\mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp) = \mathbf{V}(\widetilde{J}_\sharp)$ が成り立つ．

Proof　$\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I}) = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{J}) = \emptyset$ のときは，射影零点定理より

$$\{F \in k[X_0, ..., X_n] \mid \deg F \geq N, F \text{ は斉次多項式 } \} \subseteq \widetilde{I},$$

$$\{F \in k[X_0, ..., X_n] \mid \deg F \geq N', F \text{ は斉次多項式 } \} \subseteq \widetilde{J}$$

となる自然数 N, N' が存在する．これより $1 = (X_0^N)_\sharp \in \widetilde{I}_\sharp$, $1 = (X_0^{N'})_\sharp \in \widetilde{J}_\sharp$ となるから，$\widetilde{I}_\sharp = \widetilde{J}_\sharp = k[X_1, ..., X_n]$ を得る．従ってこの場合は $\mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp) = \mathbf{V}(\widetilde{J}_\sharp) = \emptyset$ が成り立つ．次に $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I}) = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{J}) \neq \emptyset$ とすると $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I})) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{J}))$ となるので，射影零点定理より $\sqrt{\widetilde{I}} = \sqrt{\widetilde{J}}$ が得られ，これより $\left(\sqrt{\widetilde{I}}\right)_\sharp = \left(\sqrt{\widetilde{J}}\right)_\sharp$ が成り立つ．よって定理 3.23 より $\sqrt{\widetilde{I}_\sharp} = \sqrt{\widetilde{J}_\sharp}$ となり，零点定理 (定理 2.10) より $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\widetilde{J}_\sharp))$ となるので，定理 2.2 より $\mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp) = \mathbf{V}(\widetilde{J}_\sharp)$ が成り立つ．

∎

定理 3.26 (1)　代数的集合 $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ が $V \subseteq W$ を満たすとき $V^\sharp \subseteq W^\sharp$ が成り立つ．

(2)　射影代数的集合 $\widetilde{V}, \widetilde{W} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ が $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{W}$ を満たすとき $\widetilde{V}_\sharp \subseteq \widetilde{W}_\sharp$ が成り立つ．

Proof　(1)　$\mathbf{I}(V) = I$, $\mathbf{I}(W) = J$ とおくと p.25, (1), (8) より $I \supseteq J$, および $\mathbf{V}(I) = V$, $\mathbf{V}(J) = W$ が成り立つので，$I^\sharp \supseteq J^\sharp$ となり

$$V^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp) \subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(J^\sharp) = W^\sharp$$

が得られる.

(2) $\widetilde{I} = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}),\ \widetilde{J} = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{W})$ とおく. p.61,(1), (8) より $\widetilde{I} \supseteq \widetilde{J}$, および $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I}) = \widetilde{V}$, $\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{J}) = \widetilde{W}$ が成り立つので, $\widetilde{I}_\sharp \supseteq \widetilde{J}_\sharp$ となり

$$V_\sharp = \mathbf{V}(\widetilde{I}_\sharp) \subseteq \mathbf{V}(\widetilde{J}_\sharp) = W_\sharp$$

が得られる. ∎

写像 $\varphi_0 : \mathbb{A}^n(k) \ni (a_1, ..., a_n) \mapsto (1 : a_1 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ は中への単射であり,

$$U_0 := \{(p_0 : ... : p_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid p_0 \neq 0\}$$

とおくと, φ_0 は U_0 への全単射を誘導する.

定理 3.27 (1) 代数的集合 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ に対して $\varphi_0(V) = V^\sharp \cap U_0$ が成り立つ.

(2) 射影代数的集合 $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ に対して $\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}) = \widetilde{V}_\sharp$ が成り立つ.

Proof (1) イデアル I により $V = \mathbf{V}(I)$ と表すと, 定義より

$$I^\sharp = \langle F^\sharp \mid F \in I \rangle, \qquad V^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}(I^\sharp)$$

である. $\varphi_0(V)$ から任意に $\varphi_0(a_1, ..., a_n) = (1 : a_1 : ... : a_n)$ を選ぶ. このとき $(a_1, ..., a_n) \in V$ であるから, 任意の $F \in I$ に対して $F(a_1, ..., a_n) = 0$ が成り立ち

$$F^\sharp(1, a_1, ..., a_n) = F(a_1, ..., a_n) = 0$$

となるので $(1 : a_1 : ... : a_n) \in V^\sharp$ を得る. 従って $\varphi_0(V) \subseteq V^\sharp \cap U_0$ が示された.

逆に $P \in V^\sharp \cap U_0$ を任意に選び, P の斉次座標の１つを $(1 : a_1 : ... : a_n)$ とする. このとき任意の $F \in I$ に対して $F(a_1, ..., a_n) = F^\sharp(1, a_1, ..., a_n) = 0$ が成り立つので $(a_1, ..., a_n) \in V$ となり, $P \in \varphi_0(V)$ を得る. 従って $\varphi_0(V) \supseteq V^\sharp \cap U_0$ も成り立つので (1) が示された.

(2) 斉次イデアル $\widetilde{I}$ により $\widetilde{V} = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{I})$ と表すと, 定義より

$$\widetilde{I}_\sharp = \langle G_\sharp \mid G \in \widetilde{I} \rangle, \qquad V_\sharp = \mathbf{V}(I_\sharp)$$

である. 任意に $(a_1, ..., a_n) \in \varphi_0^{-1}(\widetilde{V})$ を選ぶと

$$\varphi_0(a_1, ..., a_n) = (1 : a_1 : ... : a_n) \in \widetilde{V}$$

であるから, 任意の斉次多項式 $G \in \widetilde{I}$ に対して

$$G_\sharp(a_1, ..., a_n) = G(1, a_1, ..., a_n) = 0$$

が成り立つ. 従って $(a_1, ..., a_n) \in \widetilde{V}_\sharp$ となるので $\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}) \subseteq \widetilde{V}_\sharp$ が示された.

逆に $(a_1, ..., a_n) \in \widetilde{V}_\sharp$ を任意に選ぶと, 任意の $G \in \widetilde{I}$ に対して

$$G(1, a_1, ..., a_n) = G_\sharp(a_1, ..., a_n) = 0$$

となるので

$$\varphi_0(a_1, ..., a_n) = (1 : a_1 : ... : a_n) \in \widetilde{V}$$

を得る. 従って $\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}) \supseteq \widetilde{V}_\sharp$ も成り立つので (2) が示された. ∎

補題 3.28 $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合 B に対して次の等式が成り立つ.

$$\widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0) = \{F \in k[X_0, ..., X_n] \mid \text{ある } m > 0 \text{ が存在して } X_0^m F \in \widetilde{\mathbf{I}}(B)\}$$

Proof 等式の右辺を $\widetilde{J}$ とおく. $\widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0)$ は斉次イデアルであり, $\widetilde{\mathbf{I}}(B)$ が斉次イデアルであることから $\widetilde{J}$ も斉次イデアルである. 斉次多項式 $F \in \widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0)$ を任意に選ぶと, 任意の自然数 m に対して $P \in B \cap U_0$ のときは, $F(P) = 0$ より $(X_0^m F)(P) = 0$ となり, $P \in B - U_0$ のときも P の斉次座標が $(0 : a_1 : ... : a_n)$ と表されることから $(X_0^m F)(0, a_1, ..., a_n) = 0$ となるので $X_0^m F \in \widetilde{\mathbf{I}}(B)$ が成り立つ. よって $F \in \widetilde{J}$ となり, $\widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0) \subseteq \widetilde{J}$ が成り立つ.

逆に $F \in \widetilde{J}$ とすると, ある自然数 m が存在して $X_0^m F \in \widetilde{\mathbf{I}}(B)$ となる. $P \in B \cap U_0$ を任意に選び, その斉次座標を $(1 : a_1 : ... : a_n)$ とすると

$$(X_0^m F)(1, a_1, ..., a_n) = F(1, a_1, ..., a_n) = 0$$

が成り立つ. よって $F \in \widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0)$ となり, $\widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0) \supseteq \widetilde{J}$ が成り立つ. 以上で等式が示された. ∎

定理 3.29 (1) $\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 A に対して $\mathbf{I}(A)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))$, $\mathbf{I}(A) = \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))_\sharp$ が成り立つ.

(2) $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合 B に対して $\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0)_\sharp = \mathbf{I}(\varphi_0^{-1}(B))$,
$(\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(B \cap U_0)$ が成り立つ.

Proof まず $\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 A に対して

$$\mathbf{I}(A)^\sharp \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A)) \tag{3.4}$$

を示す. $F \in \mathbf{I}(A)$ を任意に選ぶと, 任意の $(1 : a_1 : ... : a_n) \in \varphi_0(A)$ に対して $(a_1, ..., a_n) \in A$ であることから

$$F^\sharp(1, a_1, ..., a_n) = F(a_1, ..., a_n) = 0$$

となるので $F^\sharp \in \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))$ が成り立つ. $\mathbf{I}(A)^\sharp = \langle F^\sharp \mid F \in \mathbf{I}(A) \rangle$ であるから (3.4) が得られる. 次に $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合 B に対して

$$\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp \subseteq \mathbf{I}(\varphi_0^{-1}(B)) \tag{3.5}$$

を示す. $G \in \widetilde{\mathbf{I}}(B)$ を任意に選ぶと, 任意の $(a_1, ..., a_n) \in \varphi_0^{-1}(B)$ に対して $(1 : a_1 : ... : a_n) \in B$ であるから,

$$G_\sharp(a_1, ..., a_n) = G(1, a_1, ..., a_n) = 0$$

となり, $G_\sharp \in \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0^{-1}(B))$ を得る. $\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp = \{G_\sharp \mid G \in \widetilde{\mathbf{I}}(B)\}$ であるから (3.5) が成り立つ.

(3.4) より $(\mathbf{I}(A)^\sharp)_\sharp \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))_\sharp$ となるが, 補題 3.20 を適用して

$$\mathbf{I}(A) \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))_\sharp \tag{3.6}$$

が得られる. 補題 3.21 と (3.5) より

$$\widetilde{\mathbf{I}}(B) \subseteq (\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp)^\sharp \subseteq \mathbf{I}(\varphi_0^{-1}(B))^\sharp \tag{3.7}$$

が得られる. 以上の結果から (1), (2) を導くことにする.

(1)　(3.7) において $B=\varphi_0(A)$ とすると，φ_0 が単射であることから

$$\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A)) \subseteq \mathbf{I}(\varphi_0^{-1}(\varphi_0(A)))^\sharp = \mathbf{I}(A)^\sharp$$

を得る．これと (3.4) より前半が得られ, 前半と補題 3.20 より後半が導かれる．

(2)　補題 3.21 において $\widetilde{I}=\widetilde{\mathbf{I}}(B)$ とすると, 補題 3.28 より

$$\widetilde{\mathbf{I}}(B) \subseteq (\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(B\cap U_0)$$

が成り立ち, 後半を得る．さらに $((\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp)^\sharp)_\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(B\cap U_0)_\sharp$ に補題 3.20 を適用すると $\widetilde{\mathbf{I}}(B)_\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(B\cap U_0)_\sharp$ となるが，$A=\varphi_0^{-1}(B)$ として (3.6) を適用すると，$\varphi_0(A)=B\cap U_0$ であるから $\mathbf{I}(\varphi_0^{-1}(B)) \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(B\cap U_0)_\sharp$ を得る．これと (3.5) より前半が得られる． ∎

定理 3.30　$\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 A に対して $(\mathbf{V}(\mathbf{I}(A)))^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A)))$ が成り立つ．特に $\widetilde{V}=(\mathbf{V}(\mathbf{I}(A)))^\sharp$ は $\varphi_0(A)$ を含む最小の射影代数的集合である．さらに $\widetilde{V}=\widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r$ と既約成分に分解すると $\widetilde{V}_i \not\subseteq \mathbb{P}^n(k)-U_0$ が成り立つ．

Proof　p.78 で与えた定義と定理 3.29, (1) より,

$$\widetilde{V} = (\mathbf{V}(\mathbf{I}(A)))^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A)))$$

が成り立つ．これより $\widetilde{V} \supseteq \varphi_0(A)$ となるので $\widetilde{V}$ は $\varphi_0(A)$ を含む射影代数的集合である．次に射影代数的集合 $\widetilde{V}'$ が $\widetilde{V}' \supseteq \varphi_0(A)$ を満たすと仮定すると，$\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}') \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))$ より

$$\widetilde{V}' = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}')) \supseteq \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(A))) = \widetilde{V}$$

となるので $\widetilde{V}$ は $\varphi_0(A)$ を含む最小の射影代数的集合である．

最後に $\widetilde{V}=\widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r$ と既約成分に分解され, ある i に対して $\widetilde{V}_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)-U_0$ であったと仮定する．このとき $P\in\widetilde{V}_i$ に対して $P\notin U_0$ であるから, 点 P の斉次座標は $(0:p_1:\ldots:p_n)$ のようになるので $\varphi_0(A)\cap\widetilde{V}_i=\emptyset$ である．従って

$$\varphi_0(A) \subseteq \widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_{i-1}\cup\widetilde{V}_{i+1}\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r \subsetneq \widetilde{V}$$

となり $\widetilde{V}$ が $\varphi_0(A)$ を含む最小の射影代数的集合であることに矛盾する．以上で定理が証明された． ∎

定理 3.30 で A として代数的集合 V をとると $V=\mathbf{V}(\mathbf{I}(V))$ となるので

$$V^\sharp=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V)))$$

を得る．これより次の系が得られる．

系 3.31 $V\subseteq\mathbb{A}^n(k)$ が代数的集合のとき，射影代数的集合 $V^\sharp$ は $\mathbb{P}^n(k)-U_0$ に含まれる既約成分をもたない．

定理 3.32 $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 $V,V_1,...,V_r$, および $\mathbb{P}^n(k)$ の射影代数的集合 $\widetilde{V},\widetilde{V}_1,...,\widetilde{V}_r$ に対して次が成り立つ．

(1) $V=V_1\cup\cdots\cup V_r$ ならば $V^\sharp=V_1^\sharp\cup\cdots\cup V_r^\sharp$

(2) $\widetilde{V}=\widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r$ ならば $\widetilde{V}_\sharp=(\widetilde{V}_1)_\sharp\cup\cdots\cup(\widetilde{V}_r)_\sharp$

Proof (1) 定理 3.30 で $A=V,\ V_i$ とすると

$$V^\sharp=(\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)))^\sharp=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V))),\qquad V_i^\sharp=(\mathbf{V}(\mathbf{I}(V_i)))^\sharp=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_i)))$$

が得られる．ここで $V=V_1\cup\cdots\cup V_r$ であるから

$$\begin{aligned}V^\sharp&=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_1\cup\cdots\cup V_r)))=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_1)\cup\cdots\cup\varphi_0(V_r)))\\&=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_1))\cap\cdots\cap\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_r)))=\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_1)))\cup\cdots\cup\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V_r)))\\&=V_1^\sharp\cup\cdots\cup V_r^\sharp\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) $\widetilde{V}=\widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r$ より

$$\varphi_0^{-1}(\widetilde{V})=\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}_1\cup\cdots\cup\widetilde{V}_r)=\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}_1)\cup\cdots\cup\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}_r)$$

が成り立つ．ここで定理 3.27, (2) より射影代数的集合 $\widetilde{V},\ \widetilde{V}_i$ に対して

$$\varphi_0^{-1}(\widetilde{V})=\widetilde{V}_\sharp,\qquad\varphi_0^{-1}(\widetilde{V}_i)=(\widetilde{V}_i)_\sharp$$

が成り立つことから (2) が得られる． ∎

補題 3.33 射影代数的集合 $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ が $\mathbb{P}^n(k) - U_0$ に含まれる既約成分をもたないとき $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ が成り立つ.

Proof　$\widetilde{V} \supseteq \widetilde{V} \cap U_0$ より $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) \subseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ が成り立つので $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) \supseteq \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ を示せばよい. 任意に $F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ を選ぶ. $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ が斉次イデアルであるから, F は斉次多項式であるとしてよい. 任意に $P \in \widetilde{V}$ を選び, $F(P) = 0$ となることを示せばよいが, $P \in \widetilde{V} \cap U_0$ のときは $F(P) = 0$ が成り立つので $P \in \widetilde{V} - U_0$ としてよい. このとき P の斉次座標は $(0 : p_1 : ... : p_n)$ と表されるから $(X_0F)(P) = 0$ となり, $X_0F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})$ が成り立つ. ここで $\widetilde{V}$ を既約成分に分解し

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{V}_r$$

と表すと, 仮定より $\widetilde{V}_i \not\subseteq \mathbb{P}^n(k) - U_0$ が成り立つ. 一方

$$\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_1) \cap \cdots \cap \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_r)$$

であるから,

$$X_0F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_i) \qquad (i = 1, ..., r)$$

となるが, $\widetilde{V}_i \not\subseteq \mathbb{P}^n(k) - U_0$ より $\widetilde{V}_i \not\subseteq \widetilde{\mathbf{V}}(X_0)$ となるので

$$X_0 \notin \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_i) \qquad (i = 1, ..., r)$$

が得られ, $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_i)$ が素イデアルであることから $F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_i)$ が成り立つ. 以上から

$$F \in \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_1) \cap \cdots \cap \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}_r) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})$$

が得られるので $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ が示された. ∎

定理 3.34 次の写像 φ は全単射で, 逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1}(\widetilde{V}) = \widetilde{V}_\sharp$ を満たす.

$$\varphi : \{\mathbb{A}^n(k) \text{ の代数的集合}\} \ni V \longmapsto V^\sharp \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}^n(k) - U_0 \text{ に含まれる既約成分をもたな} \\ \text{い } \mathbb{P}^n(k) \text{ の射影代数的集合} \end{array} \right\}$$

Proof　系 3.31 より $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V に対して, 射影代数的集合 $V^\sharp$ は $\mathbb{P}^n(k) - U_0$ に含まれる既約成分をもたないことを注意しておく. まず φ が単射であることを示そう. 代数的集合 $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ が $V^\sharp = W^\sharp$ を満たすと仮

定する．$I = \mathbf{I}(V)$, $J = \mathbf{I}(W)$ とおくと

$$V = \mathbf{V}(I), \quad W = \mathbf{V}(J), \quad V^\sharp = \mathbf{V}(I^\sharp), \quad W^\sharp = \mathbf{V}(J^\sharp)$$

である．$V^\sharp = W^\sharp \neq \emptyset$ のときは射影零点定理 (定理 3.8), 定理 3.23, (1) に注意すれば

$$(\sqrt{I})^\sharp = \sqrt{I^\sharp} = \mathbf{I}(V^\sharp) = \mathbf{I}(W^\sharp) = \sqrt{J^\sharp} = (\sqrt{J})^\sharp$$

を得る．従って補題 3.20 より

$$I = \sqrt{I} = \big((\sqrt{I})^\sharp\big)_\sharp = \big((\sqrt{J})^\sharp\big)_\sharp = \sqrt{J} = J$$

となるので $V = \mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J) = W$ が成り立つ．一方 $V^\sharp = W^\sharp = \emptyset$ のときは射影零点定理より $X_0^N \in I^\sharp$, $X_0^{N'} \in J^\sharp$ を満たす自然数 N, N' が存在するので

$$(X_0^N)_\sharp = 1 \in (I^\sharp)_\sharp = I, \qquad (X_0^{N'})_\sharp = 1 \in (J^\sharp)_\sharp = J$$

より $I = J = k[X_1, ..., X_n]$ となり $V = \mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J) = W = \emptyset$ が得られる．以上で φ が単射であることが示された．

次に $\mathbb{P}^n(k) - U_0$ に含まれる既約成分をもたない射影代数的集合 $\widetilde{V}$ に対して,

$$(\widetilde{V}_\sharp)^\sharp = \widetilde{V}$$

が成り立つことを示そう．これから φ が全射であること，$\varphi^{-1}(\widetilde{V}) = \widetilde{V}_\sharp$ であることが導かれるのは明らかである．$\widetilde{V} = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}))$ より $\widetilde{V}_\sharp = \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})_\sharp)$ となるので $(\widetilde{V}_\sharp)^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}((\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})_\sharp)^\sharp)$ が成り立つ．また定理3.29, (2) より $(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})_\sharp)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ を, 補題 3.33 より $\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V}) = \widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)$ を得る．従って

$$(\widetilde{V}_\sharp)^\sharp = \widetilde{\mathbf{V}}((\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})_\sharp)^\sharp) = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V} \cap U_0)) = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(\widetilde{V})) = \widetilde{V}$$

が成り立つ．以上で定理が証明された． ∎

定理 3.35 $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V が既約であることと，$V^\sharp$ が既約であることとは同値である．

Proof　$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V が可約であるとすると

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \neq V, \quad V_2 \neq V$$

を満たす代数的集合 V_1, V_2 が存在するので定理 3.32 より

$$V^\sharp = V_1^\sharp \cup V_2^\sharp$$

が成り立つ. ここで定理 3.34 より $V \mapsto V^\sharp$ は単射であるから $V_1^\sharp \neq V^\sharp$, $V_2^\sharp \neq V^\sharp$ となるので $V^\sharp$ も可約である. 逆に $V^\sharp$ が可約であるとすると

$$V^\sharp = \widetilde{V}_1 \cup \widetilde{V}_2, \quad \widetilde{V}_1 \neq V^\sharp, \quad \widetilde{V}_2 \neq V^\sharp$$

を満たす射影代数的集合 $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ が存在する. 定理 3.32, 定理 3.34 より

$$V = (V^\sharp)_\sharp = (\widetilde{V}_1)_\sharp \cup (\widetilde{V}_2)_\sharp$$

となるが, $\widetilde{V} \mapsto \widetilde{V}_\sharp$ が単射であるから $(\widetilde{V}_1)_\sharp \neq V$, $(\widetilde{V}_2)_\sharp \neq V$ が成り立つので V も可約である. 以上で定理が証明された. ∎

U_0 と同様に

$$U_i := \{(p_0 : \ldots : p_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid p_i \neq 0\}$$

と定義すると, 次の写像 φ_i も全単射となり, φ_0 と同様のことが成り立つ.

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n(k) \ni (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto (a_1 : \ldots : a_{i-1} : 1 : a_i : \ldots : a_n) \in U_i$$

定理 3.36 $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合 B に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) $i = 0, \ldots, n$ に対して $\varphi_i^{-1}(B)$ は $\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合である.

(2) B は射影代数的集合である.

Proof (1) ⇒ (2) $i = 0, \ldots, n$ に対して $\varphi_i^{-1}(B)$ が代数的集合であるとする. $\bar{B} = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(B))$ とおくと $\bar{B}$ は射影代数的集合である. 定理 3.27, 定理 3.29 において, φ_0^{-1} を φ_i^{-1} に置き換えても成り立つから, $i = 0, \ldots, n$ に対して

$$\varphi_i^{-1}(\bar{B}) = \varphi_i^{-1}(\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(B))) = \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{I}}(B)_{\sharp_i}) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(\varphi_i^{-1}(B))) = \varphi_i^{-1}(B)$$

が成り立つ. ただし $\widetilde{\mathbf{I}}(B)_{\sharp_i}$ は U_i における非斉次化を表す. このとき任意の $i = 0, \ldots, n$ に対して $\bar{B} \cap U_i = B \cap U_i$ となることから $\bar{B} = B$ が得られるので, B は射影代数的集合である.

(2) ⇒ (1)　B が射影代数的集合であるとすると，$B = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{\mathbf{I}}(B))$ が成り立つ．このとき定理 3.27 より $i = 0, ..., n$ に対して

$$\varphi_i^{-1}(B) = B_{\sharp_i} = \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{I}}(B)_{\sharp_i})$$

であるから，$\varphi_i^{-1}(B)$ は代数的集合である．■

$\mathbb{A}^n(k)$ の代数的集合 V に対して, 射影代数的集合 $V^\sharp$ を V の射影閉包という．V が既約な代数的集合, すなわち閉部分多様体であるとき, 定理 3.35 より，V の射影閉包 $V^\sharp$ は射影多様体である．

補題 3.37 閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ に対して，$\mathbf{I}(V)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$，$\widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)_\sharp = \mathbf{I}(V)$ が成り立つ．

Proof　定理 3.27, 定理 3.29 より $\mathbf{I}(V)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(\varphi_0(V)) = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp \cap U_0)$ が成り立つ．定理 3.30 より $V^\sharp$ は $\mathbb{P}^n(k) - U_0$ に含まれる既約成分をもたないので, 補題 3.33 より $\widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp) = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp \cap U_0)$ が成り立つ．従って $\mathbf{I}(V)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$ を得る．これと補題 3.20 より

$$\mathbf{I}(V) = (\mathbf{I}(V)^\sharp)_\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)_\sharp$$

も成り立つ．■

$V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ が閉部分多様体のとき, 定理 3.18 において $V^\sharp - \widetilde{\mathbf{V}}(X_0)$ 上の正則関数の全体 $O(V^\sharp - \widetilde{\mathbf{V}}(X_0))$ が次の $O_h(V^\sharp)[\frac{1}{x_0}]_0$ に一致することを示した．

$$O_h(V^\sharp)\left[\frac{1}{x_0}\right]_0 = \left\{ \frac{f}{x_0^d} \in k_h(V^\sharp) \,\middle|\, f \in O_h(V^\sharp) \text{ は } d \text{ 次の斉次元} \right\}$$

ただし $x_0 = X_0 \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$ である．次に $O(V^\sharp - \widetilde{\mathbf{V}}(X_0))$ と $O(V)$ が同型になることを示す．

定理 3.38 閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, およびその射影閉包 $V^\sharp$ に対して, 次の写像 ψ は k 同型である．

$$\psi : O(V^\sharp - \widetilde{\mathbf{V}}(X_0)) \ni \frac{F \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)}{x_0^{\deg F}} \longmapsto F_\sharp \bmod \mathbf{I}(V) \in O(V)$$

これより k 同型 $k(V) \simeq k(V^\sharp)$ が誘導される．

Proof $\varphi : k[X_0, ..., X_n] \ni F \mapsto F_\sharp \in k[X_1, ..., X_n]$ が全射 k 準同型であることと, 補題 3.37 により $\widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)_\sharp = \mathbf{I}(V)$ が成り立つことから次の $\bar{\varphi}$ は全射 k 準同型である.

$$\bar{\varphi} : O_h(V^\sharp) \ni F \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp) \longmapsto F_\sharp \bmod \mathbf{I}(V) \in O(V)$$

ここで

$$\psi : O_h(V^\sharp)\left[\frac{1}{x_0}\right] \ni \frac{f}{x_0^d} \longmapsto \bar{\varphi}(f) \in O(V)$$

と定める. 以下 ψ が well-defined, かつ k 同型であることを示す.

$\frac{f}{x_0^d} = \frac{f'}{x_0^{d'}}$ とする. ただし $f, f' \in O_h(V^\sharp)$ は斉次元で, $\deg f = d, \deg f' = d'$ とする. このとき $fx_0^{d'} = f'x_0^d$ より $\bar{\varphi}(fx_0^{d'}) = \bar{\varphi}(f'x_0^d)$ となるので, $\bar{\varphi}(f)\bar{\varphi}(x_0)^{d'} = \bar{\varphi}(f')\bar{\varphi}(x_0)^d$ より $\bar{\varphi}(f) = \bar{\varphi}(f')$ を得る. よって ψ は well-defined である.

ψ が k 準同型であることは容易に確かめられるので, 次に全射であることを示す. $G \bmod \mathbf{I}(V) \in O(V)$ に対して, $\bar{\varphi}$ が全射であるから, $\bar{\varphi}(g) = G \bmod \mathbf{I}(V)$ を満たす $g \in O_h(V^\sharp)$ が存在する. $\deg g = d$ とすると

$$\psi\left(\frac{g}{x_0^d}\right) = \bar{\varphi}(g) = G \bmod \mathbf{I}(V)$$

となるから ψ は 全射である.

最後に ψ が単射であることを示す. $\psi\left(\frac{f}{x_0^d}\right) = \psi\left(\frac{f'}{x_0^{d'}}\right)$ と仮定する. ただし $\deg f = d, \deg f' = d'$ であり, F, F' は

$$f = F \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp), \qquad f' = F' \bmod \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$$

を満たす斉次多項式とする. 仮定より $\bar{\varphi}(f) = \bar{\varphi}(f')$ であるから $F_\sharp - F'_\sharp \in \mathbf{I}(V)$ となるが

$$F = X_0^m G, \quad F' = X_0^{m'} G' \quad (X_0 \text{ と } G\,G' \text{ は互いに素})$$

と表すと, $F_\sharp = G_\sharp$, $F'_\sharp = G'_\sharp$ であるから

$$F_\sharp - F'_\sharp = G_\sharp - G'_\sharp \in \mathbf{I}(V)$$

が成り立つ．一方, 補題 3.37 より $\mathbf{I}(V)^\sharp = \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$ であるから

$$(G_\sharp - G'_\sharp)^\sharp \in \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$$

が得られる．ここで $\deg G \geq \deg G'$ として一般性を失わないので， $\deg G - \deg G' = s$ とおくと

$$(G_\sharp - G'_\sharp)^\sharp = G - X_0^s G' \in \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp)$$

を得る．これより

$$\begin{aligned} X_0^{\deg G' + m + m'}(G - X_0^s G') &= X_0^{\deg G'}(X_0^{m'} F - X_0^{m+s} F') \\ &= X_0^{d'} F - X_0^d F' \in \widetilde{\mathbf{I}}(V^\sharp) \end{aligned}$$

が成り立つので， $\frac{f}{x_0^d} = \frac{f'}{x_0^{d'}}$ が得られる．ゆえに ψ は単射である．以上で ψ が k 同型であることが示された．これより k 同型 $k(V) \simeq k(V^\sharp)$ が誘導されることは明らかである． ∎

注　定理 3.38 の同型 ψ は次を満たすことを注意しておく．ただし f は $O_h(V^\sharp)$ の斉次元である．

$$\frac{f}{x_0^{\deg f}}(1 : a_1 : \cdots : a_n) = \psi\left(\frac{f}{x_0^{\deg f}}\right)(a_1, ..., a_n)$$

3.4 射と射影変換

射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ 上の有理関数 $f_0, ..., f_m \in k(V)$ が $(f_0, ..., f_m) \neq (0, ..., 0)$ を満たすとする．このとき

$$Z_i(f_0, ..., f_m) := \begin{cases} \bigcup_j \left\{\frac{f_j}{f_i} \text{ の極}\right\}, & f_i \neq 0 \\ V, & f_i = 0 \end{cases}$$

と定め, $Z(f_0, ..., f_m) := \bigcap_i Z_i(f_0, ..., f_m)$ とおく．定理3.16 より $Z_i(f_0, ..., f_m)$, $Z(f_0, ..., f_m)$ は射影代数的集合である．以下 $Z_i = Z_i(f_0, ..., f_m)$, $Z = Z(f_0, ..., f_m)$ と略記する．

$V - Z = V - \bigcap_i Z_i = \bigcup_i (V - Z_i)$ であるから， $P \in V - Z$ のとき $P \in V - Z_i$ とな

る i が存在し, 有理関数 $\frac{f_0}{f_i}, ..., \frac{f_m}{f_i}$ が P で定義されるので $\mathbb{P}^m(k)$ の点

$$\left(\frac{f_0}{f_i}(P) : ... : \frac{f_m}{f_i}(P)\right)$$

が定まる. さらに $P \in V - Z_j$ でもあるとすると

$$\begin{aligned}\left(\frac{f_0}{f_i}(P) : ... : \frac{f_m}{f_i}(P)\right) &= \left(\frac{f_0(P)}{f_i(P)} : ... : \frac{f_m(P)}{f_i(P)}\right) = \left(\frac{f_j(P)}{f_i(P)}\frac{f_0(P)}{f_j(P)} : ... : \frac{f_j(P)}{f_i(P)}\frac{f_m(P)}{f_j(P)}\right) \\ &= \left(\frac{f_0(P)}{f_j(P)} : ... : \frac{f_m(P)}{f_j(P)}\right) = \left(\frac{f_0}{f_j}(P) : ... : \frac{f_m}{f_j}(P)\right)\end{aligned}$$

が成り立つので, 写像

$$V - Z \ni P \longmapsto \left(\frac{f_0}{f_i}(P) : ... : \frac{f_m}{f_i}(P)\right) \in \mathbb{P}^m(k) \qquad (P \notin Z_i)$$

が定義できる. この写像を $(f_0, ..., f_m)$ が定義する有理写像といい,

$$\varphi : V \ni P \dashrightarrow (f_0(P) : ... : f_m(P)) \in \mathbb{P}^m(k)$$

と表す. 有理写像は必ずしも V のすべての点で定義されているわけではない. 特に $Z = \bigcap_i Z_i = \emptyset$ のとき, 写像

$$\varphi : V \ni P \longmapsto (f_0(P) : ... : f_m(P)) \in \mathbb{P}^m(k)$$

を $(f_0, ..., f_m)$ が定義する射という.

$f_0, ..., f_m \in O_h(V)$ が同じ次数を持つ斉次元のとき, 有理写像

$$\varphi : V \ni P \dashrightarrow \left(\frac{f_0}{f_i}(P) : ... : \frac{f_m}{f_i}(P)\right) \in \mathbb{P}^m(k)$$

を $(f_0, ..., f_m)$ が定義する有理写像という. これは i の選び方によらない. また $Z = \emptyset$ のとき, 射

$$\varphi : V \ni P \longmapsto \left(\frac{f_0}{f_i}(P) : ... : \frac{f_m}{f_i}(P)\right) \in \mathbb{P}^m(k)$$

を $(f_0, ..., f_m)$ が定義する射という.

写像 $\varphi : V \longmapsto \mathbb{P}^m(k)$ が V から $\mathbb{P}^m(k)$ への射であるとは, φ がある $(f_0, ..., f_m)$ で定義される射 $V \longmapsto \mathbb{P}^m(k)$ に一致するときにいう. ただし f_i はすべて有理関数であるか, すべて同じ次数の斉次元であるとする.

射影代数的集合 $Z' \subseteq V$ に対して, 写像 $\varphi : V - Z' \dashrightarrow \mathbb{P}^m(k)$ が有理写像であるとは, ある $(f_0, ..., f_m)$ で定義される有理写像 $V \dashrightarrow \mathbb{P}^m(k)$ と $V - (Z \cup Z')$ 上で一致するときにいう.

射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ に対して, 写像 $\varphi : V \longmapsto W$ が V から W への射であるとは, 包含写像 $\iota : W \mapsto \mathbb{P}^m(k)$ との合成写像 $\iota\varphi : V \mapsto \mathbb{P}^m(k)$ が射であるときにいう.

射影代数的集合 $Z' \subseteq V$ に対して写像 $\varphi : V - Z' \dashrightarrow W$ が有理写像であるとは $\iota\varphi : V - Z' \dashrightarrow \mathbb{P}^m(k)$ が有理写像であるときにいう.

射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$, および V から W への射 φ に対して

$$\varphi'\varphi = \mathrm{id}_V, \qquad \varphi\varphi' = \mathrm{id}_W$$

を満たす W から V への射 φ' が存在するとき, φ を W から V への同型射という. また V と W は同型であるといい $V \simeq W$ と表す.

V から W への有理写像 φ に対して

$$\varphi'\varphi = \mathrm{id}_{V-Z'}, \qquad \varphi\varphi' = \mathrm{id}_{W-Z''}$$

を満たす W から V への有理写像 φ' が存在するとき φ を W から V への双有理射といい, V と W は双有理同型であるという. ただし, Z', Z'' はそれぞれ V, W の射影代数的集合であり, $\mathrm{id}_{V-Z'}, \mathrm{id}_{W-Z''}$ は必ずしも恒等写像ではない.

定理 3.39 同じ次数を持つ斉次多項式 $F_0, ..., F_m \in k[X_0, ..., X_n]$ の組 $(F_0, ..., F_m)$ が定める射

$$\varphi_1 : \mathbb{P}^n(k) \longmapsto \mathbb{P}^m(k)$$

および, 同じ次数を持つ斉次多項式 $G_0, ..., G_\ell \in k[X_0, ..., X_m]$ の組 $(G_0, ..., G_\ell)$ が定める射

$$\varphi_2 : \mathbb{P}^m(k) \longmapsto \mathbb{P}^\ell(k)$$

に対して, 合成写像 $\varphi_2\varphi_1 : \mathbb{P}^n(k) \longmapsto \mathbb{P}^\ell(k)$ は $(G_0(F_0, ..., F_m), ..., G_\ell(F_0, ..., F_m))$ が定める射に一致する.

Proof $(G_0(F_0, ..., F_m), ..., G_\ell(F_0, ..., F_m))$ が定める射 を φ_3 とおき, 任意の $P \in \mathbb{P}^n(k)$ に対して, $\varphi_2\varphi_1(P) = \varphi_3(P)$ が成り立つことを示せばよい. φ_1 が

射であることから, ある i が存在して

$$\varphi_1(P) = \left(\frac{F_0}{F_i}(P) : ... : \frac{F_m}{F_i}(P)\right)$$

が定義される. $\varphi_1(P)$ に対して, φ_2 も射であることから, ある j が存在して

$$\varphi_2\,\varphi_1(P) = \left(\frac{G_0}{G_j}(\varphi_1(P)) : ... : \frac{G_\ell}{G_j}(\varphi_1(P))\right)$$

が定義される. ここで

$$\begin{aligned}
\varphi_2\,\varphi_1(P) &= \left(\frac{G_0}{G_j}(\varphi_1(P)) : ...... : \frac{G_\ell}{G_j}(\varphi_1(P))\right)\\
&= \left(\frac{G_0(\varphi_1(P))}{G_j(\varphi_1(P))} : ...... : \frac{G_\ell(\varphi_1(P))}{G_j(\varphi_1(P))}\right)\\
&= \left(\frac{G_0\left(\frac{F_0(P)}{F_i(P)}, ..., \frac{F_m(P)}{F_i(P)}\right)}{G_j\left(\frac{F_0(P)}{F_i(P)}, ..., \frac{F_m(P)}{F_i(P)}\right)} : ...... : \frac{G_\ell\left(\frac{F_0(P)}{F_i(P)}, ..., \frac{F_m(P)}{F_i(P)}\right)}{G_j\left(\frac{F_0(P)}{F_i(P)}, ..., \frac{F_m(P)}{F_i(P)}\right)}\right)
\end{aligned}$$

となるが, G_i がすべて同じ次数を持つことから

$$\begin{aligned}
\varphi_2\,\varphi_1(P) &= \left(\frac{G_0\left(F_0(P), ..., F_m(P)\right)}{G_j\left(F_0(P), ..., F_m(P)\right)} : ...... : \frac{G_\ell\left(F_0(P), ..., F_m(P)\right)}{G_j\left(F_0(P), ..., F_m(P)\right)}\right)\\
&= \left(\frac{G_0\left(F_0, ..., F_m\right)(P)}{G_j\left(F_0, ..., F_m\right)(P)} : ...... : \frac{G_\ell\left(F_0, ..., F_m\right)(P)}{G_j\left(F_0, ..., F_m\right)(P)}\right)\\
&= \varphi_3(P)
\end{aligned}$$

が得られる. ∎

k に成分を持つ $n+1$ 次正則行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

が与えられたとし, 斉 1 次式 $F_{A,0}, ..., F_{A,n} \in k[X_0, ..., X_n]$ を

$$\begin{bmatrix} F_{A,0} \\ \vdots \\ F_{A,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

とおく．$(F_{A,0},...,F_{A,n})$ が定める有理写像を $\varphi_A:\mathbb{P}^n(k)\dashrightarrow\mathbb{P}^n(k)$ とする．このとき

$$Z=Z(F_{A,0},...,F_{A,n})=\bigcap_i\widetilde{\mathbf{V}}(F_{A,i})$$

となるが, $Z=\emptyset$ であることを示そう． $Z\neq\emptyset$ と仮定し, $P\in Z$ を選ぶ．このとき任意の i に対して $F_{A,i}(P)=0$ であるから P の斉次座標の１つを $(p_0:...:p_n)$ とすると

$$\sum_j a_{0j}p_j=\cdots=\sum_j a_{nj}p_j=0$$

が成り立つ．従って

$$A\begin{bmatrix}p_0\\ \vdots\\ p_n\end{bmatrix}=O$$

となるが, A は正則であるから，$p_0=\cdots=p_n=0$ となり矛盾が生じる．よって $Z=\emptyset$ が示された．これより φ_A は $\mathbb{P}^n(k)$ から $\mathbb{P}^n(k)$ への射となる．

同様に $n+1$ 次正則行列 B から射 φ_B が得られるが, 定理 3.39 より φ_A と φ_B の合成 $\varphi_A\varphi_B$ も $\mathbb{P}^n(k)$ から $\mathbb{P}^n(k)$ への射となり，$\varphi_A\varphi_B=\varphi_{AB}$ が成り立つ．また $n+1$ 次の単位行列 E に対して

$$F_{E,0}=X_0,\quad ......\quad ,F_{E,n}=X_n$$

であるから $\varphi_E=\mathrm{id}$ である．これより

$$\varphi_{A^{-1}}\varphi_A=\varphi_{A^{-1}A}=\varphi_E=\mathrm{id},\qquad \varphi_A\varphi_{A^{-1}}=\varphi_{AA^{-1}}=\varphi_E=\mathrm{id}$$

が成り立つから φ_A は $\mathbb{P}^n(k)$ から $\mathbb{P}^n(k)$ 自身への同型射である． φ_A を $\mathbb{P}^n(k)$ の射影変換という．

射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ の互いに異なる $n+2$ 個の点 $P_1,...,P_{n+2}$ は, その中のどの $n+1$ 個の点も同一超平面上にないとき, 一般の位置にあるという．

定理 3.40 射影平面 $\mathbb{P}^2(k)$ において, 点 $P_1,..,P_4$, および点 $Q_1,..,Q_4$ がそれぞれ一般の位置にあるとする．このとき $\mathbb{P}^2(k)$ の射影変換 φ で $\varphi(P_i)=Q_i$ $(i=1,..,4)$ を満たすものが存在する．

Proof　P_i, Q_j の斉次座標の１つをそれぞれ

$$P_i=(a_{i0}:a_{i1}:a_{i2}),\qquad Q_j=(b_{j0}:b_{j1}:b_{j2})$$

とする. また

$$R_1 = (1:0:0),\ \ R_2 = (0:1:0),\ \ R_3 = (0:0:1),\ \ R_4 = (1:1:1)$$

とおく. このとき射影変換 φ_A, φ_B で

$$\varphi_A(R_i) = P_i, \qquad \varphi_B(R_i) = Q_i \quad (i = 1, .., 4)$$

を満たすものが存在すれば, $\varphi_B\varphi_A^{-1}$ が題意を満たす射影変換となる. φ_B についても同様であるから, 射影変換 φ_A で $\varphi_A(R_i) = P_i$ を満たすものが存在することを示せばよい.

$P_1, .., P_4$ のどの 3 点も同一超平面上にないことから, 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3(k)$ において $A_1 = (a_{10}, a_{11}, a_{12})$, ..., $A_4 = (a_{40}, a_{41}, a_{42})$ の中のどの 3 つも 1 次独立である. 一方 A_1, A_2, A_3, A_4 は 1 次従属であるから

$$\lambda_4 \begin{bmatrix} a_{40} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} a_{30} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

を満たす $\lambda_1, ..., \lambda_4$ で, すべては 0 でないものが存在する. ここでどの 3 つも 1 次独立であることから $\lambda_1, ..., \lambda_4$ のすべてが 0 でないので

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix}, \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix}, \lambda_3 \begin{bmatrix} a_{30} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

と α_{ij} を定め, $A = [\alpha_{ij}]$ とおけば求める φ_A の存在がわかる. ∎

4 章　非特異射影曲線

この章では Riemann-Roch の定理の原型ともいえる Riemann の定理を証明する．Riemann の定理は非特異射影曲線上の因子から定まる有理関数のなす線型空間 $L(D)$ の次元 $\ell(D)$ と D の次数 $\deg D$ との差が D によらず上に有界であることを主張するものであり, この不等式から自然に非特異射影曲線の種数が定まる.

§4.1 では射影曲線 V 上の非特異点 P での局所環 $O_P(V)$ が離散付値環であること, これより有理関数体 $k(V)$ に離散付値 ord_P が定まることを示す.

§4.2 では「与えられた有限個の有理関数との差の, 与えられた有限個の点における離散付値の値が, 与えられた整数以上になるような有理関数が存在する」という近似定理を証明する.

§4.3 では非特異射影曲線上の有限個の点の形式的な整数係数 1 次結合として因子を定義し, 有理関数の極と零点が有限個であることを証明した後, 有理関数から主因子が定まることを導く．さらに因子 D に対して $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ を満たす有理関数 f 全体からなる線型空間 $L(D)$ を導入し, その次元 $\ell(D)$ が有限であることを証明する．また定数でない有理関数 f で生成される部分体の有理関数体における余次元が, f の零点 P すべてに渡る $\mathrm{ord}_P(f)$ の和, および f の極 Q すべてに渡る $-\mathrm{ord}_Q(f)$ の和に一致することを示し, f から定まる主因子 $\mathrm{div}(f)$ の次数が 0 になることを導く.

§4.4 では前節までに得られた結果を基に, 因子 D に対して, その次数 $\deg D$ と $\ell(D)$ の差が, D によらずある値以下であるという Riemann の定理を証明し, 非特異射影曲線の種数を定義する.

なお, この章を通じて k は代数的閉体, V は $\mathbb{P}^n(k)$ の射影曲線を表すものとする.

4.1 離散付値環

離散付値環とは極大イデアルが単項イデアルであるような体でないネーター局所整域のことである． R が離散付値環で, 極大イデアルが $\langle t \rangle$ であるとき R の 0 でない元 x は $x = ut^m$ と表される．ここで u は可逆元, m は非負整数で，x から一意的に定まる．R が体でないことから $t \neq 0$ である．離散付値環の基本事項については参考文献 [2, §6.1] を参照されたい．

定理 4.1 V の非特異点 P での局所環 $O_P(V)$ は離散付値環である．

Proof　定理 3.14 より $O_P(V)$ は $\mathrm{m}_P(V)$ を極大イデアルとしてもつネーター局所整域である．従って $\mathrm{m}_P(V)$ が単項イデアルであることを示せばよい．V が曲線, P がその非特異点であることから

$$\dim_k(\mathrm{m}_P(V)/\mathrm{m}_P(V)^2) = \dim V = 1$$

となる．従って剰余加群 $\mathrm{m}_P(V)/\mathrm{m}_P(V)^2$ は 1 つの元 t で生成されるので

$$\mathrm{m}_P(V) = \langle t \rangle + \mathrm{m}_P(V)\,\mathrm{m}_P(V)$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{m}_P(V)$ は有限生成 $O_P(V)$ 加群であり，$O_P(V)$ の極大イデアルは $\mathrm{m}_P(V)$ のみであるから中山の補題 (定理 1.7) が適用できて，$\mathrm{m}_P(V) = \langle t \rangle$ が得られるので, $\mathrm{m}_P(V)$ は単項イデアルである． ∎

V の非特異点 P での局所環 $O_P(V)$ の極大イデアルが $\mathrm{m}_P(V) = \langle t \rangle$ と表されたとする．このとき 0 でない $O_P(V)$ の任意の元 f は

$$f = f_t t^m \qquad (f_t \in O_P(V)^\times,\ m \text{ は非負整数})$$

の形に一意的に表される．従って $O_P(V)$ の分数体 $k(V)$ の 0 でない任意の元 f は

$$f = f_t t^m \qquad (f_t \in O_P(V)^\times,\ m \text{ は整数}) \tag{4.1}$$

の形に一意的に表される．t を点 P での局所パラメータという．t' も点 P での局所パラメータであるとすると, 可逆元 u により $t' = ut$ と表されるので

$$f = f_{t'}(t')^\ell = f_{t'}u^\ell t^\ell = f_t t^m$$

より $\ell = m$ が成り立つ. 従って $f \in k(V)^\times$ に対して式 (4.1) で定まる m は局所パラメータによらず一定であり, 写像

$$\mathrm{ord}_P : k(V)^\times \ni f \mapsto m \in \mathbb{Z}$$

は well-defined である. 特に $\mathrm{ord}_P(0) = \infty$ と定めると写像

$$\mathrm{ord}_P : k(V) \longmapsto \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

は $k(V)$ の離散付値となる. ただし任意の整数 m に対して $m < \infty$ とする.

定理 4.2 P を射影曲線 V の非特異点とする. 離散付値 ord_P について次が成り立つ. ただし $f, g \in k(V)$ とする.

(1) $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$

(2) $\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$. 特に $\mathrm{ord}_P(f) \neq \mathrm{ord}_P(g)$ ならば等号が成り立つ.

(3) $O_P(V) = \{f \in k(V) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\}$

Proof 以下 $P \in V$ での局所パラメータを t とする.

(1) $f = 0$ または $g = 0$ のときは両辺とも ∞ となるので成り立つ. 従って $f, g \in k(V)^\times$ としてよい.

$$f = f_t t^m, \quad g = g_t t^{m'} \qquad (f_t, g_t \in O_P(V)^\times, \quad m,\ m' \text{ は整数})$$

と表すと $fg = f_t g_t t^{m+m'}$ となるので, $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$ が成り立つ.

(2) この場合も $f = 0$ または $g = 0$ のときは明らかに成り立つので $f, g \in k(V)^\times$ とする.

$$f = f_t t^m, \quad g = g_t t^{m'} \qquad (f_t, g_t \in O_P(V)^\times, \quad m,\ m' \text{ は整数})$$

とする. ここで $m \leq m'$ として一般性を失わないので

$$f + g = t^m(f_t + g_t t^{m'-m})$$

より

$$\mathrm{ord}_P(f+g) \geq m = \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$$

が得られる．次に $m < m'$ とする．$g = 0$ のときは明らかに成り立つので，$f, g \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(f+g-g) &\geq \min\{\mathrm{ord}_P(f+g), \mathrm{ord}_P(-g)\}\\ &= \min\{\mathrm{ord}_P(f+g), \mathrm{ord}_P(g)\}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \mathrm{ord}_P(g)$ と仮定すると，$\mathrm{ord}_P(f) \geq \mathrm{ord}_P(g)$ となり矛盾が生じるので，$\mathrm{ord}_P(f+g) < \mathrm{ord}_P(g)$ である．これより $\mathrm{ord}_P(f) \geq \mathrm{ord}_P(f+g)$ となるので, 前半の結果と合わせて $\mathrm{ord}_P(f+g) = \mathrm{ord}_P(f)$ を得る．

(3) $O_P(V) \subseteq \{f \in k(V) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\}$ は明らかであるから逆を示す．$\mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ とすると，$f = 0$ のときは $f \in O_P(V)$ であり，$f \neq 0$ のときは $f = f_t t^m$ と表されるが $m \geq 0$ より，$t^m \in O_P(V)$ となるので $f \in O_P(V)$ が得られる． ∎

定理 4.3 非特異射影曲線 V 上の有理関数 $f \in k(V)^\times$ に対して次が成り立つ．

(1) $P \in V$ が f の零点 $\iff$ $\mathrm{ord}_P(f) > 0$

(2) $P \in V$ が f の極 $\iff$ $\mathrm{ord}_P(f) < 0$

Proof $\mathrm{ord}_P(f) = 0 \Leftrightarrow f \in O_P(V)^\times$ が成り立ち, このとき P は f の零点でも極でもないことを注意しておく．$\mathrm{ord}_P(f) > 0$ とすると $f \in \mathrm{m}_P(V)$ となるので $f(P) = 0$ が成り立ち, P は f の零点であり, 逆に P が f の零点であるとすると，$f \in \mathrm{m}_P(V)$ となるので $\mathrm{ord}_P(f) > 0$ が成り立つ．以上から $\mathrm{ord}_P(f) < 0$ であることと，f が P で定義されていないこととは同値となる．ゆえに (1), (2) が成り立つ． ∎

補題 4.4 P が射影曲線 V 上の非特異点のとき, 任意の $\ell > 1$ に対して次の等式が成り立つ．

$$\dim_k\left(\mathrm{m}_P(V)^{\ell-1}/\mathrm{m}_P(V)^{\ell}\right) = \dim_k\left(O_P(V)/\mathrm{m}_P(V)\right) = 1$$

Proof $\mathrm{m}_P(V) = \langle t \rangle$ とおき，

$$\varphi_r : \mathrm{m}_P(V)^r \ni f \quad \longmapsto \quad ft \in \mathrm{m}_P(V)^{r+1}$$

と定める．ただし $\mathrm{m}_P(V)^0 = O_P(V)$ とする．$O_P(V)$ は整域であるから φ_r は単射であり, また $\mathrm{m}_P(V)^{r+1} = t\cdot\mathrm{m}_P(V)^r$ とも表されるので φ は全射でもある．加法と k の元によるスカラー倍を保つことは明らかであるから φ_r は k 加群としての同型である．ここで $\iota : \mathrm{m}_P(V)^{r+1} \mapsto \mathrm{m}_P(V)^{r+1}/\mathrm{m}_P(V)^{r+2}$ を自然準同型として

$$\mathrm{m}_P(V)^r \quad \overset{\varphi_r}{\longmapsto} \quad \mathrm{m}_P(V)^{r+1} \quad \overset{\iota}{\longmapsto} \quad \mathrm{m}_P(V)^{r+1}/\mathrm{m}_P(V)^{r+2}$$

の合成写像 $\iota\varphi_r$ の核が $\mathrm{m}_P(V)^{r+1}$ であることから, 同型

$$\mathrm{m}_P(V)^r/\mathrm{m}_P(V)^{r+1} \quad \overset{\iota\varphi_r}{\longmapsto} \quad \mathrm{m}_P(V)^{r+1}/\mathrm{m}_P(V)^{r+2}$$

を得る．$O_P(V)/\mathrm{m}_P(V) \simeq k$ に注意すれば求める等式が得られる． ∎

定理 4.5 非特異射影曲線 V 上の 0 でない有理関数 $f \in O_P(V)$ に対して $\mathrm{ord}_P(f) = \dim_k(O_P(V)/fO_P(V))$ が成り立つ．

Proof　点 P での局所パラメータを t として $f = f_t t^r$ と表す．ただし f_t は $O_P(V)$ の可逆元, m は非負整数である．このとき

$$f\,O_P(V) = f_t\,t^r O_P(V) = \mathrm{m}_P(V)^r$$

となるので

$$\dim_k(O_P(V)/fO_P(V)) = \dim_k(O_P(V)/\mathrm{m}_P(V)^r) = r = \mathrm{ord}_P(f)$$

が成り立つ． ∎

定理 4.6 $f \in k(V)^\times$ を有理関数とする．このとき点 $P \in V$ が f の極であることと, $\frac{1}{f}$ の零点であることとは同値である．

Proof　定理 4.2 より

$$\mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(\frac{1}{f}) = \mathrm{ord}_P(f\cdot\frac{1}{f}) = \mathrm{ord}_P(1) = 0$$

が成り立ち

$$\mathrm{ord}_P(f) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ord}_P\left(\frac{1}{f}\right) > 0$$

となるので, 定理 4.3 を適用すればよい． ∎

定理 4.7 V を非特異射影曲線, $f_0, ..., f_m \in k(V)$ は $(f_0, ..., f_m) \neq (0, ..., 0)$ を満たすとする. このとき $(f_0, ..., f_m)$ が定義する有理写像は射である

Proof　任意に $P \in V$ を選び

$$\mathrm{ord}_P(f_j) = m_0 = \min\{\mathrm{ord}_P(f_i) \mid i = 0, ..., m\}$$

とおくと, 任意の i に対して

$$\mathrm{ord}_P\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = \mathrm{ord}_P(f_i) - \mathrm{ord}_P(f_j) \geq 0$$

が成り立つ. 従って $(f_0, ..., f_m)$ が定義する有理写像は P で定義される. P は任意であったから, この有理写像は射である. ∎

4.2　近似定理

補題 4.8 互いに異なる r 個の点 $P_1, ..., P_r \in \mathbb{P}^n(k)$ が任意に与えられたとき, これらのどの点も含まない $\mathbb{P}^n(k)$ の超平面が存在する.

Proof　$\mathbb{P}^n(k)$ の超平面 $\widetilde{\mathbf{V}}(a_0X_0 + \cdots + a_nX_n)$ に対して, 点 $(a_0 : ... : a_n)$ が定まり, 逆に点 $(a_0 : ... : a_n)$ に対して, 超平面 $\widetilde{\mathbf{V}}(a_0X_0 + \cdots + a_nX_n)$ が定まる. 明らかにこの対応

$$\mathbb{P}^n(k) \supseteq \widetilde{\mathbf{V}}(a_0X_0 + \cdots + a_nX_n) \quad \longleftrightarrow \quad (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$$

は 1 対 1 対応である. ここで $P_1, ..., P_r$ に対応する超平面を $\widetilde{V}_1, ..., \widetilde{V}_r$ とすると, $\mathbb{P}^n(k)$ は既約な射影代数的集合であるから有限個の超平面の和では表されない. 従って $\widetilde{V}_1, ..., \widetilde{V}_r$ のいずれにも含まれない点 $(b_0 : ... : b_n)$ が存在する. このとき超平面 $\widetilde{\mathbf{V}}(b_0X_0 + \cdots + b_nX_n)$ は $P_1, ..., P_r$ のいずれの点も含まない. ∎

補題 4.9 非特異射影曲線 V の互いに異なる点 $P_1, ..., P_r$ $(r \geq 2)$ と整数 ℓ に対して, 次式を満たす有理関数 $f \in k(V)$ が存在する.

$$\mathrm{ord}_{P_1}(f - 1) \geq \ell, \qquad \mathrm{ord}_{P_i}(f) \geq \ell \quad (i = 2, ..., r)$$

Proof　補題 4.8 より点 $P_1, ..., P_r$ のどの点も含まない超平面 H が存在する．定理 3.40 より適当な射影変換 φ で H を $\widetilde{\mathbf{V}}(X_0) = \mathbb{P}^n(k) - U_0$ に移すことができる．ここで

$$\varphi(V) = W, \qquad \varphi(P_1) = Q_1, \ ...... , \varphi(P_r) = Q_r$$

とおくと $Q_1, ..., Q_r$ は $\mathbb{P}^n(k) - U_0$ に含まれないので，定理 3.34，定理 3.35 より $W = U^\sharp$ となる既約な代数的集合 $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ が存在する． W の点 $Q_1, ..., Q_r$ に対して題意を満たす有理関数 $f \in k(W)$ の存在を示せばよいのであるが，定理 3.38 とそのあとの注により $k(W) \simeq k(U)$ となること，1 対 1 対応

$$W \cap U_0 \ni (1 : a_1 : ... : a_n) \quad \longleftrightarrow \quad (a_1, ..., a_n) \in U$$

により $W \cap U_0$ の点 $Q_1, ..., Q_r$ を U の点と同一視できることから $k(U)$ において題意を満たす有理関数が存在することを示せばよい．また $\ell < 0$ の場合は $\ell = 0$ として示せば十分であるから，以下 $\ell \geq 0$ として $O(U)$ において題意を満たす多項式関数が存在することを示せばよい．

$$\mathrm{m}_i = \{f \in O(U) \mid f(Q_i) = 0\}$$

とおく． m_i は $O(U)$ の極大イデアルで $Q_1, ..., Q_r$ が互いに異なることから $\mathrm{m}_1, ..., \mathrm{m}_r$ も互いに異なる．これより $i \neq j$ のとき，任意の自然数 ℓ に対して $\mathrm{m}_i^\ell + \mathrm{m}_j^\ell = O(U)$ が成り立つ．従って中国の剰余定理 ([4, 定理 24.1]) が適用できて

$$O(U)/(\mathrm{m}_1^\ell \cap \cdots \cap \mathrm{m}_r^\ell) \simeq O(U)/\mathrm{m}_1^\ell \times \cdots \times O(U)/\mathrm{m}_r^\ell$$

を得る．これより

$$f \equiv 1 \bmod \mathrm{m}_1^\ell, \qquad f \equiv 0 \bmod \mathrm{m}_i^\ell \ \ (i = 2, ..., r)$$

を満たす多項式関数 $f \in O(U)$ が存在する．この f が

$$\mathrm{ord}_{P_1}(f - 1) \geq \ell, \qquad \mathrm{ord}_{P_i}(f) \geq \ell \quad (i = 2, ..., r)$$

を満たすことは明らかである． ∎

定理 4.10 (近似定理) V を非特異射影曲線, $P_1, ..., P_r$ $(r \geq 2)$ を互いに異なる V の点とする．このとき任意の有理関数 $f_1, ..., f_r \in k(V)$ と任意の整数 ℓ に対して，$\mathrm{ord}_{P_i}(f - f_i) \geq \ell \quad (i = 1, ..., r)$ を満たす有理関数 $f \in k(V)$ が存在する．

Proof　$\ell_0 = \min\{\, \mathrm{ord}_{P_i}(f_j) \,\}$ とおく．補題 4.9 より, 各 $i = 1, ..., r$ に対して

$$\mathrm{ord}_{P_i}(g_i - 1) \geq \ell - \ell_0, \qquad \mathrm{ord}_{P_j}(g_i) \geq \ell - \ell_0 \quad (j \neq i)$$

を満たす有理関数 $g_i \in k(V)$ が存在する．ここで

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r$$

とすると, 各 $i = 1, ..., r$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{P_i}(f - f_i) &= \mathrm{ord}_{P_i}(f_1 g_1 + \cdots + f_i(g_i - 1) + \cdots + f_r g_r) \\ &\geq \min\{\mathrm{ord}_{P_i}(f_1 g_1), ..., \mathrm{ord}_{P_i}(f_i(g_i - 1)), ..., \mathrm{ord}_{P_i}(f_r g_r)\} \end{aligned}$$

となるが, $j \neq i$ のとき

$$\mathrm{ord}_{P_i}(f_j g_j) = \mathrm{ord}_{P_i}(f_j) + \mathrm{ord}_{P_i}(g_j) \geq \ell_0 + (\ell - \ell_0) = \ell$$

であり,

$$\mathrm{ord}_{P_i}(f_i(g_i - 1)) = \mathrm{ord}_{P_i}(f_i) + \mathrm{ord}_{P_i}(g_i - 1) \geq \ell_0 + (\ell - \ell_0) = \ell$$

であるから，$\mathrm{ord}_{P_i}(f - f_i) \geq \ell$ が成り立つ． ∎

4.3　因子

V を非特異射影曲線とする．V の有限個の点の形式的整数係数 1 次結合

$$D := \sum_{P \in V} n_P P \qquad (\, n_P \text{ は整数で, 有限個の } P \text{ を除いて } 0)$$

を V 上の因子という．係数 n_P を $\mathrm{ord}_P(D)$ とおく．

定理 4.11 非特異射影曲線 V 上の 有理関数 $f \neq 0$ の極および零点は有限個である．

Proof　$V = (V \cap U_0) \cup \cdots \cup (V \cap U_n)$ である. ただし

$$U_i = \{(a_0 : ... : a_m) \mid a_i \neq 0\}$$

とする. これより $V \cap U_i$ に含まれる f の極と零点が有限個であることを示せばよい. 一般性を失うことなく $V \cap U_0 \neq \emptyset$ として $V \cap U_0$ に含まれる f の極と零点が有限個であることを示せば, 他の U_i についても同様である. 補題 4.9 の証明と同様にして $V = W^\sharp$ となるアフィン多様体 W が存在するが, 定理 3.38 より $k(W) \simeq k(V)$ となるので W はアフィン曲線である. ここで $f' = \psi(f)$ とおく. ただし ψ は定理 3.38 で定めたものから誘導される写像とする. このとき定理 2.33 より f' の極と零点は有限個である. 従って f の $V \cap U_0$ における極と零点も有限個である. ∎

V 上の有理関数 $f \in k(V)^\times$ に対して

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{P \in V} \mathrm{ord}_P(f) P$$

とおく. 定理 4.11 より f の極および零点は有限個である. また定理 4.3 より, それら以外の点 P では $\mathrm{ord}_P(f) = 0$ となるので $\mathrm{div}(f)$ は V 上の因子となる. $\mathrm{div}(f)$ を f が定める主因子という.

因子は非特異射影曲線のみならず一般の集合上でも定義できるが, 非特異射影曲線の性質を反映するのが主因子であることに留意されたい.

V 上の因子全体は次の加法によりアーベル群をなす.

$$\sum_{P \in V} n_P P + \sum_{P \in V} m_P P := \sum_{P \in V} (n_P + m_P) P$$

ただし零元は $\sum_{P \in V} 0 \cdot P$ である. 因子全体のなす群を V の因子群といい, $\mathrm{Div}(V)$ と表す.

V 上の因子 $D = \sum_{P \in V} n_P P$, $D' = \sum_{P \in V} m_P P$ が $n_P \geq m_P$ $(\forall P \in V)$ を満たすとき $D \geq D'$ と表すことにする. $D \geq 0$ を満たす因子 D を有効な因子という.

$$\deg D := \sum_{P \in V} n_P$$

とおき, $\deg D$ を D の次数という.

次数の定義および定理 4.2 より次の定理 4.12 が得られる.

定理 4.12 V が非特異射影曲線のとき次が成り立つ.

(1) $D, D' \in \mathrm{Div}(V)$ に対して $\deg(D+D') = \deg D + \deg D'$

(2) $f, f' \in k(V)^\times$ に対して $\mathrm{div}(ff') = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(f')$

定理 4.13 $f \in k(V)^\times$ について次の (1) $\sim$ (3) は同値である.

(1) $\mathrm{div}(f) \geq 0$ (2) $f \in k^\times$ (3) $\mathrm{div}(f) = 0$

Proof (1) $\Rightarrow$ (2) $\mathrm{div}(f) \geq 0$ とすると, 任意の $P \in V$ に対して $\mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ が成り立つ. 従って f は V 上正則となり, 定理 3.17 より $f \in k^\times$ を得る.

(2) $\Rightarrow$ (3) $f \in k^\times$ とすると, 任意の点 P で $\mathrm{ord}_P(f) = 0$ となるから $\mathrm{div}(f) = 0$ が成り立つ.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\mathrm{div}(f) = 0$ とすると, $\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in V} 0 \cdot P$ であるから $\mathrm{div}(f) \geq 0$ が成り立つ. ∎

非特異射影曲線 V 上の有理関数 $f \in k(V)^\times$ に対して,

$$(f)_0 := \sum_{\mathrm{ord}_P(f) > 0} \mathrm{ord}_P(f)\, P, \qquad (f)_\infty := \sum_{\mathrm{ord}_P(f) < 0} (-\mathrm{ord}_P(f))\, P$$

と定義する. $\mathrm{div}(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ である. V 上の因子 D, D' が線型同値であるとは,

$$D - D' = \mathrm{div}(f)$$

を満たす有理関数 $f \in k(V)^\times$ が存在するときにいう. このとき $D \sim D'$ と表す. $D \sim 0$ であることと, D が主因子であることは同値であり, 主因子全体は $\mathrm{Div}(V)$ の部分群をなす. 剰余群

$$\mathrm{Pic}(V) := \mathrm{Div}(V)/\{\mathrm{div}(f) \mid f \in k(V)^\times\}$$

を V のピカール群という. V 上の因子 $D = \sum_{P \in V} n_P P$ に対して

$$\begin{aligned} L(D) &:= \{f \in k(V) \mid \text{任意の } P \text{ に対して } \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P\} \\ &= \{f \in k(V)^\times \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

と定義する.

定理 4.14 D を非特異射影曲線 V 上の因子とする．このとき次が成り立つ．

(1) $L(D)$ は k 線型空間である．

(2) $L(0) = k$

Proof (1) $k(V)$ が k 線型空間であるから $L(D)$ が部分空間になることを示せばよい． $f, f' \in L(D)$ に対して

$$\mathrm{ord}_P(f + f') \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(f')\} \geq -n_P$$

となるから $f + f' \in L(D)$ を得る．次に $f \in L(D), c \in k$ とする． $c = 0$ のときは $cf = 0 \in L(D)$ が成り立つ． $c \in k^\times$ のときも

$$\mathrm{ord}_P(cf) = \mathrm{ord}_P(c) + \mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P$$

より $cf \in L(D)$ が成り立つので $L(D)$ は $k(V)$ の部分空間である．

(2) $L(D)$ の定義と定理 4.13 より

$$\begin{aligned} L(0) &= \{f \in k(V) \mid \text{任意の } P \in V \text{ に対して } \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\} \\ &= \{f \in k(V) \mid \mathrm{div}(f) \geq 0\} = k \end{aligned}$$

が得られる． ∎

以下 $\ell(D) := \dim_k L(D)$ とする．定理 4.14 より $\ell(0) = 1$ である．

定理 4.15 非特異射影曲線 V 上の因子 D, D' が $D \sim D'$ を満たすとき，$\ell(D) = \ell(D')$ が成り立つ．

Proof $D = D'$ のときは明らかに成り立つので $D \neq D'$ とする．$D \sim D'$ より $D' - D = \mathrm{div}(f_0)$ となる有理関数 $f_0 \neq 0$ が存在する． $f \in L(D')$, $f \neq 0$ なる f に対して $\mathrm{div}(f) + D' \geq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f_0 f) + D &= \mathrm{div}(f_0) + \mathrm{div}(f) + D = (D' - D) + \mathrm{div}(f) + D \\ &= \mathrm{div}(f) + D' \geq 0 \end{aligned}$$

となるので $f_0 f \in L(D)$ が成り立つ．これより線型写像

$$\varphi : L(D') \ni f \quad \longmapsto \quad f_0 f \in L(D)$$

が得られるが，φ が同型写像であることを示そう．$k(V)$ が体であり，$f_0 \neq 0$ であるから φ は単射である．また $g \in L(D)$, $g \neq 0$ なる g に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\frac{g}{f_0}\right) + D' &= \mathrm{div}(g) - \mathrm{div}(f_0) + D' = \mathrm{div}(g) - (D' - D) + D' \\ &= \mathrm{div}(g) + D \geq 0\end{aligned}$$

より $\frac{g}{f_0} \in L(D')$ が成り立つ．このとき

$$\varphi\left(\frac{g}{f_0}\right) = f_0 \frac{g}{f_0} = g$$

となるので，φ は全射である．以上から $L(D') \simeq L(D)$ となり，$\ell(D') = \ell(D)$ が示された． ∎

補題 4.16 $D = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i$ を非特異射影曲線 V 上の因子とする． このとき，$\dim_k L(D+P_i)/L(D) \leq 1 \quad (i = 1, ..., r)$ が成り立つ．

Proof $f \in L(D)$ ならば

$$\mathrm{div}(f) + D + P_i \geq \mathrm{div}(f) + D \geq 0$$

より $f \in L(D+P_i)$ となるので $L(D) \subseteq L(D+P_i)$ が成り立つ．次に $t_i \in \mathrm{m}_{P_i}(V)$ を点 P_i での局所パラメータとする．$f \in L(D+P_i)$ に対して

$$\mathrm{ord}_{P_i}(t_i^{n_i+1} f) = n_i + 1 + \mathrm{ord}_{P_i}(f) \geq 0$$

が成り立つので $t_i^{n_i+1} f \in O_{P_i}(V)$ となる．これより線型写像

$$\varphi_i : L(D+P_i) \ni f \quad \longmapsto \quad (t_i^{n_i+1} f)(P_i) \in k$$

が得られるが，$f \in L(D)$ のときは $t_i^{n_i} f \in O_{P_i}(V)$ より $t_i^{n_i+1} f \in \mathrm{m}_{P_i}(V)$ となるので $(t_i^{n_i+1} f)(P_i) = 0$ となる．従って $L(D) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ が成り立つ．

逆に $f \in \mathrm{Ker}(\varphi_i) \cap L(D+P_i)$ とすると $(t_i^{n_i+1} f)(P_i) = 0$ であるから $t_i^{n_i+1} f \in \mathrm{m}_{P_i}(V)$ となるので $t_i^{n_i} f \in O_{P_i}(V)$ を得る．従って $f \in L(D)$ が成り立つ．以

上で $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = L(D)$ が示された．これより $L(D+P_i)/L(D)$ は k の部分空間となるので $\dim_k L(D+P_i)/L(D) \leq 1$ が成り立つ． ∎

定理 4.17 *D, D' が非特異射影曲線 V 上の因子のとき次が成り立つ．*

(1) $D \leq D'$ ならば $L(D) \subseteq L(D')$ かつ $\ell(D') - \ell(D) \leq \deg(D' - D)$ である．

(2) $D \geq 0$ ならば $\ell(D) \leq \deg D + 1$ である．

Proof (1) $D = D'$ のときは明らかに成り立つから $D \lneq D'$ とする．このとき

$$D' = D + P_1 + \cdots + P_s$$

と表すことができる．ただし点 $P_1, ..., P_s$ は重複してもよいとする．補題 4.16 の証明中で示したことから $L(D) \subseteq L(D')$ が成り立つ．また補題 4.16 より

$$\dim_k L(D+P_1)/L(D) \leq 1, \quad \dim_k L(D+P_1+P_2)/L(D+P_1) \leq 1, ...$$

が順次成り立つので

$$\ell(D') - \ell(D) \leq s = \deg(D' - D)$$

が得られる．

(2) (1) で D を 0, D' を D に置き換えると

$$\ell(D) - \ell(0) \leq \deg(D - 0) = \deg D$$

を得るが, $\ell(0) = 1$ より $\ell(D) \leq \deg D + 1$ が得られる． ∎

定理 4.18 *D を非特異射影曲線 V 上の因子とする．このとき k 線型空間 $L(D)$ は有限次元である．*

Proof $D = 0$ のときは $\ell(0) = 1$ となるので成り立つから，$D \neq 0$ とする．D を係数が正である項の和と, 負である項の和に分解して

$$D = \sum_{P \in V} n_P\, P + \sum_{P \in V} n'_P\, P \qquad (n_P > 0, \quad n'_P < 0)$$

と表し

$$D' = \sum_{P \in V} n_P\, P + \sum_{P \in V} (-n'_P)\, P$$

とおくと $D > 0$ が成り立つので, 定理 4.17, (2) より $\ell(D') \leq \deg D' + 1$ を得る. 一方 $D \leq D'$ であるから定理 4.17, (1) より, $L(D) \subseteq L(D')$ となるので $L(D)$ は有限次元である. ∎

非特異射影曲線 V 上の定数でない有理関数 f に対して

$$k(f) := \left\{ \frac{A(f)}{B(f)} \in k(V) \mid A(f), B(f) \in k[f]\ , B(f) \neq 0 \right\}$$

とおく. $k(f)$ は k 上 f で生成される $k(V)$ の部分体である. f は定数でないから $k(V)/k(f)$ は代数拡大である.

定理 4.19 非特異射影曲線 V 上の定数でない有理関数 f について $\deg(f)_0 = \deg(f)_\infty = [k(V) : k(f)]$ が成り立つ.

Proof f は定数でないので $f \neq 0$ であること, 従って有理関数 $\frac{1}{f}$ が存在することを注意しておく. 定数でない任意の有理関数 f に対して

$$\deg(f)_\infty = [k(V) : k(f)] \tag{4.2}$$

が成り立つとすると

$$\deg \left(\frac{1}{f} \right)_\infty = \left[k(V) : k\left(\frac{1}{f} \right) \right] \tag{4.3}$$

も成り立ち, $\mathrm{ord}_P(\frac{1}{f}) = -\mathrm{ord}_P(f)$ より

$$\left(\frac{1}{f} \right)_\infty = \sum_{\mathrm{ord}_P(\frac{1}{f})<0} \left(-\mathrm{ord}_P \left(\frac{1}{f} \right) \right) P = \sum_{\mathrm{ord}_P(f)>0} \mathrm{ord}_P(f) P = (f)_0$$

となるが, $k(\frac{1}{f}) = k(f)$ であるから, (4.3) に代入すると

$$\deg(f)_0 = [k(V) : k(f)]$$

が成り立つ. これと (4.2) とから求める等式が得られる. 従って

$$d = \deg(f)_\infty\,, \qquad m = [k(V) : k(f)]$$

とおき $d = m$ を示すことにする.

まず $d \leq m$ を示そう. $P \in V$ を f の極とすると $\mathrm{ord}_P(\frac{1}{f}) = -\mathrm{ord}_P(f) > 0$ であるから P は $\frac{1}{f}$ の零点であり, $\frac{1}{f} \in O_P(V)$ となる. このとき定理 4.5 より

$$\dim_k (f\, O_P(V)/O_P(V)) = \dim_k \left(O_P(V)/\frac{1}{f}\, O_P(V) \right) = -\mathrm{ord}_P(f)$$

が得られる. ここで $\mathrm{ord}_P(f) = -n_P$ とおき, t を P での局所パラメータとすると

$$\frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2},\ \cdots,\frac{1}{t^{n_P}}$$

は $fO_P(V)/O_P(V)$ の k 基底である.

f の極は有限個であるからそれらを $P_1, ..., P_r$ として

$$W = f\, O_{P_1}(V)/O_{P_1}(V) \oplus \cdots \oplus f\, O_{P_r}(V)/O_{P_r}(V)$$

とおくと W は k 線型空間であり,

$$\begin{aligned} \dim_k W &= \dim_k(fO_{P_1}(V)/O_{P_1}(V)) + \cdots + \dim_k(fO_{P_r}(V)/O_{P_r}(V)) \\ &= \sum_{i=1}^{r}(-\mathrm{ord}_{P_i}(f)) = (f)_\infty = d \end{aligned}$$

が成り立つ. 以下 $\cap_i f\, O_{P_i}(V)$ の元 g と W の元 $\sum_i g \bmod O_{P_i}(V)$ とを同一視する.

t_i を P_i での局所パラメータとすると, 近似定理 (定理 4.10) より

$$\mathrm{ord}_{P_i}\left(s_i - \frac{1}{t_i}\right) \geq 0, \qquad \mathrm{ord}_{P_j}(s_i) \geq 0 \qquad (j \neq i)$$

を満たす $s_i \in k(V)$ が存在する. ここで $\mathrm{ord}_{P_i}(s_i) > -1$ と仮定すると $\mathrm{ord}_{P_i}(\frac{1}{t_i}) = -1$ であるから, 定理 4.2, (2) より $\mathrm{ord}_{P_i}(s_i - \frac{1}{t_i}) = -1$ となり, $\mathrm{ord}_{P_i}(s_i) < -1$ と仮定しても $\mathrm{ord}_{P_i}(s_i - \frac{1}{t_i}) = \mathrm{ord}_{P_i}(s_i) < -1$ となるので $\mathrm{ord}_{P_i}(s_i) = -1$ でなければならない. 従って $s_i \in f\, O_{P_i}(V) - O_{P_i}(V)$ かつ $s_i \in O_{P_j}(V)$ $(j \neq i)$ となるので, $\mathrm{ord}_{P_i}(f) = n_i$ とすると

$$s_i, ..., s_i^{n_i} \quad \text{は} \quad f\, O_{P_i}(V)/O_{P_i}(V) \text{ の基底であり}, \ s_i, ..., s_i^{n_i} \in O_{P_j}(V)\ (j \neq i)$$

が成り立つ．これより $s_i, ..., s_i^{n_i}$ は W の元と見なすことができ

$$s_1, \ \dots \ , s_1^{n_1}, \quad s_2, \ \dots \ , s_2^{n_2}, \quad \dots\dots\dots , \quad s_r, \ \dots\dots \ , s_r^{n_r}$$

は W の基底となる．$s_1, ..., s_1^{n_1}, ..., s_r, ..., s_r^{n_r}$ を $u_1, ..., u_d$ とおき，$u_1, ..., u_d$ が $k(f)$ 上 1 次独立であることを示せば $d \leq m$ が得られる．自明でない関係式

$$a_1 u_1 + \cdots + a_d u_d = 0 \qquad (a_i \in k(f)) \tag{4.4}$$

が成り立ったと仮定する．$a_i \neq 0$ のとき

$$a_i = \frac{\alpha_{ie} f^e + \cdots + \alpha_{i0}}{\beta_{ie'} f^{e'} + \cdots + \beta_{i0}}, \qquad (\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in k, \quad \alpha_{ie}, \beta_{ie'} \neq 0)$$

であるとして, a_i の分母・分子を $f^{\max\{e,e'\}}$ で割ると $a_i \in k\left(\frac{1}{f}\right)$ となる．これを (4.4) に代入し, 各 $a_i \neq 0$ の分母の積を両辺にかけると

$$b_1 u_1 + \cdots + b_d u_d = 0 \qquad \left(b_i \in k\left[\frac{1}{f}\right]\right) \tag{4.5}$$

なる自明でない関係式が得られる．$\frac{1}{f} \in O_P(V)$ であるから $b_i \in k[\frac{1}{f}] \subseteq O_P(V)$ である．0 でない b_j すべてに現れる $\frac{1}{f}$ の次数のうち最小のものを $e \geq 0$ として, (4.5) の両辺に f^e をかけたものを

$$c_1 u_1 + \cdots + c_d u_d = 0 \tag{4.6}$$

とする．このとき定数項が 0 でない c_j が存在するが, これは $u_1, ..., u_d$ が W の基底であったことに矛盾する．ゆえに $u_1, ..., u_d$ は $k(f)$ 上 1 次独立となり, $d \leq m$ が示された．

次に $d \geq m$ を示そう．$u_1, ..., u_m$ を $k(V)$ の $k(f)$ 基底とし,

$$D = \sum_P m_P \, P, \qquad m_P = \max\{0, -\min\{\mathrm{ord}_P(u_j)\}\}$$

とおくと D は有効な因子で

$$u_1, ..., u_m \in L(D)$$

が成り立つ．一方任意の自然数 r に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f^r\,u_j)+(r\,(f)_\infty+D) &= r\,\mathrm{div}(f)+\mathrm{div}(u_j)+r\,(f)_\infty+D\\ &= r\,((f)_0-(f)_\infty)+\mathrm{div}(u_j)+r\,(f)_\infty+D\\ &= r\,(f)_0+\mathrm{div}(u_j)+D\geq 0\end{aligned}$$

となるから $f^r\,u_j\in L(r\,(f)_\infty+D)$ が成り立つ．特に $r\leq s$ のとき

$$f^r\,u_j\in L(r\,(f)_\infty+D)\subseteq L(s\,(f)_\infty+D)$$

となることから，$0\leq i\leq s$ なる i に対して $f^i\,u_j\in L(s\,(f)_\infty+D)$ が成り立つ．これより

$$U=\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{s}c_if^iu_j\mid c_i\in k\right\}\subseteq L(s(f)_\infty+D)$$

が得られるが，U は明らかに k 線型空間であり，$u_1,\ldots,u_m$ が $k(f)$ 上 1 次独立であることから，f^iu_j は U の基である．従って $\dim_k U\leq\dim_k L(s(f)_\infty+D)$ より

$$m(s+1)\leq\ell(s\,(f)_\infty+D) \tag{4.7}$$

を得る．$D\geq 0$ より $s(f)_\infty\leq s(f)_\infty+D$ となるので，定理 4.17, (1) を適用すると

$$\ell(s(f)_\infty+D)\leq\ell(s(f)_\infty)+\deg D \tag{4.8}$$

が得られる．ここで定理 4.17, (2) より $\ell(s(f)_\infty)\leq sd+1$ となることに注意すると，(4.7), (4.8) より

$$m(s+1)\leq\ell(s(f)_\infty)+\deg D\leq sd+1+\deg D \tag{4.9}$$

を得る．$d<m$ と仮定すると，

$$s>\frac{1+\deg D}{m-d}$$

を満たす自然数 s が存在するので，このような s に対して

$$m(s+1)-(sd+1+\deg D)=(m-d)s-1-\deg D+m>0$$

となり (4.9) に矛盾する．従って $d\geq m$ が成り立ち，前述の結果とあわせると

$d = m$ が得られる. ∎

定理 4.20 非特異射影曲線 V 上の有理関数 $f \neq 0$ は $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ を満たす.

Proof　f が定数でないときは定理 4.19 より $\deg(f)_0 = \deg(f)_\infty$ となるので $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ である. また f が 0 でない定数のときは任意の $P \in V$ に対して $\mathrm{ord}_P(f) = 0$ であるから $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ が成り立つ. ∎

定理 4.20 より次の定理が得られる.

定理 4.21 非特異射影曲線 V 上の線型同値な因子 D, D' について $\deg D = \deg D'$ が成り立つ.

定理 4.22 非特異射影曲線 V 上の因子 D について次が成り立つ.

(1)　$\deg D < 0$ ならば $L(D) = 0$

(2)　$\deg D = 0$ かつ $\ell(D) > 0$ ならば $D \sim 0$

Proof　(1)　$L(D) \neq 0$ とすると 0 でない有理関数 $f \in L(D)$ が存在する. $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ であるから, $\deg(\mathrm{div}(f) + D) \geq 0$ が成り立ち, 定理 4.20 より

$$0 \leq \deg(\mathrm{div}(f) + D) = \deg(\mathrm{div}(f)) + \deg D = \deg D$$

となり仮定 $\deg D < 0$ に反するから, $L(D) = 0$ が成り立つ.

(2)　$\ell(D) > 0$ より 0 でない有理関数 $f \in L(D)$ が存在し, $\mathrm{div}(f)+D \geq 0$ となるが, $\deg D = 0$ より $\deg(\mathrm{div}(f)+D) = \deg D = 0$ となるので $\mathrm{div}(f)+D = 0$, すなわち $D = -\mathrm{div}(f)$ が成り立つ. これより $D \sim 0$ を得る. ∎

定理 4.23 非特異射影曲線 V 上の 0 でない有理関数 f に対して, 整数 $M \geq 0$ が存在して, 任意の整数 r について $\deg(r\,(f)_\infty) - \ell(r\,(f)_\infty) \leq M$ が成り立つ.

Proof　まず f が定数でないとする. $r > 0$ のときは定理 4.19 の証明の後半で (4.7) を導いたのと同様にして

$$m(r+1) \leq \ell(r\,(f)_\infty) + \deg D$$

が得られる．ただし $m = [k(V):k(f)]$ である．定理 4.19 より $m = \deg(f)_\infty$ であるから

$$(r+1)\deg(f)_\infty \leq \ell(r(f)_\infty) + \deg D$$

より

$$\deg(r(f)_\infty) - \ell(r(f)_\infty) \leq \deg D - \deg(f)_\infty$$

を得る． $r = 0$ のときは $\deg(r(f)_\infty) - \ell(r(f)_\infty) = \deg 0 - \ell(0) = -1$ であり， $r < 0$ のときは $\deg(r(f)_\infty) - \ell(r(f)_\infty) < 0$ となるので M として $\deg D - \deg(f)_\infty$ 以上の非負整数を選べば, f が定数でないときは

$$\deg(r(f)_\infty) - \ell(r(f)_\infty) \leq M$$

が任意の整数 r に対して成り立つ.

f が 0 でない定数とすると $(f)_\infty = 0$ であることから,

$$\deg(r(f)_\infty) - \ell(r(f)_\infty) = -1 \leq M$$

が成り立つ. ∎

4.4 Riemann の定理

非特異射影曲線 V 上の因子 D に対して

$$s(D) = \deg D - \ell(D)$$

とおく． $L(0) = k$ であることから， $s(0) = \deg 0 - \ell(0) = -1$ である．

補題 4.24 非特異射影曲線 V 上の因子 D, D' に対して次が成り立つ.

(1) $D \leq D'$ ならば $s(D) \leq s(D')$

(2) $D \sim D'$ ならば $s(D) = s(D')$

Proof (1) 仮定より $\deg D \leq \deg D'$ であり, 定理 4.17, (1) より $\ell(D') - \ell(D) \leq \deg(D' - D)$ が成り立つ．これより

$$s(D') - s(D) = (\deg D' - \deg D) - (\ell(D') - \ell(D)) \geq 0$$

となるので $s(D) \leq s(D')$ を得る.

(2) $D \sim D'$ より, ある有理関数 f が存在して $D = D' + \mathrm{div}(f)$ となるので, 定理 4.20 を適用すると

$$\deg D = \deg D' + \deg(\mathrm{div}(f)) = \deg D'$$

が得られる. 一方, 定理 4.15 より $\ell(D) = \ell(D')$ であるから $s(D) = s(D')$ が成り立つ. ■

定理 4.25 (Riemann の定理) V を非特異射影曲線とする. このときある整数 g が存在して, 任意の因子 D に対して $\ell(D) \geq \deg D + 1 - g$ が成り立つ.

Proof D が V 上の因子全体を動くとき $s(D)$ が上に有界であることを示せばよい. 定数でない有理関数を 1 つ選び f とおき, 因子 D を任意に選び

$$D = \sum_{\substack{n_P>0 \\ P\in V-Z_f}} n_P P + \sum_{\substack{m_P<0 \\ P\in V-Z_f}} m_P P + \sum_{\substack{n_Q>0 \\ Q\in Z_f}} n_Q Q + \sum_{\substack{m_Q<0 \\ Q\in Z_f}} m_Q Q \tag{4.10}$$

と表す. ただし Z_f は f の極全体のなす集合である. ここで

$$h = \prod_{\substack{n_P>0 \\ P\in V-Z_f}} (f - f(P))^{n_P}$$

とおくと h は有理関数で $V - Z_f$ の任意の点 P 対して

$$\mathrm{ord}_P(h) \geq n_P$$

が成り立つ. $D' = D - \mathrm{div}(h)$ とおくと, (4.10) の右辺の第 1 項が消え

$$D' = D - \mathrm{div}(h) = \sum_{\substack{m_P<0 \\ P\in V-Z_f}} m'_P P + \sum_{\substack{n_Q>0 \\ Q\in Z_f}} n'_Q Q + \sum_{\substack{m_Q<0 \\ Q\in Z_f}} m'_Q Q$$

と表される. この右辺は十分大きな自然数 r を選ぶと

$$\sum_{\substack{m_P<0 \\ P\in V-Z_f}} m'_P P + \sum_{\substack{n_Q>0 \\ Q\in Z_f}} n'_Q Q + \sum_{\substack{m_Q<0 \\ Q\in Z_f}} m'_Q Q \leq r(f)_\infty$$

が成り立つようにできる. 以上で十分大きな自然数 r が存在して

$$D' = D - \operatorname{div}(h) \leq r(f)_\infty$$

の成り立つことが示された. 上式に補題 4.24 と定理 4.23 を適用すると, ある整数 $M \geq 0$ が存在して

$$s(D) = s(D - \operatorname{div}(h)) \leq s(r(f)_\infty) \leq M$$

が得られる. ∎

定理 4.25 より D が因子全体を動くとき, 整数値 $s(D) + 1 = \deg D - \ell(D) + 1$ の最大値が存在する. これを V の種数という. $D = 0$ のとき $\deg D - \ell(D) + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ であるから V の種数 g は非負整数である.

定理 4.26 g を非特異射影曲線 V の種数とする. ある因子 D_0 が $\deg D_0 - \ell(D_0) + 1 = g$ を満たせば $D \geq D_0$ を満たす因子 D はすべて $\deg D - \ell(D) + 1 = g$ を満たす.

Proof $D \geq D_0$ とすると補題 4.24, (1) より

$$s(D) \geq s(D_0) = g - 1 = \max\{s(D')\}$$

が成り立つので $s(D) = g - 1$ が得られる. ∎

定理 4.27 g を非特異射影曲線 V の種数とする. 因子 D_0 が $\deg D_0 - \ell(D_0) + 1 = g$ を満たすとき $\deg D \geq \deg D_0 + g$ を満たす因子 D はすべて $\deg D - \ell(D) + 1 = g$ を満たす.

Proof $\deg D \geq \deg D_0 + g$ とすると, $\deg(D - D_0) \geq g$ であるから

$$\deg(D - D_0) \geq g \geq \deg(D - D_0) - \ell(D - D_0) + 1$$

が成り立つ. 従って $\ell(D - D_0) \geq 1$ となるので $\operatorname{div}(f) + (D - D_0) \geq 0$ を満たす 0 でない有理関数 f が存在することから

$$\operatorname{div}(f) + D \geq D_0$$

が得られる．このとき補題 4.24 より

$$s(D) = s(D + \mathrm{div}(f)) \geq s(D_0) = g - 1$$

が成り立つので $s(D) = g - 1$ となり $\deg D - \ell(D) + 1 = g$ が得られる． ∎

5章　Riemann-Roch の定理

この章では, 非特異射影曲線についての Riemann-Roch の定理を証明する. §5.1 では関数体 $k(V)$ の直積環 $\prod_{P \in V} k(V)$ の部分環 $\mathcal{A}_V$, および因子 $D = \sum_P n_P P$ から定まる $\mathcal{A}_V$ の k 線型部分空間

$$\mathcal{A}_V(D) = \{(f_P) \in \mathcal{A}_V \mid \mathrm{ord}_P(f_P) \geq -n_P\}$$

を導入し, k 線型空間 $I(D) = \mathcal{A}_V/(\mathcal{A}_V(D) + k(V))$ の次元 $i(D)$ が有限で Riemann-Roch の定理の暫定版

$$\ell(D) - i(D) = \deg D + 1 - g$$

が成り立つことを証明する. §5.2 では非特異射影曲線 V の有理関数体 $k(V)$ の微分加群 $\Omega(k(V))$ が 1 次元 $k(V)$ 線型空間であることを示す. §5.3 では有理関数の局所パラメータに関するローラン展開の主要部から有理微分の留数を定義し, 留数が局所パラメータによらず定まることを示す. さらに有理微分 fdg の点 P における留数と $k(V)$ のべき有限次線型変換 $[\pi f, g]$ のトレースが一致することを利用して留数の総和が 0 になるという留数定理を証明する. §5.4 では留数定理を用いて 0 でない有理微分が因子を定めること, これらの因子が線型同値を除いて一意に定まることなどを示し, 標準因子 K_V を定義する. さらに $\mathcal{A}_V/k(V)$ の双対空間の部分空間 J_V を考察することにより $I(D)$ の双対空間が $L(K_V - D)$ と k 線型同型であるという双対定理を証明し, Riemann-Roch の定理を導く.

なお, この章でも k は代数的閉体とし, §5.2 を除いて $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ は非特異射影曲線を表すものとする.

5.1 Riemann-Roch の定理の暫定版

$k(V)$ の無限直積 $\prod_{P\in V} k(V)$ は成分ごとの加法, 乗法により可換環となるが, 写像

$$k(V) \ni f \quad \longmapsto \quad (f) \in \prod_{P\in V} k(V)$$

による像を $k(V)$ と同一視することにより $k(V)$ 代数と見なすことができる. ここで

$$\mathcal{A}_V := \{\,(f_P) \in \prod_{P\in V} k(V) \mid \text{有限個の点を除いて } f_P \in O_P(V)\,\}$$

とおくと, $(f_P), (g_P) \in \mathcal{A}_V$ に対して

$$(f_P) + (g_P) = (f_P + g_P) \in \mathcal{A}_V \quad \text{かつ} \quad (f_P)(g_P) = (f_P g_P) \in \mathcal{A}_V$$

が成り立つので $\mathcal{A}_V$ は $\prod_{P\in V} k(V)$ の部分環である. また有理関数の極が有限個であることから $k(V) \subseteq \mathcal{A}_V$ となるので $\mathcal{A}_V$ を $k(V)$ 代数と見なすことができる.

因子 $D = \sum_{P\in V} n_P P$ に対して

$$\mathcal{A}_V(D) := \{(f_P) \in \mathcal{A}_V \mid \text{任意の } P \in V \text{ に対して } \mathrm{ord}_P(f_P) \geq -n_P\}$$

とおく. $\mathcal{A}_V(D)$ は $\mathcal{A}_V$ の k 線型部分空間である. また任意の $(f_P) \in \mathcal{A}_V$ に対して, $\mathrm{ord}_P(f_P) < 0$ となる P は有限個であるから

$$D' = \sum_{\mathrm{ord}_P(f_P)<0} \mathrm{ord}_P(f_P)\, P$$

とおくと D' は因子となり, $(f_P) \in \mathcal{A}_V(-D')$ を満たす. 従って

$$\mathcal{A}_V = \bigcup_D \mathcal{A}_V(D) \tag{5.1}$$

が成り立つ. $(f) \in \mathcal{A}_V(D)$ のとき任意の点 P で $\mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P$ が成り立ち, $f \in L(D)$ となるので次の定理が得られる.

定理 5.1 因子 D に対して $L(D) = k(V) \cap \mathcal{A}_V(D)$ が成り立つ.

t_P を点 P での局所パラメータ, m を整数とすると

$$O_P(V)\, t_P^{-m} = \{f \in O_P(V) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq -m\}$$

は $O_P(V)$ 加群であり, $m' \le m$ のとき

$$O_P(V)\, t_P^{-m'} \subseteq O_P(V)\, t_P^{-m}$$

が成り立ち, k 上の線型空間と見なせば

$$\dim_k \frac{O_P(V)\, t_P^{-m}}{O_P(V)\, t_P^{-m'}} = m - m'$$

が成り立つ. また因子 $D = \sum n_P P,\ D' = \sum n'_P P$ が $D \le D'$ を満たすとき, $n_P \le n'_P\ (\forall P \in V)$ であるから, $(f_P) \in \mathcal{A}_V(D)$ に対して $\mathrm{ord}_P(f_P) \ge -n_P \ge -n'_P$ より $(f_P) \in \mathcal{A}_V(D')$ を得る. 従って $\mathcal{A}_V(D) \subseteq \mathcal{A}_V(D')$ が成り立つ.

定理 5.2 因子 D, D' が $D \le D'$ を満たすとき $\dim_k(\mathcal{A}_V(D')/\mathcal{A}_V(D)) = \deg D' - \deg D$ が成り立つ.

Proof　$D = \sum n_P P,\ D' = \sum n'_P P$ とおくと仮定より任意の点 P に対して $n_P \le n'_P$ が成り立つ. t_P を点 P での局所パラメータとし

$$\varphi : \mathcal{A}_V(D') \ni (f_P) \quad \longmapsto \quad \bigoplus\nolimits_P O_P(V) t_P^{-n'_P} / O_P(V) t_P^{-n_P}$$

とおくと, φ は k 線型写像であり, $\mathcal{A}_V(D')$ の定義より全射となる. また

$$(f_P) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad f_P \in O_P(V) t_P^{-n_P} \quad (\forall P) \quad \Longleftrightarrow \quad (f_P) \in \mathcal{A}_V(D)$$

が成り立つので $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{A}_V(D)$ を得る. これより

$$\begin{aligned}\dim_k(\mathcal{A}_V(D')/\mathcal{A}_V(D)) &= \dim_k \left(\bigoplus\nolimits_P O_P(V) t_P^{-n'_P} / O_P(V) t_P^{-n_P} \right) \\ &= \sum_P (n'_P - n_P) = \sum_P n'_P - \sum_P n_P \\ &= \deg D' - \deg D\end{aligned}$$

が得られる. ∎

因子 D に対して $\mathcal{A}_V$, $\mathcal{A}_V(D) + k(V)$ を k 線型空間と見なしたときの剰余空間を

$$I(D) := \mathcal{A}_V / (\mathcal{A}_V(D) + k(V))$$

とおく. $I(D)$ は k 線型空間である.

定理 5.3 (Riemann-Roch の定理暫定版) V 上の因子 D に対して $I(D)$ は有限次元 k 線型空間で, 次式が成り立つ. ただし g は V の種数, $i(D) = \dim_k I(D)$ である.

$$\ell(D) - i(D) = \deg D + 1 - g$$

Proof　因子 D' が $D \leq D'$ を満たすとする. 定理 5.1 の後で説明したように $\mathcal{A}_V(D) \subseteq \mathcal{A}_V(D')$ となることから, 準同型

$$\mathcal{A}_V(D') \xrightarrow{\text{包含写像}} \mathcal{A}_V(D') + k(V)$$

$$\mathcal{A}_V(D') + k(V) \xrightarrow{\text{自然準同型}} (\mathcal{A}_V(D') + k(V))/(\mathcal{A}_V(D) + k(V))$$

を合成して得られる全射の核は明らかに $\mathcal{A}_V(D)$ を含むので, 全射

$$\varphi : \mathcal{A}_V(D')/\mathcal{A}_V(D) \longmapsto (\mathcal{A}_V(D') + k(V))/(\mathcal{A}_V(D) + k(V))$$

が誘導される. ここで k 線型空間として

$$\mathcal{A}_V(D') \cap (\mathcal{A}_V(D) + k(V)) = \mathcal{A}_V(D) + (\mathcal{A}_V(D') \cap k(V))$$

が成り立つことに注意すれば, 第 2 同型定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \frac{\mathcal{A}_V(D') \cap (\mathcal{A}_V(D) + k(V))}{\mathcal{A}_V(D)} = \frac{\mathcal{A}_V(D) + (\mathcal{A}_V(D') \cap k(V))}{\mathcal{A}_V(D)} \\
&= \frac{\mathcal{A}_V(D) + L(D')}{\mathcal{A}_V(D)} \simeq \frac{L(D')}{L(D') \cap \mathcal{A}_V(D)} = \frac{L(D')}{L(D)}
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって定理 5.2 より

$$\begin{aligned}
\dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D') + k(V)}{\mathcal{A}_V(D) + k(V)} &= \dim_k(\mathcal{A}_V(D')/\mathcal{A}_V(D)) - \dim_k \mathrm{Ker}(\varphi) \\
&= (\deg D' - \deg D) - (\ell(D') - \ell(D)) \\
&= (\deg D' - \ell(D')) - (\deg D - \ell(D))
\end{aligned}$$

を得る. 一方 $\deg D_0 - \ell(D_0) = g - 1$ を満たす因子 D_0 が存在するので D' を $D_0 \leq D'$ かつ $D \leq D'$ となるように選んでおけば定理 4.26 より

$$\deg D' - \ell(D') = g - 1$$

が得られるので

$$\dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D') + k(V)}{\mathcal{A}_V(D) + k(V)} = g - 1 + \ell(D) - \deg D \tag{5.2}$$

が成り立つ．$\mathcal{A}_V(D') + k(V) = \mathcal{A}_V$ ならば (5.2) より

$$i(D) = g - 1 + \ell(D) - \deg D$$

となり, $I(D)$ が有限次元であることと, 求める等式が得られる．従って $\mathcal{A}_V(D') + k(V) \subsetneq \mathcal{A}_V$ であると仮定して矛盾を導けばよい．$\mathcal{A}_V(D') + k(V) \subsetneq \mathcal{A}_V$ より, ある $(f_P) \in \mathcal{A}_V$ で $(f_P) \notin \mathcal{A}_V(D') + k(V)$ となるものが存在する．(5.1) より $\mathcal{A}_V = \bigcup_D \mathcal{A}_V(D)$ であるから，$(f_P) \in \mathcal{A}_V(D_1) + k(V)$ を満たす因子 D_1 が存在する．ここで $D' \leq D_2$ かつ $D_1 \leq D_2$ となる因子 D_2 を選ぶと

$$\mathcal{A}_V(D') + k(V) \subsetneq \mathcal{A}_V(D_2) + k(V)$$

となるが, これは定理 4.26 より

$$\deg D_2 - \ell(D_2) = g - 1$$

が得られ

$$\dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D_2) + k(V)}{\mathcal{A}_V(D) + k(V)} = g - 1 + \ell(D) - \deg D = \dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D') + k(V)}{\mathcal{A}_V(D) + k(V)}$$

となることと矛盾する．以上で定理が証明された． ∎

定理 5.3 において $D = 0$ とすれば次の結果を得る．

定理 5.4 非特異射影曲線 V の種数 g に対して $g = i(0)$ が成り立つ．

定理 5.5 因子 D_0 が $\deg D_0 - \ell(D_0) + 1 = g$ を満たすとき $\deg D \geq \deg D_0 + g$ を満たす因子 D は $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_V(D) + k(V)$ を満たす．

Proof　定理 5.3 の証明中で示したように $D \geq D'$ を満たす因子 D' に対して

$$\dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D) + k(V)}{\mathcal{A}_V(D') + k(V)} = (\deg D - \ell(D)) - (\deg D' - \ell(D'))$$

が成り立つ. 定理 4.27 より $\deg D - \ell(D) = g - 1$ より

$$\dim_k \frac{\mathcal{A}_V(D) + k(V)}{\mathcal{A}_V(D') + k(V)} = g-1-(\deg D' - \ell(D')) = i(D') = \dim_k \frac{\mathcal{A}_V}{\mathcal{A}_V(D') + k(V)}$$

となることから $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_V(D) + k(V)$ が得られる. ∎

5.2 関数体の微分加群

閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ の座標環の微分加群 $\Omega_k(O(V))$ を V の微分加群といい, $\Omega(V)$ と表す. また k 導分 $d_{O(V)}$ を V の k 微分といい, d_V と表す.

定理 5.6 $\mathbb{A}^n(k)$ の微分加群 $\Omega(\mathbb{A}^n(k))$ は階数 n の自由 $k[X_1, ..., X_n]$ 加群である.

Proof $R = k[X_1, ..., X_n]$ とする. $e_1, ..., e_n$ を基底とする自由 R 加群を

$$\Omega = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$$

とおき, $\Omega \simeq \Omega(\mathbb{A}^n(k))$ であることを示す. ここで写像

$$d : R \ni F \quad \longmapsto \quad dF = F_{X_1}e_1 + \cdots + F_{X_n}e_n \in \Omega$$

は明らかに k 線型であるが

$$\begin{aligned} d\,(FG) &= (FG)_{X_1}e_1 + \cdots + (FG)_{X_n}e_n \\ &= (F_{X_1}G + FG_{X_1})e_1 + \cdots + (F_{X_n}G + FG_{X_n})e_n \\ &= G \cdot dF + F \cdot dG \end{aligned}$$

より k 導分となる. 一方 R 加群 M と k 導分 $D : R \mapsto M$ が任意に与えられたとする. Ω は自由 R 加群であるから, $\varphi(e_i) = D(X_i)$ を満たす R 準同型 $\varphi : \Omega \mapsto M$ が存在する

$$\varphi : \Omega \ni F_1e_1 + \cdots + F_ne_n \quad \longmapsto \quad F_1D(X_1) + \cdots + F_nD(X_n) \in M$$

このとき定理 1.21, (3) に注意すれば, 任意の $F \in R$ に対して

$$\begin{aligned} (\varphi d)(F) &= \varphi(F_{X_1}e_1 + \cdots + F_{X_n}e_n) = \varphi(F_{X_1}e_1) + \cdots + \varphi(F_{X_n}e_n) \\ &= F_{X_1}D(X_1) + \cdots + F_{X_n}D(X_n) = D(F) \end{aligned}$$

が成り立ち, $\varphi d = D$ が得られる. また R 準同型 $\varphi' : \Omega \mapsto M$ が $\varphi' d = D$ を満たすとすると $D(X_i) = (\varphi' d)(X_i) = \varphi'(e_i)$ となるので $\varphi' = \varphi$ が成り立つ. すなわち $\varphi d = D$ を満たす R 準同型 $\varphi : \Omega \mapsto M$ は D に対して一意である. これより定理 1.24 を適用すると $\Omega \simeq \Omega(\mathbb{A}^n(k))$ が得られる. ∎

定理 5.7 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体, $\mathbf{I}(V) = \langle F_1, ..., F_r \rangle$ とする. $d = d_{\mathbb{A}^n(k)}$ とすると $O(V)$ 同型 $\Omega(\mathbb{A}^n(k))/N \simeq \Omega(V)$ が成り立つ. ただし $N = O(\mathbb{A}^n(k))dF_1 + \cdots + O(\mathbb{A}^n(k))dF_r + \mathbf{I}(V)\Omega(\mathbb{A}^n(k))$ である.

Proof　$R = O(\mathbb{A}^n(k))$, $M = O(V)$ とおく.

$$R = k[X_1, ..., X_n], \qquad M = k[X_1, ..., X_n]/\langle F_1, ..., F_r \rangle$$

である. $\Omega(V)$ が M 加群, 従って R 加群と見なすことができることを注意しておく. ここで $D : R \mapsto \Omega(V)$ を

$$D : R \xrightarrow[\text{自然な環準同型}]{f} M \xrightarrow[k\ \text{微分}]{d_V} \Omega(V)$$

とおくと, 明らかに D は R から $\Omega(V)$ への k 導分である. 定理 1.23 より $D = \varphi d$ を満たす R 準同型 $\varphi : \Omega(R) \mapsto \Omega(V)$ が存在する. ここで $\Omega(R) = \Omega(\mathbb{A}^n(k))$ より $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$, すなわち

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = RdF_1 + \cdots + RdF_r + \mathbf{I}(V)\Omega(R)$$

を示せば定理が得られる. $D(F_j) = 0$ より $dF_j \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ となるので

$$RdF_1 + \cdots + RdF_r \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

が成り立つ. また $\mathbf{I}(V)\Omega(V) = 0$ であるから $\mathbf{I}(V)\Omega(R) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ となり

$$N \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

が得られる. これより R 準同型

$$\bar{\varphi} : \Omega(R)/N \mapsto \Omega(V)$$

が誘導される．一方

$$D' : R \xrightarrow{d} \Omega(R) \xrightarrow[\text{自然な } R \text{ 準同型}]{g} \Omega(R)/N$$

とおくと D' は k 導分であり，$D'(\mathbf{I}(V)) = 0$ となるので R 加群 $M = R/\mathbf{I}(V)$ からの k 導分

$$D'' : M = R/\mathbf{I}(V) \longmapsto \Omega(R)/N$$

を誘導する．$D''f = gd$ である．これより M 準同型

$$\psi : \Omega(V) \longmapsto \Omega(R)/N$$

で $D'' = \psi d_V$ を満たすものが存在する．

ψ は R 準同型でもあり，

$$\psi\bar{\varphi}gd = \psi\varphi d = \psi d_V f = D''f = gd$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] & M \arrow[r, "d_V"] \arrow[ddl, "D''"] & \Omega(V) \arrow[ddll, shift left, "\psi"'] \\
\Omega(R) \arrow[d, "g"'] & & \\
\Omega(R)/N \arrow[uurr, shift left, "\bar{\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

となるが，系 1.25 より $d(R)$ が R 加群として $\Omega(R)$ を生成するので $\psi\bar{\varphi}g = g$ となり，g が全射であるから

$$\psi\bar{\varphi} = \mathrm{id}_{\Omega(R)/N}$$

が成り立つ．

また

$$\bar{\varphi}\psi d_V f = \bar{\varphi}D''f = \bar{\varphi}gd = d_V f$$

であるが，上と同様にして

$$\bar{\varphi}\psi = \mathrm{id}_{\Omega(V)}$$

が成り立つ．よって $\bar{\varphi}, \psi$ は R 同型で $\Omega(R)/N \simeq \Omega(M)$ が成り立つ． ∎

定理 5.7 より V の微分加群 $\Omega(V)$ は $O(V)$ 加群として $d_V X_i$ で生成される．これより次の定理が得られる．

定理 5.8 閉部分多様体 $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ の微分加群 $\Omega(V)$ は有限生成 $O(V)$ 加群である．

補題 5.9 R を k 可換な代数, M を R 加群, $D : R \mapsto M$ を k 導分とする. このとき

$$D\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}D(x) - \frac{x}{y^2}D(y)$$

が成り立つ. ただし $x, y \in R, y \neq 0$ とする.

Proof　k 導分の定義より $D(\frac{x}{y}) = D(x\frac{1}{y}) = \frac{1}{y}D(x) + xD(\frac{1}{y})$ が成り立つ. ここで

$$0 = D(1) = D\left(y\,\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}D(y) + yD\left(\frac{1}{y}\right)$$

より $D(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y^2}D(y)$ となるので求める式が得られる. ∎

定理 5.10 $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ を射影曲線, P をその非特異点, t を点 P での局所パラメータとする. このとき $O_P(V)$ の微分加群 $\Omega(O_P(V))$ は t の微分 dt を基底とする階数 1 の自由 $O_P(V)$ 加群である. ただし $d = d_{O_P(V)}$ とする.

Proof　$R = O_P(V)$ とおく. 定理 3.38 より R はあるアフィン曲線 V_0 の座標環 $O(V_0)$ の局所化 R_0 に一致する. $O(V_0)$ が $x_1, ..., x_r$ で生成されるとき, 定理 5.8 の前で述べたように $\Omega(V_0)$ は $O(V_0)$ 加群として $d_{V_0}x_1, ..., d_{V_0}x_r$ で生成される. このとき R_0 の元は $O(V_0)$ の元 x と $y \neq 0$ により $\frac{x}{y}$ と表されるので $d' = d_{R_0}$ とおくと, 補題 5.9 より

$$d'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}d'(x) - \frac{x}{y^2}d'(y)$$

が成り立つ. これより $\Omega(R_0)$ は R_0 加群として $d'x_1, ..., d'x_r$ で生成される. 従って $\Omega(R)$ は有限生成 R 加群である. 一方 $R = k + tR$ であるから R の元は $a + tr$, $a \in k$, $r \in R$ と表され

$$d(a + tr) = d(tr) = rdt + tdr \in Rdt + t\,\Omega(R)$$

となるので $\Omega(R) = Rdt + t\Omega(R)$ が得られ, 中山の補題 (定理 1.7) より

$$\Omega(R) = R\,dt$$

を得る. dt が $\Omega(R)$ の R 基底であることを示すには任意の R の元 $r \neq 0$ に対して $rdt \neq 0$ を示せばよい. ここで $r = \alpha t^s$, $\alpha \in R^\times$ と表されることから

$$\alpha^{-1}rdt = \alpha^{-1}\alpha t^s dt = t^s dt$$

となるので $t^s dt \neq 0$ を示せばよい．ここで $m > s$ を満たす整数 m で, $m+1$ が $\mathrm{char}(k)$ の倍数でないものを 1 つ選ぶ．R の元 f は

$$f = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m+1} t^{m+1} + t^{m+2} f', \quad f' \in R$$

と表され $c_0, ..., c_{m+1}, f'$ は f から一意的に定まるので

$$D(f) = c_1 + 2c_2 t + \cdots + (m+1) c_{m+1} t^m \in R/\langle t^{m+1} \rangle$$

となる写像 $D : R \mapsto R/\langle t^{m+1} \rangle$ が定義できる．D は k 導分であるので, 定理 1.23 より $D = \varphi d$ を満たす R 準同型

$$\varphi : \Omega(R) \mapsto R/\langle t^{m+1} \rangle$$

が存在し

$$\varphi d(t^{m+1}) = D(t^{m+1}) = (m+1) t^m \neq 0$$

を満たす．これより $dt^{m+1} \neq 0$ となるので

$$0 \neq dt^{m+1} = (m+1) t^m dt = (m+1) t^{m-s} t^s dt$$

が成り立ち $t^s dt \neq 0$ が得られる．よって $\Omega(R)$ は dt を基底とする階数 1 の自由 R 加群である． ∎

定理 5.11 P を射影曲線 V の非特異点, t を点 P での局所パラメータとする．このとき $k(V)$ の微分加群 $\Omega(k(V))$ は t の微分 $d_{k(V)} t$ を基底とする 1 次元 $k(V)$ 線型空間である．

Proof　$K = k(V)$, $R = O_P(V)$ とおく．包含写像 $R \mapsto K$ と k 微分 $d_K : K \mapsto \Omega(K)$ の合成 $d' : R \mapsto \Omega(K)$ は k 導分となるので定理 1.23 より $d' = \varphi d_R$ を満たす R 準同型 $\varphi : \Omega(R) \mapsto \Omega(K)$ が存在する．補題 5.9 より $\Omega(K)$ は $d_K\, x$ $(x \in R)$ で生成される K 線型空間であるが, 定理 5.10 より $\Omega(R)$ は $d_R\, t$ を基底とする自由 R 加群であるから, $d_K(R)$ は $d_K t$ で生成される R 加群となる．これより $\Omega(K)$ は $d_K t$ で生成される K 線型空間である．すなわち

$$\Omega(K) = K\, d_K t$$

が成り立つ．これより $d_K t \neq 0$ を示せばよい． $\Omega(R) = R d_R t$ であるから $f \in R$ に対して

$$d_R f = f_t d_R t \qquad (f_t \in R)$$

と表される．ここで

$$D : K \ni \frac{f}{g} \quad \longmapsto \quad \frac{1}{g^2}(g f_t - f g_t) \in K \qquad (f, g \in R, \quad g \neq 0)$$

とおく．まず D が well-defined であることを確認するために $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$ とすると，$fg' = f'g$ であるから

$$d_R(fg' - f'g) = f g'_t d_R t + g' f_t d_R t - f' g_t d_R t - g f'_t d_R t = 0$$

より

$$f g'_t + g' f_t - f' g_t - g f'_t = 0$$

が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\left(\frac{f_t}{g} - \frac{f g_t}{g^2}\right) - \left(\frac{f'_t}{g'} - \frac{f' g'_t}{(g')^2}\right) &= \frac{f_t}{g} - \frac{f g_t}{g^2} - \frac{f'_t}{g'} + \frac{f' g'_t}{(g')^2} \\ &= \frac{f_t}{g} - \frac{f' g_t}{g g'} - \frac{f'_t}{g'} + \frac{f g'_t}{g g'} \\ &= \frac{g' f_t - f' g_t - g f'_t + f g'_t}{g g'} = 0\end{aligned}$$

となるので D は well-defined である．また $a \in k$ に対して $d_R(af) = (af_t) d_R t$ に注意すれば

$$D\left(a\frac{f}{g}\right) = D\left(\frac{af}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g(af_t) - (af)g_t) = aD\left(\frac{f}{g}\right)$$

が成り立つ. さらに

$$
\begin{aligned}
D\left(\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}\right) &= D\left(\frac{fg'+f'g}{gg'}\right)\\
&= \frac{1}{(gg')^2}(gg'(fg'+f'g)_t-(fg'+f'g)(gg')_t)\\
&= \frac{1}{(gg')^2}(gg'(g'f_t+fg'_t+gf'_t+f'g_t)-(fg'+f'g)(gg'_t+g'g_t))\\
&= \frac{1}{(gg')^2}((g')^2(gf_t-fg_t)+g^2(g'f'_t-f'g'_t))\\
&= \frac{1}{g^2}(gf_t-fg_t)+\frac{1}{(g')^2}(g'f'_t-f'g'_t)\\
&= D\left(\frac{f}{g}\right)+D\left(\frac{f'}{g'}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つので D は k 線型写像である. 一方 $f,f',g,g'\in R$, $g,g'\neq 0$ に対して $d_R(ff')=(ff')_t d_R t$ であるが

$$d_R(ff')=fd_Rf'+f'd_Rf=f(f'_td_Rt)+f'(f_td_Rt)=(ff'_t+f'f_t)d_Rt$$

より

$$(ff')_t=ff'_t+f'f_t$$

が成り立つ. 同様に $(gg')_t=gg'_t+g'g_t$ も成り立つので

$$
\begin{aligned}
D\left(\frac{f}{g}\frac{f'}{g'}\right) &= \frac{1}{(gg')^2}(gg'(ff')_t-ff'(gg')_t)\\
&= \frac{1}{(gg')^2}(gg'(ff'_t+f'f_t)-ff'(gg'_t+g'g_t))\\
&= \frac{1}{(gg')^2}(fg(g'f'_t-f'g'_t)+f'g'(gf_t-fg_t))\\
&= \frac{f}{g}D\left(\frac{f'}{g'}\right)+\frac{f'}{g'}D\left(\frac{f}{g}\right)
\end{aligned}
$$

となるから D は k 導分である. 従って $D=\psi d_K$ を満たす K 準同型 $\psi:\Omega(K)\mapsto K$ が存在し $\psi(d_Kt)=D(t)=t_t=1$ となるので $d_Kt\neq 0$ が得られる. 以上で定理が証明された. ∎

非特異射影曲線 V の有理関数体の微分加群 $\Omega(k(V))$ の元 ω を V の有理微分という. 点 P での局所パラメータを t とすると, 有理微分 $\omega\neq 0$ に対して定理 5.11 より, 0 でない有

理関数 f が存在して $\omega = f dt$ と表される $(d = d_{k(V)})$. ここで ω の P での位数を

$$\mathrm{ord}_P(\omega) := \mathrm{ord}_P(f)$$

と定める. これは P での局所パラメータの選び方によらない. なぜならば s も P での局所パラメータであるとし, $R = O_P(V)$ とおくと, $d(R) = Rds = Rdt$ であるから $ds = \alpha dt$, $dt = \beta ds$ となる $\alpha, \beta \in R$ が存在する. このとき $\alpha\beta = 1$ となり α, β は R の可逆元となる. $\omega = f dt = \beta f ds$ より

$$\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(\beta f)$$

が成り立つからである.

以下において $d = d_{k(V)}$ とする.

補題 5.12 $d(O_P(V)) \subseteq O_P(V)dt$ が成り立つ. ただし P は非特異射影曲線 V の点, t は P での局所パラメータである.

Proof　$R = O_P(V)$ とおく. d の R への制限 $d' : R \mapsto \Omega(k(V))$ は R の k 導分であるから, R 準同型 $\varphi : \Omega(R) \mapsto \Omega(k(V))$ が存在して $d' = \varphi d_R$ が成り立つ. $\Omega(R)$ は定理 5.10 より階数 1 の自由 R 加群であるから $\varphi(\Omega(R)) = \varphi(R\, d_R t) = Rdt$ が成り立つ. 従って

$$d(R) = d'(R) = \varphi(d_R(R)) \subseteq \varphi(\Omega(R)) = Rdt$$

が得られる. ∎

定理 5.13 非特異射影曲線 V の 0 でない有理関数 g が $\mathrm{ord}_P(dg) < 0$ となるならば P は g の極である. 従って有理微分 ω に対して $\mathrm{ord}_P(\omega) < 0$ を満たす点 P は有限個である.

Proof　$g \in O_P(V)$ ならば, 補題 5.12 より $dg \in O_P(V)dt$ となり, $\mathrm{ord}_P(dg) \geq 0$ が成り立つ. ただし t は P での局所パラメータである. これより $\mathrm{ord}_P(dg) < 0$ となるならば P は g の極である. また定理 5.11 より, 有理微分 ω は有理関数 f により $f dg$ と表されるので

$$\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(f dg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(dg)$$

となり, $\mathrm{ord}_P(\omega) < 0$ となる点は f または g の極であるから有限個である. ∎

有理微分 ω に対して $\mathrm{ord}_P(\omega) > 0$ となる点 P も有限個であるが (定理 5.29), その証明には留数定理を必要とする.

5.3 留数定理

この節を通じて V は非特異射影曲線を表すものとする.

$f \neq 0$ を有理関数, t を点 P での局所パラメータとする. $\mathrm{ord}_P(f) = -m < 0$ のとき

$$f = \frac{f_t}{t^m}, \qquad f_t \in O_P(V)^\times$$

と一意的に表される. $O_P(V)/tO_P(V) \simeq k$ より $O_P(V) = k + tO_P(V)$ となるので $f_t \equiv f_{-m} \bmod tO_P(V)$ を満たす定数 f_{-m} が存在する. 従って $f_t' \in O_P(V)$ が存在して $f_t = f_{-m} + tf_t'$ と表される. このとき

$$f = \frac{f_{-m}}{t^m} + \frac{f_t'}{t^{m-1}}, \quad \mathrm{ord}_P\left(f - \frac{f_{-m}}{t^m}\right) = \mathrm{ord}_P\left(\frac{f_t'}{t^{m-1}}\right) \geq -(m-1)$$

となるので $\frac{f_t'}{t^{m-1}}$ に同様の操作を施していけば

$$f = \frac{f_{-m}}{t^m} + \frac{f_{-(m-1)}}{t^{m-1}} + \cdots + \frac{f_{-1}}{t} + f' \qquad (f_{-i} \in k, \quad f' \in O_P(V))$$

と表される. $f_{-m}, ..., f_{-1}, f'$ が t から一意に定まるので

$$pp_t(f) := \frac{f_{-m}}{t^m} + \frac{f_{-(m-1)}}{t^{m-1}} + \cdots + \frac{f_{-1}}{t}$$

とおき, f での局所パラメータ t に関するローラン展開の主要部という. ただし $f \in O_P(V)$ のときは $pp_t(f) = 0$ とする. 一方, 有理微分 ω は有理関数 f により $\omega = fdt$ と表されるが

$$\mathrm{Res}_P(\omega) := f_{-1}$$

を ω の点 P での留数という. なお $\mathrm{Res}_P(\omega)$ が局所パラメータ t の選び方によらないことは定理 5.18 で示される. 以下定理 5.18 まで t は点 P での局所パラメータを表す.

定理 5.14 有理微分 $\omega_1, ..., \omega_m$ に対して次式が成り立つ. ただし $c_i \in k$ である.

$$\mathrm{Res}_P\left(\sum_i c_i\omega_i\right) = \sum_i c_i \mathrm{Res}_P(\omega_i)$$

Proof　$\omega_i = f_i dt$ $(f_i \in k(V))$ とおき，f_i の t に関するローラン展開を

$$f_i = \frac{f^{(i)}_{-m_i}}{t^{m_i}} + \cdots + \frac{f^{(i)}_{-1}}{t} + f'_i \qquad (f'_i \in O_P(V))$$

とする．このとき

$$\mathrm{Res}_P\left(\sum_i c_i\omega_i\right) = \sum_i c_i\, f^{(i)}_{-1} = \sum_i c_i\,\mathrm{Res}_P(\omega_i)$$

が成り立つ． ∎

d の $O_P(V)$ への制限 $d' : O_P(V) \mapsto \Omega(k(V))$ は $O_P(V)$ の k 導分であるから，$O_P(V)$ 準同型 $\varphi : \Omega(O_P(V)) \mapsto \Omega(k(V))$ が存在して $d' = \varphi d_R$ が成り立つ．$\Omega(O_P(V))$ が $d_{O_P(V)}\,t$ を基底とする自由 $O_P(V)$ 加群, $\Omega(k(V))$ が dt を基底とする 1 次元 $k(V)$ 線型空間であるから

$$\varphi : \Omega(O_P(V)) \ni r\, d_{O_P(V)}\, t \quad\longmapsto\quad r\, dt \in \Omega(k(V)) \qquad (\, r \in O_P(V)\,)$$

は同型である．従って ω と $\varphi(\omega)$ を同一視して $\Omega(O_P(V)) \subseteq \Omega(k(V))$ と見なすことができるので, 以下 $\omega \in \Omega(O_P(V))$ に対して

$$\mathrm{Res}_P(\omega) := \mathrm{Res}_P(\varphi(\omega))$$

とおくことにする．$\omega \in \Omega(O_P(V))$ のとき定理 5.10 より，$f \in O_P(V)$ が存在して $\omega = f dt$ となるので次の定理を得る．

定理 5.15 $\omega \in \Omega(O_P(V))$ のとき $\mathrm{Res}_P(\omega) = 0$ が成り立つ．

補題 5.16 s を P での局所パラメータとする．t に関する留数について $\mathrm{Res}_P(\frac{1}{s}\, ds) = 1$ が成り立つ．

Proof　$s = s't$ $(s' \in O_P(V)^{\times})$ と表されるので

$$ds = s'dt + tds'$$

が成り立つ．これより

$$\frac{1}{s}ds = \frac{s'}{s}dt + \frac{t}{s}ds' = \frac{1}{t}dt + \frac{1}{s'}ds'$$

となるが, $\frac{1}{s'}ds' \in \Omega(O_P(V))$ であるから, 定理 5.14, 定理 5.15 より

$$\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s}ds\right) = \mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{t}dt\right) + \mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s'}ds'\right) = 1 + 0 = 1$$

が成り立つ. ∎

補題 5.17 $f \in k(V)^\times$ のとき, 任意の整数 $n \geq 0$ に対して $\mathrm{Res}_P(f^n df) = 0$ が成り立つ.

Proof　まず $\mathrm{char}(k) = 0$ とする.

$$d(f^{n+1}) = (n+1)f^n df$$

であるから

$$f^n df = \frac{1}{n+1}d(f^{n+1})$$

が成り立つ. ここで f^{n+1} のローラン展開を

$$f^{n+1} = \frac{f_{-m}}{t^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{t} + f' \qquad (f' \in O_P(V),\ \ f_{-i} \in k)$$

とすると

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}) &= f_{-m}\, d\left(\frac{1}{t^m}\right) + \cdots + f_{-1} d\left(\frac{1}{t}\right) + d(f') \\ &= f_{-m}\left(-\frac{m}{t^{m+1}}\right) dt + \cdots + f_{-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt + d(f') \end{aligned}$$

となるので

$$f^n\, df = \frac{1}{n+1}d(f^{n+1}) = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{mf_{-m}}{t^{m+1}} + \cdots + \frac{f_{-1}}{t^2}\right) dt + \frac{1}{n+1}d(f')$$

が成り立つ. ここで $\frac{1}{n+1}d(f') \in \Omega(O_P(V))$ に注意すれば, $\mathrm{Res}_P(f^n df) = 0$ が得られる.

次に $\mathrm{char}(k) = p > 0$ とする. $\mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ ならば $f^n df \in \Omega(O_P(V))$ であるから定理 5.15 より $\mathrm{Res}_P(f^n df) = 0$ が成り立つ. 従って $\mathrm{ord}_P(f) = -m < 0$ としてよい. f のローラン展開を

$$f = \frac{f_{-m}}{t^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{t} + f_0 + f_1 t + \cdots + f_{mn}t^{mn} + t^{mn+1}f' \qquad (f' \in O_P(V))$$

とする．ここで $f^n df$ における $\frac{1}{t}dt$ の係数は $f_{-m}, ..., f_{mn}$ の整数係数多項式 $b(f_{-m}, ..., f_{mn})$ から p を法として計算されるものである． $\mathrm{char}(k) = 0$ のとき任意の $f_{-m}, ..., f_{mn}$ に対して $b(f_{-m}, ..., f_{mn}) = 0$ となるから, 整数係数多項式として $b(f_{-m}, ..., f_{mn}) = 0$ が成り立つ．従って $\mathrm{char}(k) = p > 0$ のときも $b(f_{-m}, ..., f_{mn}) = 0$, すなわち $\frac{1}{t}dt$ の係数は 0 となる．よってこの場合も $\mathrm{Res}_P(f^n df) = 0$ が成り立つ． ∎

定理 5.18 有理微分 ω の留数 $\mathrm{Res}_P(\omega)$ は局所パラメータのとり方によらない．

Proof　P での局所パラメータ s を任意に選び, s に関する留数と t に関する留数が一致することを示す．$\omega = fdt$ と表し, t に関する留数を $\mathrm{Res}_P(\omega) = f_{-1}$ とおく．s に関して $\omega = gds$,

$$g = \frac{g_{-m}}{s^m} + \cdots + \frac{g_{-1}}{s} + g' \qquad (g' \in O_P(V),\ \ g_j \in k)$$

であるとして $f_{-1} = g_{-1}$ を示せばよい. 定理 5.15 より

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_P\,(gds) &= \mathrm{Res}_P\left(\left(\frac{g_{-m}}{s^m} + \cdots + \frac{g_{-1}}{s} + g'\right) ds\right) \\ &= g_{-m}\,\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s^m}ds\right) + \cdots + g_{-2}\,\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s^2}ds\right) + g_{-1}\,\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s}ds\right)\end{aligned}$$

となるが, $d(\frac{1}{s}) = -\frac{1}{s^2}ds$ より

$$\frac{1}{s^m}\,ds = -\left(\frac{1}{s}\right)^{m-2} d\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (m \geq 2)$$

が成り立つ. 従って補題 5.17 より

$$g_{-m}\,\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s^m}ds\right) = \cdots\cdots = g_{-2}\,\mathrm{Res}_P\left(\frac{1}{s^2}ds\right) = 0$$

が得られる．よって補題 5.16 より $\mathrm{Res}_P(gds) = g_{-1}$ が成り立つ． ∎

以下では非特異射影曲線 V の関数体 $k(V)$ を k 線型空間, 点 P での局所環 $O_P(V)$ をその部分線型空間と見なし, §1.2 の結果を利用して留数定理を証明する．

補題 5.19 有理関数 f の誘導する k 線型変換 $k(V) \ni g \mapsto fg \in k(V)$ は $fO_P(V) \prec O_P(V)$ を満たす.

Proof　$\mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ ならば $fO_P(V) \subseteq O_P(V)$ であるから $fO_P(V) \prec O_P(V)$ が成り立つ. $\mathrm{ord}_P(f) = -m < 0$ とすると, 点 P での局所パラメータ t により

$$f = t^{-m} f', \qquad f' \in O_P(V)^{\times}$$

と表される. 従って

$$fO_P(V) = t^{-m} f' O_P(V) = t^{-m} O_P(V) \supseteq O_P(V)$$

より

$$\dim_k \frac{fO_P(V) + O_P(V)}{O_P(V)} = \dim_k \frac{t^{-m} O_P(V)}{O_P(V)} = m$$

となるので, $fO_P(V) \prec O_P(V)$ を得る. ∎

補題 5.19 と定理 1.20 より, 任意の k 線型な射影 $\pi : k(V) \mapsto O_P(V)$ と任意の $f, g \in k(V)$ に対して $[\pi f, g]$ は $k(V)$ の k 線型変換としてべき有限次である. また $a, b \in k$ に対して

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi(af), g] = a\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g], \quad \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, bg] = b\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g]$$

は明らかであるが, さらに次の補題が成り立ち, $\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g]$ は f, g に関して双線型となる.

補題 5.20 任意の k 線型な射影 $\pi : k(V) \mapsto O_P(V)$ と任意の $f, f', g, g' \in k(V)$ に対して次が成り立つ.

(1)　$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g + g'] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g] + \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g']$

(2)　$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi(f + f'), g] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g] + \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f', g]$

Proof　(1)　補題 5.19 より, 補題 1.19 の仮定を満たすので, $\pi' = \pi$ として f, f', g, g' を適当に選べば, k 線型部分空間

$$[\pi f, g]^2(k(V)), \qquad [\pi f, g][\pi f, g'](k(V)), \qquad [\pi f, g'][\pi f, g](k(V)), \qquad [\pi f, g']^2(k(V))$$

がすべて有限次であることがわかる. 従って $\varphi_1 = [\pi f, g]$, $\varphi_2 = [\pi f, g']$ とおけば, 定理 1.12 の仮定を満たすので

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g + g'] = \mathrm{Tr}_{k(V)}\left([\pi f, g] + [\pi f, g']\right) = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g] + \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g']$$

が得られる. (2) についても同様である. ∎

補題 5.21 点 P, および k 線型な射影 $\pi : k(V) \mapsto O_P(V)$ に対して次が成り立つ. ただし t は点 P での局所パラメータ, m, n は整数である.

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^m, t^n] = \begin{cases} n, & m+n=0 \\ 0, & m+n \neq 0 \end{cases}$$

Proof 定理 1.20 より $\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^m, t^n]$ は射影 π の選び方によらないから, π として $\pi(pp_t(f)) = 0$ $(\forall f)$ を満たすものを選んでおく. $m+n+r \geq 0$ かつ $m+r \geq 0$ となる整数 r, および $m+n+r' < 0$ かつ $m+r' < 0$ となる整数 r' を選び

$$U = \{f \in k(V) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq r\}, \qquad U' = \{t^j \in k(V) \mid j \leq r'\}$$

とおくと, 明らかに U, U' は $[\pi t^m, t^n]$ の核に含まれる. 従って適当な整数 s, s' を選べば

$$[\pi t^m, t^n](k(V)) = \left\{[\pi t^m, t^n](t^j) \mid r' < j < r\right\} \subseteq \langle t^s, t^{s+1}, ..., t^{s'}\rangle$$

が成り立つ. ただし $\langle t^s, t^{s+1}, ..., t^{s'}\rangle$ は $t^s, .., t^{s'}$ で生成される k 線型空間である. $W = \langle t^s, t^{s+1}, ..., t^{s'}\rangle$ とおくと $[\pi t^m, t^n](k(V)) \subseteq W$ であるから $\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^m, t^n] = \mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n]$ となる. ここで

$$\begin{bmatrix} [\pi t^m, t^n](t^s) \\ \vdots \\ [\pi t^m, t^n](t^{s'}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ss} & \dots & a_{ss'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s's} & \dots & a_{s's'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^s \\ \vdots \\ t^{s'} \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} \in k)$$

と行列表示すると $\mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n] = \sum_{j=s}^{s'} a_{jj}$ である. さて

$$[\pi t^m, t^n](t^j) = \pi t^m t^n t^j - t^n \pi t^m t^j = \pi t^{m+n+j} - t^n \pi t^{m+j}$$

は 0 または $\pm t^{m+n+j}$ であるから, $\ell \neq m+n+j$ のとき $a_{j\ell} = 0$ である. 従って $m+n \neq 0$ ならば $j \neq m+n+j$ より, 任意の j に対して $a_{jj} = 0$ となるので $\mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n] = 0$ が得られる.

次に $m+n=0$ とする. $m=n=0$ のときは $[\pi t^m, t^n] = \pi - \pi = 0$ となるので $\mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n] = 0 = n$ が成り立つ.

$m, n \neq 0, m > n$ のときは $m > 0$ だから

$$[\pi t^m, t^n](t^j) = \pi t^j - t^n \pi t^{m+j} = \begin{cases} 0, & j \geq 0 \\ -t^j, & -m \leq j \leq -1 \\ 0, & j < -m \end{cases}$$

となるので $\mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n] = -m = n$ が成り立つ.

$m, n \neq 0, m < n$ のときは $m < 0$ だから

$$[\pi t^m, t^n](t^j) = \pi t^j - t^n \pi t^{m+j} = \begin{cases} 0, & j \geq -m \\ t^j, & 0 \leq j \leq -m-1 \\ 0, & j < 0 \end{cases}$$

となるので $\mathrm{Tr}_W[\pi t^m, t^n] = -m = n$ が成り立つ. ∎

系 5.22 P での局所パラメータ t について次が成り立つ.

$$\mathrm{Res}_P(t^m d(t^n)) = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^m, t^n]$$

Proof $t^m d(t^n) = t^m(nt^{n-1}dt) = nt^{m+n-1}dt$ であるから

$$\mathrm{Res}_P(t^m d(t^n)) = \begin{cases} n, & m+n = 0 \\ 0, & m+n \neq 0 \end{cases}$$

となる. 従って補題 5.21 より $\mathrm{Res}_P(t^m d(t^n)) = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^m, t^n]$ が成り立つ. ∎

補題 5.23 $f, g \in k(V)$, 点 P, および k 線型な射影 $\pi : k(V) \mapsto O_P(V)$ に対して次が成り立つ. 特にいずれの場合も $\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g] = 0$ となる.

(1) $f, g \in O_P(V)$ ならば $[\pi f, g]^2 = 0$ である.

(2) $\mathrm{ord}_P(f) = -n \leq 0$ かつ $\mathrm{ord}_P(g) \geq 2n$ ならば $[\pi f, g]^3 = 0$ である.

(3) $\mathrm{ord}_P(g) = -n \leq 0$ かつ $\mathrm{ord}_P(f) \geq 2n$ ならば $[\pi f, g]^2 = 0$ である.

Proof (1) $f, g \in O_P(V)$ より $[\pi f, g](k(V)) \subseteq O_P(V)$ となるから,

$$h \in O_P(V) \ \Rightarrow\ [\pi f, g](h) = \pi f g(h) - g\pi f(h) = fgh - gfh = 0$$

が成り立つことに注意すれば

$$[\pi f, g]^2(k(V)) \subseteq [\pi f, g](O_P(V)) = 0$$

となり, $[\pi f, g]^2 = 0$ が得られる.

(2) $g \in O_P(V)$ より $[\pi f, g](k(V)) \subseteq O_P(V)$ である. $\mathrm{ord}_P(fg) \geq n$ であるから

$$h \in O_P(V) \ \Rightarrow \ [\pi f, g](h) = \pi fg(h) - g\pi f(h) \in t^n O_P(V)$$

が成り立つ. 従って

$$[\pi f, g]^2(k(V)) \subseteq [\pi f, g](O_P(V)) \subseteq t^n O_P(V)$$

を得る. $h' \in t^n O_P(V)$ とすると $f(h') \in O_P(V)$ であるから

$$[\pi f, g](h') = \pi fg(h') - g\pi f(h') = fg(h') - gf(h') = 0$$

となる. ゆえに

$$[\pi f, g]^3(k(V)) \subseteq [\pi f, g]^2(O_P(V)) \subseteq [\pi f, g](t^n O_P(V)) = 0$$

が成り立つので $[\pi f, g]^3 = 0$ を得る.

(3) この場合も上と同様に $[\pi f, g](k(V)) \subseteq t^{-n} O_P(V)$ となり,

$$h \in t^{-n} O_P(V) \ \Rightarrow \ [\pi f, g](h) = \pi fg(h) - g\pi f(h) = fgh - gfh = 0$$

が得られ

$$[\pi f, g]^2(k(V)) \subseteq [\pi f, g](t^{-n} O_P(V)) = 0$$

となるので, $[\pi f, g]^2 = 0$ が成り立つ. ∎

補題 5.24 $f, g \in k(V)$ と点 P が次のいずれかの条件を満たせば $\mathrm{Res}_P(fdg) = 0$ が成り立つ.

(1) $f, g \in O_P(V)$

(2) $\mathrm{ord}_P(f) = -n < 0$ かつ $\mathrm{ord}_P(g) \geq n + 1$

(3) $\mathrm{ord}_P(g) = -n < 0$ かつ $\mathrm{ord}_P(f) \geq n + 1$

Proof　$fdg \in \Omega(O_P(V))$ のとき定理 5.15 より $\mathrm{Res}_P(fdg) = 0$ が成り立つので, いずれの場合も $fdg \in \Omega(O_P(V))$ であることを示せばよい. 以下 t は点 P での局所パラメータとする.

(1)　$f, g \in O_P(V)$ のときは明らかに $fdg \in \Omega(O_P(V))$ が成り立つ.

(2)　$\mathrm{ord}_P(g) \geq n+1$ より $g = t^{n+1}g'$ $(g' \in O_P(V))$ と表される. 従って

$$dg = d(t^{n+1})\, g' + t^{n+1}\, dg' = (n+1)t^n g'\, dt + t^{n+1}\, dg'$$

となるが, $dg' = g''dt$ $(g'' \in O_P(V))$ と表されるので, $t^n f \in O_P(V)$ に注意すれば

$$fdg = (n+1)t^n fg'\, dt + t^{n+1} fg'' dt = \big((n+1)t^n fg' + t^{n+1} fg''\big)\, dt \in \Omega(O_P(V))$$

が成り立つ.

(3)　$\mathrm{ord}_P(g) = -n$ より $g = t^{-n}g'$ $(g' \in O_P(V))$ と表される. 従って

$$dg = d(t^{-n})\, g' + t^{-n}\, dg' = (-n)t^{-n-1} g'\, dt + t^{-n}\, dg'$$

となるが, $dg' = g''dt$ $(g'' \in O_P(V))$ と表されるので, $t^{-n}f, t^{-n-1}f \in O_P(V)$ に注意すれば

$$fdg = (-n)t^{-n-1} fg'\, dt + t^{-n}\, fg'' dt = \big((-n)t^{-n-1} fg' + t^{-n} fg''\big)\, dt \in \Omega(O_P(V))$$

が成り立つ. ∎

定理 5.25 $f, g \in k(V)$ と点 P, および k 線型な射影 $\pi : k(V) \mapsto O_P(V)$ に対して次が成り立つ.

$$\mathrm{Res}_P(fdg) = \mathrm{Tr}_{k(V)}([\pi f, g])$$

Proof　$f = 0$ または $g = 0$ ならば明らかに成り立つので, 以下 $f \neq 0$ かつ $g \neq 0$ とする. $\mathrm{ord}_P(f) = -n$ とおく. 整数 ℓ を $n \leq 0$ のときは $\ell = 0$, $n > 0$ のときは $\ell = 2n$ と定め,

$$g = \sum_{j<\ell} g_j t^j + g_1 = g_0 + g_1, \qquad g_0 = \sum_{j<\ell} g_j t^j, \quad g_1 \in t^\ell O_P(V)$$

とおく. 補題 5.23, 補題 5.24 より

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_1] = \mathrm{Res}_P(f dg_1) = 0$$

となるので, 補題 5.20 を適用すると

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0 + g_1] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0] + \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_1] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0]$$

が成り立つ. 一方

$$\mathrm{Res}_P(f dg) = \mathrm{Res}_P(f d(g_0 + g_1)) = \mathrm{Res}_P(f dg_0) + \mathrm{Res}_P(f dg_1) = \mathrm{Res}_P(f dg_0)$$

であるので

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0] = \mathrm{Res}_P(f dg_0)$$

を示せばよい. $g_0 = 0$ ならば明らかに成り立つので $g_0 \neq 0$ として, $\mathrm{ord}_P(g_0) = -m$ とおく. ここで整数 ℓ' を $m \leq 0$ のときは $\ell' = 0$, $m > 0$ のときは $\ell' = 2m$ と定め,

$$f = \sum_{j<\ell'} f_j t^j + f_1, \qquad f_0 = \sum_{j<\ell'} f_j t^j, \quad f_1 \in t^{\ell'} O_P(V)$$

とおく. このとき補題 5.23, 補題 5.24 より

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f_1, g_0] = \mathrm{Res}_P(f_1 dg_0) = 0$$

となるので,

$$\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi(f_0 + f_1), g_0] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f_0, g_0] + \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f_1, g_0] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f_0, g_0]$$

および

$$\mathrm{Res}_P(f dg_0) = \mathrm{Res}_P((f_0 + f_1) dg_0) = \mathrm{Res}_P(f_0 dg_0) + \mathrm{Res}_P(f_1 dg_0) = \mathrm{Res}_P(f_0 dg_0)$$

が成り立つ. f_0, g_0 は有限個の t^i, t^j の k 係数 1 次結合であるから系 5.22 を

適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_P(fdg) &= \mathrm{Res}_P(fdg_0) = \mathrm{Res}_P(f_0dg_0) = \mathrm{Res}_P\left(\sum_{i<\ell'} f_i t^i\, d\left(\sum_{j<\ell} g_j t^j\right)\right)\\ &= \sum_{\substack{i<\ell'\\ j<\ell}} f_i g_j \,\mathrm{Res}_P(t^i d(t^j)) = \sum_{\substack{i<\ell'\\ j<\ell}} f_i g_j \,\mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi t^i, t^j]\\ &= \mathrm{Tr}_{k(V)}\left[\pi\left(\sum_{i<\ell'} f_i t^i\right), \sum_{j<\ell} g_j t^j\right] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f_0, g_0]\\ &= \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g_0] = \mathrm{Tr}_{k(V)}[\pi f, g]\end{aligned}$$

が導かれる. ∎

定理 5.26 (留数定理) V 上の有理微分 ω に対して次が成り立つ.

$$\sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P(\omega) = 0$$

Proof　$\omega = 0$ ならば明らかに成り立つので, 以下 $\omega \neq 0$ とする. このとき適当な $f, g \in k(V)^\times$ により $\omega = fdg$ と表される. f, g の零点と極からなる有限集合を S,

$$A_0 = \prod_{P\in S} k(V), \quad A_1 = \prod_{P\in V-S} k(V), \quad A = A_0 \oplus A_1 = \prod_{P\in V} k(V),$$

$$B_0 = \prod_{P\in S} O_P(V), \quad B_1 = \prod_{P\in V-S} O_P(V), \quad B = B_0 \oplus B_1 = \prod_{P\in V} O_P(V),$$

とおく. A が $\mathcal{A}_V$ を含むこと, および $B = \mathcal{A}_V(0)$ であることを注意しておく. V の各点 P における射影 $\pi_P : k(V) \mapsto O_P(V)$ をそれぞれ 1 つ選び, A の k 線型変換 π_0, π_1, π を

$$\pi_0 = \prod_{P\in S} \pi_P, \qquad \pi_1 = \prod_{P\in V-S} \pi_P, \qquad \pi = \pi_0 + \pi_1 = \prod_{P\in V} \pi_P$$

と定める. π は B への 1 つの射影である.

以下, f, g を $k(V)$ 上の線型空間 A の k 線型変換と見なし, 次の (イ)〜(ハ) のステップに分けて証明することにする. なお π, f, g, および $[\pi f, g]$ が A の P 成分を不変にすることに留意されたい.

(イ) $[\pi f, g]$ はべき有限次で $\sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P(\omega) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f, g]$ が成り立つ.

(ロ) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f, g] + \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{k(V)} f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{B+k(V)} f, g] + \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f, g]$ が成り立つ.

(ハ) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{k(V)} f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{B+k(V)} f, g] = 0$ が成り立つ.

(イ)〜(ハ) から $\sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P(\omega) = 0$ が導かれることは明白である.

(イ) の証明: $P \in V - S$ のとき $f, g \in O_P(V)$ であるから, 補題 5.24 より

$$\mathrm{Res}_P(\omega) = \mathrm{Res}_P(f dg) = 0$$

となる. 従って

$$\sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P(\omega) = \sum_{P\in S} \mathrm{Res}_P(\omega)$$

が成り立つので留数の総和は有限和である. 一方, $P \in V - S$ のとき補題 5.23 より $[\pi_P f, g]^2 = 0$ であり, $[\pi f, g]$ が A の元の P 成分に $[\pi_P f, g]$ として作用することから

$$[\pi_1 f, g]^2 = 0$$

が成り立つ. 一方

$$f(B) + B = \prod_{P\in V} f O_P(V) + \prod_{P\in V} O_P(V) = \prod_{P\in V} (f O_P(V) + O_P(V))$$

であるが, $P \in V - S$ のとき $f \in O_P(V)$ であるから

$$\frac{f O_P(V) + O_P(V)}{O_P(V)} = \frac{O_P(V)}{O_P(V)} = 0$$

となり, また $P \in S$ のときは補題 5.19 より

$$\dim_k \frac{f O_P(V) + O_P(V)}{O_P(V)} < \infty$$

が成り立つ. 従って S が有限集合であるから

$$\frac{f(B) + B}{B} = \frac{\prod_{P\in V} (f O_P(V) + O_P(V))}{\prod_{P\in V} O_P(V)} = \prod_{P\in V} \frac{f O_P(V) + O_P(V)}{O_P(V)}$$

は有限次である. 以上で

$$f(B) \prec B \tag{5.3}$$

が示された. $g(B) \prec B$ も同様であるから, 定理 1.20 より $[\pi f, g]$ はべき有限

次である．ここで $B+g(B)$ の元の $V-S$ 成分が $O_P(V)$ の元であることから

$$[\pi f, g](A) \subseteq B + g(B) \subseteq \mathcal{A}_V$$

が成り立つ．$\mathcal{A}_V$ は π, f, g により不変であるから $[\pi f, g]$ 不変であり

$$\mathrm{Tr}_A[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f, g]$$

が成り立つ．一方

$$[\pi f, g] = [\pi_0 f, g] + [\pi_1 f, g], \quad [\pi f, g]|_{A_1} = [\pi_1 f, g], \quad [\pi_1 f, g]^2 = 0$$

であるから

$$[\pi f, g]^2(A) = [\pi_0 f, g]^2(A_0) \subseteq A_0$$

が成り立つ．これと $[\pi_1 f, g]$ が A_0 に 0 変換として作用することから

$$\mathrm{Tr}_A[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_{A_0}[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_{A_0}[\pi_0 f, g]$$

となるが，A の点 P に対応する直積因子を A_P とおいて定理 5.25 を適用すると

$$\mathrm{Tr}_{A_0}[\pi_0 f, g] = \sum_{P \in S} \mathrm{Tr}_{A_P}[\pi_P f, g] = \sum_{P \in S} \mathrm{Res}_P(\omega)$$

が得られる．よって

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_A[\pi f, g] = \mathrm{Tr}_{A_0}[\pi_0 f, g] = \sum_{P \in S} \mathrm{Res}_P(\omega) = \sum_{P \in V} \mathrm{Res}_P(\omega)$$

となり, (イ) が証明された.

(ロ) の証明:　$B \cap k(V) = k$ に注意して, 次のように直和分解する.

$$B = B' \oplus k, \quad k(V) = k \oplus k(V)', \quad \mathcal{A}_V = B' \oplus k \oplus k(V)' \oplus C$$

ここで $\mathcal{A}_V$ の直和分解

$$\mathcal{A}_V = B' \oplus k \oplus k(V)' \oplus C = B \oplus (k(V)' \oplus C) \tag{5.4}$$

から得られる射影 $\mathcal{A}_V \mapsto B$ を改めて π と表す．定理 1.20 より，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f, g]$

の値は不変である. 同様に上の直和分解から射影

$$\pi_{k(V)} : \mathcal{A}_V \mapsto k(V), \quad \pi_{B+k(V)} : \mathcal{A}_V \mapsto B + k(V), \quad \pi_k : \mathcal{A}_V \mapsto k$$

が得られ, 次の等式を満たす.

$$\pi + \pi_{k(V)} = \pi_{B+k(V)} + \pi_k \tag{5.5}$$

さて, $[\pi f, g](\mathcal{A}_V) \subseteq B + g(B)$ と補題 1.19 より

$$\dim_k [\pi f, g](B + g(B)) < \infty, \qquad \dim_k [\pi f, g]^2(\mathcal{A}_V) < \infty$$

が成り立つ. また

$$[\pi_{k(V)} f, g](\mathcal{A}_V) \subseteq k(V), \ [\pi_{k(V)} f, g](k(V)) = 0, \ [\pi_{k(V)} f, g]^2(\mathcal{A}_V) = 0 \tag{5.6}$$

も成り立つ. さらに $\pi(k(V)) = k$ に注意すれば $h \in k(V)$ に対して

$$[\pi f, g](h) = \pi(fgh) - g\pi(fh) \in k + gk$$

となるので $\dim_k [\pi f, g](k(V)) \leq 2$ となり

$$\dim_k [\pi f, g][\pi_{k(V)} f, g](\mathcal{A}_V) < \infty$$

が得られる. ここで $\theta_1 = [\pi f, g]$, $\theta_2 = [\pi_{k(V)} f, g]$ とおくと, 上述のことから

$$\dim_k \theta_1^2(\mathcal{A}_V) < \infty, \qquad \dim_k \theta_1\theta_2(\mathcal{A}_V) < \infty, \qquad \dim_k \theta_2^2(\mathcal{A}_V) < \infty$$

が成り立つ. 従って $1, 2$ の任意の重複順列 i_1, i_2, i_3 に対して

$$\dim_k \theta_{i_1}\theta_{i_2}\theta_{i_3}(\mathcal{A}_V) < \infty$$

となるので, 定理 1.12 が適用できて, θ_1, θ_2, $\theta_1 + \theta_2$ はべき有限次で,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_1) + \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_2)$$

が成り立つ. ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[(\pi+\pi_{k(V)})f,g] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}\left([\pi f,g]+[\pi_{k(V)}f,g]\right)\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi f,g]+\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{k(V)}f,g] \qquad (5.7)\end{aligned}$$

を得る. 次に等式

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[(\pi_{B+k(V)}+\pi_k)f,g] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}\left([\pi_{B+k(V)}f,g]+[\pi_k f,g]\right)\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{B+k(V)}f,g]+\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f,g] \qquad (5.8)\end{aligned}$$

を示す. 式 (5.5) より $\pi+\pi_{k(V)}=\pi_{B+k(V)}+\pi_k$ となるので, 式 (5.7) と式 (5.8) を合わせれば (ロ) が導かれる. $[\pi_k f,g]$ については

$$[\pi_k f,g](\mathcal{A}_V)\subseteq k+gk, \qquad \dim_k[\pi_k f,g](\mathcal{A}_V)<\infty \qquad (5.9)$$

が成り立つ. また $f\neq 0$ より $fk(V)=k(V)$ となることに注意すれば

$$\frac{f(B+k(V))+B+k(V)}{B+k(V)}=\frac{f(B)+B+k(V)}{B+k(V)}\simeq\frac{f(B)}{f(B)\cap(B+k(V))}$$

を得るが, 最終項が $f(B)/(f(B)\cap B)$ の剰余空間であることと, 式 (5.3) より

$$f(B+k(V))\prec B+k(V)$$

が得られる. g についても同様に $g(B+k(V))\prec B+k(V)$ が得られるので, 定理 1.20 より $[\pi_{B+k(V)}f,g]$ はべき有限次, かつ

$$\dim_k[\pi_{B+k(V)}f,g]^2(\mathcal{A}_V)<\infty$$

が成り立つ. ここで $\theta_3=[\pi_{B+k(V)}f,g]$, $\theta_4=[\pi_k f,g]$ とおくと, 上述のことから

$$\dim_k\theta_3^2(\mathcal{A}_V)<\infty, \qquad \dim_k\theta_4(\mathcal{A}_V)<\infty,$$

が成り立つ. 従って $3,4$ の任意の重複順列 i_1,i_2 に対して

$$\dim_k\theta_{i_1}\theta_{i_2}(\mathcal{A}_V)<\infty$$

が成り立ち, 定理 1.12 を適用すると, θ_3, θ_4, $\theta_3+\theta_4$ はべき有限次で,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_3+\theta_4)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_3)+\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}(\theta_4)$$

が成り立つ．これより式 (5.8) が導かれる．以上で (ロ) が証明された．

(ハ) の証明:　式 (5.6) より $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{k(V)}f, g] = 0$ が得られる．また式 (5.9) より $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f, g] = \mathrm{Tr}_{k+gk}[\pi_k f, g]$ となる．ここで $g \in k$ とすると $[\pi_k f, g](\mathcal{A}_V) \subseteq k$ であり, π_k が k 線型変換であることに注意すれば, 任意の $a \in K$ に対して

$$[\pi_k f, g](a) = \pi_k fg(a) - g\pi_k f(a) = g\pi_k fa - g\pi_k fa = 0$$

となる．ゆえに, $[\pi_k f, g]^2 = 0$ となるので $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f, g] = 0$ が成り立つ． $g \notin k$ のときは $1, g$ は $k + gk$ の基であり, これに関して $[\pi_k f, g]$ を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} [\pi_k f, g](1) \\ [\pi_k f, g](g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_k(fg), & -\pi_k(f) \\ \pi_k(fg^2), & -\pi_k(fg) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g \end{bmatrix}$$

となるので $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_k f, g] = 0$ が得られる．最後に $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{B+k(V)}f, g]$ について, $B = \mathcal{A}_V(0)$ より

$$\mathcal{A}_V = (B + k(V)) \oplus C = (\mathcal{A}_V(0) + k(V)) \oplus C$$

となるが, 定理 5.4 より

$$\dim_k C = \dim_k \frac{\mathcal{A}_V}{\mathcal{A}_V(0) + k(V)} = i(0) = g \qquad (g \text{ は } V \text{ の種数})$$

となるので C は有限次である．式 (5.4) の直和分解から得られる C への射影を π_C, $\mathcal{A}_V$ の恒等変換を I とおくと $\pi_{B+k(V)} + \pi_C = I$ であることから

$$0 = [f, g] = [I \cdot f, g] = [(\pi_{B+k(V)} + \pi_C)f, g] = [\pi_{B+k(V)}f, g] + [\pi_C f, g]$$

より $[\pi_{B+k(V)}f, g] = -[\pi_C f, g]$ が得られる．従って $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_C f, g] = 0$ を示せば, $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_{B+k(V)}f, g] = 0$ が得られる． C が有限次であることから $\pi_C f(\mathcal{A}_V)$ は有限次である．従って $\varphi = \pi_C f$, $\psi = g$ とおくと

$$\varphi(\mathcal{A}_V) \prec B, \quad \varphi(B) \sim 0, \quad \psi(B) = g(B) \prec B$$

が成り立つ．よって定理 1.17 が適用できるので,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\pi_C f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_V}[\varphi, \psi] = 0$$

が成り立つ．以上で (ハ) が証明されたので, 定理の証明が完成した． ∎

5.4 Riemann-Roch の定理

以下 V は非特異射影曲線を表すものとする． k 線型空間 $\mathcal{A}_V/k(V)$ の双対空間を $(\mathcal{A}_V/k(V))^*$ とおき

$$J_V := \{\alpha \in (\mathcal{A}_V/k(V))^* \mid \text{ある因子 } D \text{ が存在して } \alpha(\mathcal{A}_V(D)) = 0\}$$

と定める．なお誤解のおそれがない限り，$\mathcal{A}_V(D) \bmod k(V)$ を $\mathcal{A}_V(D)$ と同一視する．$\alpha, \beta \in J_V$ のとき因子 $D = \sum n_P P$, $D' = \sum n'_P P$ が存在して

$$\alpha(\mathcal{A}_V(D)) = 0, \qquad \beta(\mathcal{A}_V(D')) = 0$$

となるので, $m_P = \min\{n_P, n'_P\}$, $D'' = \sum m_P P$ とすると D'' は因子で

$$\mathcal{A}_V(D) \cap \mathcal{A}_V(D') = \mathcal{A}_V(D'') \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha + \beta)$$

が成り立つ．従って $\alpha + \beta \in J_V$ を得る．また $c \in k$ のとき明らかに $c\alpha(\mathcal{A}_V(D)) = 0$ となるので $c\alpha \in J_V$ も成り立つ．よって次の定理が得られる．

定理 5.27 J_V は $(\mathcal{A}_V/k(V))^*$ の部分空間である．

ω を有理微分, $(f_P) \in \mathcal{A}_V$ とする．このとき有限個の点 P を除いて $f_P \in O_P(V)$ であり，定理 5.13 より有限個の点 P を除いて $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq 0$ であるから, 有限個の点 P を除いて $\mathrm{Res}_P(f_P\,\omega) = 0$ となる．従って $\sum_P \mathrm{Res}_P(f_P\omega)$ は有限和である．ここで

$$\delta_V(\omega) : \mathcal{A}_V \ni (f_P) \quad \longmapsto \quad \sum_P \mathrm{Res}_P(f_P\omega) \in k$$

とおくと, $\delta_V(\omega)$ は定理 5.14 より k 線型写像である．また留数定理 (定理 5.26) より $(f) \in k(V)$ のとき

$$\delta_V(\omega)\ ((f)) = \sum_P \mathrm{Res}_P(f\omega) = 0$$

となるので $k(V) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_V(\omega))$ が成り立つ．ゆえに $\delta_V(\omega) \in (\mathcal{A}_V/k(V))^*$ と見なすことができる．

$\omega \neq 0$ とすると，V の各点 P での局所パラメータ t_P により

$$\omega = g_p\,dt_P \qquad (g_P \in k(V),\ \ g_P \neq 0)$$

と表される．$\mathrm{ord}_P(g_P) = n_P$ とおき, 点 Q を 1 つ選び固定し，$a_P \in k(V)$ を

$$a_P = \begin{cases} {t_Q}^{-n_Q-1}, & P = Q \text{ のとき} \\ {t_P}^{|n_P|}, & P \neq Q \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めると $(a_P) \in \mathcal{A}_V$ であり,

$$\delta_V(\omega)\ ((a_P)) \neq 0$$

が成り立つ．これより次の定理が得られる．

定理 5.28 $(\mathcal{A}_V/k(V))^*$ の元として $\delta_V(\omega) \neq 0$ である．

定理 5.29 ω を 0 でない有理微分とすると $\mathrm{ord}_P(\omega) \neq 0$ となる点 P は有限個である．

Proof　定理 5.13 より $\mathrm{ord}_P(\omega) < 0$ となる点 P が有限個であるから，$\mathrm{ord}_P(\omega) > 0$ となる点 P が有限個であることを示せばよい． $\mathrm{ord}_P(\omega) > 0$ となる点 P が無限に存在したと仮定する． $\mathrm{ord}_P(\omega) < 0$ となる点 P を，$Q_1, ..., Q_r$, $\mathrm{ord}_{Q_i}(\omega) = -m_i$ とする．因子 D_0 を $\deg D_0 - \ell(D_0) + 1 = g$ を満たすように選び，$\mathrm{ord}_P(\omega) > 0$ となる無限個の点 P の中から $P_1, ..., P_s$ を，$n_j = \mathrm{ord}_{P_j}(\omega)$ とするとき

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s - (m_1 + \cdots + m_r) \geq \deg D_0 + g$$

を満たすように選ぶ．

$$D = n_1P_1 + n_2P_2 + \cdots + n_sP_s - (m_1Q_1 + \cdots + m_rQ_r)$$

とおくと, 定理 5.5 より $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_V(D)+k(V)$ が成り立つ．ここで $(f_P) \in \mathcal{A}_V(D)$ のとき, 任意の点 P において $\mathrm{ord}_P(f_P\,\omega) \geq 0$ が成り立つので $\mathrm{Res}_P(f_P\,\omega) = 0$ となる．従って

$$\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_V(D) + k(V) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\delta_V(\omega))$$

となり定理 5.28 に矛盾する．以上で $\mathrm{ord}_P(\omega) > 0$ となる点 P も有限個であることが示された． ∎

ω を非特異射影曲線 V の 0 でない有理微分とすると, 定理 5.29 より

$$\mathrm{div}(\omega) := \sum_{P \in V} \mathrm{ord}_P(\omega)\, P$$

は V 上の因子となる．これを ω の因子という．また因子 D に対して

$$\Omega_{V,\omega}(D) := \{f \in k(V)^\times \mid \mathrm{div}(f\omega) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

と定義する．$\Omega_{V,\omega}(D) = L(\mathrm{div}(\omega) + D)$ であるから $\Omega_{V,\omega}(D)$ は $k(V)$ の有限次 k 線型部分空間である．

定理 5.30 非特異射影曲線 V の 0 でない有理微分 ω, ω' に対して, 因子 $\mathrm{div}(\omega)$, $\mathrm{div}(\omega')$ は線型同値である．

Proof　$\Omega(k(V)) = k(V)\omega$ であるから $\omega' = f\omega$ となる有理関数 $f \neq 0$ が存在し

$$\mathrm{div}(\omega') = \mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$$

が成り立つことから $\mathrm{div}(\omega) \sim \mathrm{div}(\omega')$ が得られる． ∎

有理微分 $\omega \neq 0$ に対して線型同値を除いて一意的に定まる因子 $\mathrm{div}(\omega)$ を標準因子といい, K_V と表す．

定理 5.31 非特異射影曲線 V の 0 でない有理微分 ω と因子 D に対して，k 線型同型，$L(K_V + D) \simeq \Omega_{V,\omega}(D)$ が成り立つ．特に $\dim_k \Omega_{V,\omega}(D)$ は有限で有理微分 ω のとり方によらず定まる．

Proof　0 でない有理微分 ω' を任意に選ぶ．$\omega' = f\omega$ と表されるので $\mathrm{div}(\omega') = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$ が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
\Omega_{V,\omega'}(D) &= L(\mathrm{div}(\omega') + D) = L(\mathrm{div}(f\omega) + D) \\
&= L(\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega) + D) \\
&= \frac{1}{f}\, L(\mathrm{div}(\omega) + D) = \frac{1}{f}\, \Omega_{V,\omega}(D)
\end{aligned}$$

となるので $L(K_V + D) \simeq \Omega_{V,\omega}(D)$ が成り立つ．$\dim_k \Omega_{V,\omega}(D)$ が有限であることは定理 4.18 より導かれ，ω の選び方によらないことは上述の結果から得られる． ∎

補題 5.32 $\delta_V(\omega) \in J_V$ である．

Proof　$D=\mathrm{div}(\omega)$ とおくと $(f_P)\in\mathcal{A}_V(D)$ のとき $\mathrm{ord}_P(f_P\omega)\geq 0$ がすべての点 P で成り立つので

$$\sum_P \mathrm{Res}_P(f_P\,\omega)=0$$

となり $\delta_V(\omega)(\mathcal{A}_V(D))=0$ が得られる．ゆえに $\delta_V(\omega)\in J_V$ である． ∎

定理 5.14 より次の定理が得られる．

定理 5.33 $\delta_V:\Omega(k(V))\ni\omega\mapsto\delta_V(\omega)\in J_V$ は k 線型写像である．

補題 5.34 $f\in k(V)^\times$ と因子 D に対して $f\mathcal{A}_V(D)=\mathcal{A}_V(D-\mathrm{div}(f))$ が成り立つ．

Proof　$D=\sum_P D_PP$ とおくと

$$\begin{aligned}
f\,\mathcal{A}_V(D)&=\{(fg_P)\in\mathcal{A}_V\mid(g_P)\in\mathcal{A}_V(D)\}=\{(fg_P)\in\mathcal{A}_V\mid\mathrm{ord}_P(g_P)+D_P\geq 0\}\\
&=\{(fg_P)\in\mathcal{A}_V\mid\mathrm{ord}_P(fg_P)+D_P-\mathrm{ord}_P(f)\geq 0\}\\
&\subseteq\{(h_P)\in\mathcal{A}_V\mid\mathrm{ord}_P(h_P)+D_P-\mathrm{ord}_P(f)\geq 0\}=\mathcal{A}_V(D-\mathrm{div}(f))\\
&=\{(h_P)\in\mathcal{A}_V\mid\mathrm{ord}_P(f^{-1}h_P)+D_P\geq 0\}\\
&=\{(f\cdot f^{-1}h_P)\in\mathcal{A}_V\mid(f^{-1}h_P)\in\mathcal{A}_V(D)\}\subseteq f\,\mathcal{A}_V(D)
\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

$\alpha\in J_V$, $f\in k(V)$ とし，$(f_P)\in\mathcal{A}_V$ に対して

$$(f\alpha)((f_P))=\alpha((ff_P))$$

と定義する．$f=0$ のときは $f\alpha=0\in J_V$ であり，$f\neq 0$ のときも $\alpha\in J_V$ よりある因子 D に対して $\alpha(\mathcal{A}_V(D))=0$ となるので $(ff_P)\in\mathcal{A}_V(D)$ のとき $\alpha((ff_P))=0$ である．補題 5.34 より

$$(ff_P)\in\mathcal{A}_V(D)\iff(f_P)\in f^{-1}\mathcal{A}_V(D)\iff(f_P)\in\mathcal{A}_V(D+\mathrm{div}(f))$$

となり，$f\alpha(\mathcal{A}_V(D+\mathrm{div}(f)))=0$ が成り立つ．また $f\alpha(k(V))=\alpha(fk(V))=0$ であるから $f\alpha\in J_V$ を得る．一方，$f,f_1,f_2\in k(V)$, $\alpha,\beta\in J_V$ に対して

$$f(\alpha+\beta)=f\alpha+f\beta,\quad(f_1+f_2)\alpha=f_1\alpha+f_2\alpha,\quad(f_1f_2)\alpha=f_1(f_2\alpha)$$

は容易に確かめることができるので次の定理が得られる.

定理 5.35 J_V は $k(V)$ 線型空間である.

定理 5.36 δ_V は $k(V)$ 線型写像である.

Proof　定理 5.33 より δ_V は k 線型写像であるから $f \in k(V), \omega \in \Omega(k(V))$ に対して $\delta_V(f\omega) = f\delta_V(\omega)$ が成り立つことを示せばよいが

$$\begin{aligned}(\delta_V(f\omega))((f_P)) &= \sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P(f_P(f\omega)) = \sum_{P\in V} \mathrm{Res}_P((ff_P)\omega) \\ &= \delta_V(\omega)((ff_P)) = (f\delta_V(\omega))((f_P))\end{aligned}$$

となるので, δ_V は $k(V)$ 線型写像である. ∎

定理 5.37 $\dim_{k(V)} J_V = 1$ である.

Proof　点 P を任意に選び, Riemann-Roch の定理暫定版 (定理 5.3) で $D = -2P$ とすると

$$\ell(-2P) - i(-2P) = (-2) + 1 - g$$

を得る. ただし g は V の種数である. 定理 4.22 より $L(-2P) = 0$ であるから $\ell(-2P) = 0$ となり, $i(-2P) = 2 - 1 + g \geq 1$ より

$$I(-2P) = \mathcal{A}_V/(\mathcal{A}_V(-2P) + k(V)) \neq 0$$

を得る. これより

$$J_V \supseteq (\mathcal{A}_V/(\mathcal{A}_V(-2P) + k(V))^* \neq 0$$

が得られるので, $\dim_{k(V)} J_V \geq 1$ が成り立つ.

次に $\dim_{k(V)} J_V \geq 2$ と仮定すると $\alpha_1, ..., \alpha_d \in J_V$ $(d \geq 2)$ で $k(V)$ 上 1 次独立なものが存在する. 因子 D_j が

$$\alpha_j(\mathcal{A}_V(D_j)) = 0$$

を満たすとし, $D \le D_j$ $(j = 1, ..., d)$ となる因子 D を選ぶと, $\mathcal{A}_V(D) \subseteq \mathcal{A}_V(D_j)$ であるから

$$\alpha_j(\mathcal{A}_V(D)) = 0 \qquad (j = 1, ..., d)$$

が成り立つ. ここで整数 n に対して $\deg D^{(n)} = n$ を満たす因子 $D^{(n)}$ と $f \in L(D^{(n)})$ を一つ選ぶと, $(g_P) \in \mathcal{A}_V(D - D^{(n)})$ に対して

$$\mathrm{ord}_P(g_P) \ge -\mathrm{ord}_P(D - D^{(n)}) = -\mathrm{ord}_P(D) + \mathrm{ord}_P(D^{(n)})$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_P(fg_P) &= \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g_P) \\ &\ge -\mathrm{ord}_P(D^{(n)}) - \mathrm{ord}_P(D) + \mathrm{ord}_P(D^{(n)}) = -\mathrm{ord}_P(D) \end{aligned}$$

が成り立ち, $(fg_P) \in \mathcal{A}_V(D)$ が得られる. これより

$$(f\alpha_j)((g_p)) = \alpha((fg_P)) = 0$$

となるので $f\alpha(\mathcal{A}_V(D - D^{(n)})) = 0$ を得る. よって $f\alpha \in I(D - D^{(n)})^*$ が成り立つ. これより

$$\varphi : \underbrace{L(D^{(n)}) \oplus \cdots \oplus L(D^{(n)})}_{d\text{ 個}} \ni (f_1, ..., f_d) \quad \longmapsto \quad \sum_{j=1}^{d} f_j\alpha_j \in I(D - D^{(n)})^*$$

とおくと φ は k 線型写像であり, $\alpha_1, ..., \alpha_d$ が $k(V)$ 上 1 次独立であることから単射である. ゆえに

$$\dim_k I(D - D^{(n)})^* \ge \dim_k(\oplus_j L(D^{(n)}))$$

より

$$i(D - D^{(n)}) \ge d\,\ell(D^{(n)})$$

が得られ, Riemann の定理 (定理 4.25) より,

$$\ell(D^{(n)}) \ge \deg D^{(n)} + 1 - g = n + 1 - g$$

となるので

$$i(D - D^{(n)}) \ge d(n + 1 - g) \tag{5.10}$$

が成り立つ. 一方, Riemann-Roch の定理暫定版 (定理 5.3) より

$$i(D - D^{(n)}) = \ell(D - D^{(n)}) - \deg(D - D^{(n)}) - 1 + g$$

が成り立つ. ここで整数 n を $n > \deg D$ を満たすように選ぶと

$$\deg(D - D^{(n)}) = \deg D - n < 0$$

であるから, 定理 4.22 より $\ell(D - D^{(n)}) = 0$ となるので

$$i(D - D^{(n)}) = n + g - 1 - \deg D$$

が成り立つ. よって (5.10) とあわせて

$$n + g - 1 - \deg D \geq d(n + 1 - g) \tag{5.11}$$

が得られる. 一方, $d \geq 2$ であるから n を

$$n > \deg D, \quad \text{かつ} \quad n > \frac{(d+1)(g-1) - \deg D}{d - 1}$$

を満たすように選ぶことができるが

$$d(n + 1 - g) - (n + g - 1 - \deg D) = n(d-1) - (d+1)(g-1) + \deg D > 0$$

となり, (5.11) に矛盾が生じる. よって $\dim_k J_V = 1$ が成り立つ. ∎

以下, 因子 D と有理微分 $\omega \neq 0$ に対して

$$\Omega_V(D) = \{f\omega \mid f \in \Omega_{V,\omega}(D)\} = \{\omega' \in \Omega(k(V)) \mid \mathrm{div}(\omega') + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

とおくことにする. このとき

$$\Omega_V(D) \ni fw \quad \xrightarrow{k\ \text{線型同型}} \quad f \in \Omega_{V,\omega}(D) \tag{5.12}$$

が成り立つことを注意しておく. さて $\omega \in \Omega_V(-D)$ のとき $D = \sum_P D_P P$ とおくと, $(f_P) \in \mathcal{A}_V(D)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_P(f_P\,\omega) &= \mathrm{ord}_P(f_P) + \mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(\omega)) \\ &= \mathrm{ord}_P(f_P) + D_P + \mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(\omega)) - D_P \geq 0\end{aligned}$$

となるので

$$\delta_V(\omega)((f_P)) = \sum_P \mathrm{Res}_P(f_P\omega) = 0$$

が成り立つ．従って $\delta_V(\omega)(\mathcal{A}_V(D)) = 0$ となるので，$\delta_V(\omega)$ を $I(D)^*$ の元と見なすことができる．以下 δ_V の定義域を $\Omega_V(-D)$ に制限したものを $\delta_V(D)$ と表す．

$$\delta_V(D) : \Omega_V(-D) \ni \omega \quad \longmapsto \quad \delta_V(D)(\omega) \in I(D)^* \tag{5.13}$$

は定理 5.33 より k 線型写像である．

補題 5.38 $J_V = \bigcup_{D\in\mathrm{Div}(V)} I(D)^*$ が成り立つ．

Proof　$I(D)^*$ は $\mathcal{A}_V(D) + k(V)$ を核に含む $(\mathcal{A}_V/k(V))^*$ の元からなるので $J_V \supseteq \bigcup_{D\in\mathrm{Div}(V)} I(D)^*$ が成り立つ．また J_V の各元はある $\mathcal{A}_V(D) + k(V)$ を核に含むので，いずれかの $I(D)^*$ に含まれる．従って $J_V \subseteq \bigcup_{D\in\mathrm{Div}(V)} I(D)^*$ も成り立つ． ∎

補題 5.39 D を因子，ω を有理微分とする．任意の $(f_P) \in \mathcal{A}_V(D)$ に対して $\delta_V(\omega)((f_P)) = 0$ ならば $\omega \in \Omega_V(-D)$ が成り立つ．

Proof　$\omega = 0$ ならば明らかに成り立つので，以下，$\omega \neq 0$ とする．$\omega \notin \Omega_V(-D)$ と仮定するとある点 P に対して $\mathrm{ord}_P(\omega) < \mathrm{ord}_P(D)$ となる．P での局所パラメータを t_P として，$(f_Q) \in \mathcal{A}_V$ を

$$f_Q = \begin{cases} t_P^{-\mathrm{ord}_P(\omega)-1}, & Q = P \\ 0, & Q \neq P \end{cases}$$

とおくと

$$\mathrm{ord}_P(f_P) = -\mathrm{ord}_P(\omega) - 1 > -\mathrm{ord}_P(D) - 1$$

より $\mathrm{ord}_P(f_P) \geq -\mathrm{ord}_P(D)$ が成り立つ．また $Q \neq P$ のときは $\mathrm{ord}_Q(f_Q) = \infty$ より $\mathrm{ord}_Q(f_Q) \geq -\mathrm{ord}_Q(D)$ となるので $(f_Q) \in \mathcal{A}_V(D)$ である．一方

$$\mathrm{ord}_P(f_P\omega) = \mathrm{ord}_P(f_P) + \mathrm{ord}_P(\omega) = (-\mathrm{ord}_P(\omega) - 1) + \mathrm{ord}_P(\omega) = -1$$

より $\mathrm{Res}_P(f_P\omega) \neq 0$ であり, $Q \neq P$ に対しては $\mathrm{Res}_Q(f_Q\omega) = \mathrm{Res}_Q(0) = 0$ であるから

$$\sum_{Q\in V} \mathrm{Res}_Q(f_Q\omega) = \mathrm{Res}_P(f_P\omega) + \sum_{Q\neq P} \mathrm{Res}_Q(f_Q\omega) = \mathrm{Res}_P(f_P\omega) \neq 0$$

が得られ, 矛盾が生じる. よって $\omega \in \Omega_V(-D)$ が示された. ∎

補題 5.39 と (5.13) より次の系が得られる.

系 5.40 $\delta_V^{-1}(I(D)^*) = \Omega_V(-D)$ が成り立つ.

定理 5.41 (双対定理) $k(V)$ 線型写像 $\delta_V : \Omega(k(V)) \mapsto J_V$ は $k(V)$ 線型同型であり, k 線型写像 $\delta_V(D) : \Omega_V(-D) \mapsto I(D)^*$ は k 線型同型である.

Proof　定理 5.11 および定理 5.37 より $\Omega(k(V))$, J_V はともに 1 次元 $k(V)$ 線型空間であるから $k(V)$ 線型写像 $\delta_V : \Omega(k(V)) \mapsto J_V$ は 0 写像であるか $k(V)$ 線型同型である. 定理 5.28 より $\delta_V \neq 0$ であるから δ_V は $k(V)$ 線型同型である. また $\delta_V(D) = \delta_V|_{\Omega_V(-D)}$ であるから系 5.40 より $\delta_V(D) : \Omega_V(-D) \mapsto I(D)^*$ は k 線型同型である. ∎

定理 5.42 $g = \dim_k \Omega_V(0)$ が成り立つ. ただし g は V の種数である.

Proof　双対定理より $\Omega_V(0) \simeq I(0)^*$ (k 線型同型) となるから, 定理 5.4 の結果とあわせると

$$\dim_k \Omega_V(0) = \dim_k I(0)^* = \dim_k I(0) = i(0) = g$$

が得られる. ∎

以上で Riemann-Roch の定理を証明する準備が整った.

定理 5.43 (Riemann-Roch の定理) 任意の因子 D に対して次の等式が成り立つ. ただし K_V は標準因子, g は V の種数である.

$$\ell(D) - \ell(K_V - D) = \deg D + 1 - g$$

Proof 定理 5.31 より

$$\ell(K_V - D) = \dim_k \Omega_{V,\omega}(-D) = \dim_k \Omega_V(-D)$$

であり, また双対定理より

$$\dim_k \Omega_V(-D) = \dim_k I(D)^* = i(D)$$

が成り立つので

$$i(D) = \ell(K_V - D)$$

となる. これと Riemann-Roch の定理暫定版

$$\ell(D) - i(D) = \deg D + 1 - g$$

より求める等式が得られる. ∎

最後に Riemann-Roch の定理から 2 つの定理を導いておく.

定理 5.44 0 でない有理微分 $\omega \in \Omega(k(V))$ に対して $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = 2g-2$ が成り立つ.

Proof Riemann-Roch の定理において $D = K_V = \mathrm{div}(\omega)$ とすると

$$\ell(K_V) - \ell(0) = \deg K_V + 1 - g$$

が得られる. 一方, 定理 5.31 で $D = 0$ とし, 定理 5.42 を適用すると

$$\ell(K_V) = \dim_k \Omega_{V,\omega}(0) = \dim_k \Omega_V(0) = g$$

を得る. $i(0) = g$ であるから

$$g - 1 = \deg(\mathrm{div}(\omega)) + 1 - g$$

が成り立ち, 求める等式が得られる. ∎

定理 5.45 因子 D が $\deg D \geq 2g-1$ を満たすとき $\ell(D) = \deg D + 1 - g$ が成り立つ.

Proof $\deg D \geq 2g - 1$ より, 定理 5.44 を適用すると

$$\deg(K_V - D) = \deg(\mathrm{div}(\omega)) - \deg D \leq (2g-2) - (2g-1) < 0$$

が成り立つ. 従って定理 4.22 より $\ell(K_V - D) = 0$ となるので, Riemann-Roch の定理より

$$\ell(D) = \deg D + 1 - g$$

が導かれる. ∎

付録 A　Krull の標高定理の証明

ここでは §2.7 で用いた定理 2.37 と定理 2.38 (Krull の標高定理) を証明する.

補題 A.1 R は k 上有限生成な整域, $f \in R$ は 0 でも可逆でもない元で, $\sqrt{(f)}$ が素イデアル $\mathfrak{p}$ に一致したとする. このとき次が成り立つ.

$$\mathrm{tr.deg}_k\, R/\mathfrak{p} = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$$

Proof　ネーターの正規化定理 ([5, 定理 30.5], [2, 定理 $\mathfrak{A}$.1.12]) より k 上代数的独立な元 $x_1, ..., x_r$ が存在して R が有限生成 $k[x_1, ..., x_r]$ 加群となるようにできる. $R_0 = k[x_1, ..., x_r]$ とおき, K, K_0 をそれぞれ R, R_0 の分数体で $K \supseteq K_0$ なるものとする. K は K_0 の代数拡大であるから $\mathrm{tr.deg}_k\, K = \mathrm{tr.deg}_k\, K_0 = r$ である. 一方 f は R_0 上整であるから, ある R_0 係数モニック多項式 G の根となる. R_0 は素元分解整域であるから G はモニック既約多項式の積に分解でき, その中のひとつは f を根に持つ. それを改めて G とおく. G は原始的であるから K_0 係数多項式として既約 ([5, p.61, 補題 2], [2, 系 A.3.12]), 従って f の K_0 上の最小多項式となる.

$$G(Y) = Y^m + a_1 Y^{m-1} + \cdots + a_m$$

とおくと, K を K_0 線型空間と見なしたときの f による線型変換の行列式 $N_{K/K_0}(f)$ は $\pm a_m^d$ と表される. 一方 $G(f) = 0$ より

$$a_m = -f(f^{m-1} + a_1 f^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) \tag{A.1}$$

となる. ここで R_0 のイデアルとして $\sqrt{(a_m)} = R_0 \cap \sqrt{(f)}$ が成り立つことを示そう.

$u \in \sqrt{(a_m)}$ とすると $u^t \in (a_m)$ となるが (A.1) より $u^t \in (f)$ となる. 従って $u \in R_0 \cap \sqrt{(f)}$ が得られる. 逆に $u \in R_0 \cap \sqrt{(f)}$ と仮定

すると，$u^s = fg,\ g \in R$ と表され

$$N_{K/K_0}(u^s) = N_{K/K_0}(fg) = N_{K/K_0}(f)\,N_{K/K_0}(g) = \pm a_m^d\,N_{K/K_0}(g)$$

となるが f の場合と同様に $N_{K/K_0}(g) \in R_0$ が成り立ち

$$N_{K/K_0}(u^s) = (u^s)^{\dim_{K_0} K}$$

となるので $(u^s)^{\dim_{K_0} K} \in (a_m)$ が得られる．ゆえに $u \in \sqrt{(a_m)}$ が示された．以上から $\sqrt{(a_m)} = R_0 \cap \sqrt{(f)}$ が成り立つ．

さて $\sqrt{(a_m)} = R_0 \cap \sqrt{(f)}$ は R_0 の素イデアルであるから，ある既約多項式 $f_0 \in R_0$ を含み，a_m が f_0 のべきに同伴となることから

$$\sqrt{(a_m)} = R_0 \cap \sqrt{(f)} = (f_0)$$

が成り立つ．従って定理 2.34 より

$$\mathrm{tr.deg}_k\, R_0/(f_0) = r - 1 = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$$

となるが，R が R_0 上整であるから

$$\mathrm{tr.deg}_k\, R_0/(f_0) = \mathrm{tr.deg}_k\, R/\sqrt{(f)} = \mathrm{tr.deg}_k\, R/\mathfrak{p}$$

となり，$\mathrm{tr.deg}_k\, R/\mathfrak{p} = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$ が得られる． ∎

定理 A.2 (単項イデアル定理) R は k 上有限生成な整域，$f \in R$ は 0 でも可逆でもない元で，$\sqrt{(f)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ と表されているとする．ただし，$\mathfrak{p}_i$ は R の素イデアルで $i \neq j$ のとき $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ であるとする．このとき，任意の i について次が成り立つ．

$$\mathrm{tr.deg}_k(R/\mathfrak{p}_i) = \mathrm{tr.deg}_k R - 1$$

Proof　$n = 1$ のときは補題 A.1 に帰着するので $n \geq 2$ として $\mathfrak{p}_1$ について示す．$\mathfrak{p}_2,\ldots,\mathfrak{p}_n$ についても同様である．$g \in \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n - \mathfrak{p}_1$ を選ぶと，積閉集合 $\{g^m\}_{m=1,2,..}$ による局所化 R_g は R の分数体の部分整域 $R[\frac{1}{g}]$ に一致するので，k 上有限生成な整域である．ここで

$$\sqrt{fR_g} = \left(\sqrt{(f)}\right)_g = (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n)_g = (\mathfrak{p}_1)_g \cap \cdots \cap (\mathfrak{p}_n)_g = (\mathfrak{p}_1)_g$$

が成り立つことから, 補題 A.1 を適用すれば

$$\mathrm{tr.deg}_k\, R_g/(\mathfrak{p}_1)_g = \mathrm{tr.deg}_k\, R_g - 1 = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$$

を得る. 一方 $R/\mathfrak{p}_1$ の分数体と $R_g/(\mathfrak{p}_1)_g$ の分数体は一致するので

$$\mathrm{tr.deg}_k\ R_g/(\mathfrak{p}_1)_g = \mathrm{tr.deg}_k\ R/\mathfrak{p}_1$$

に注意すれば

$$\mathrm{tr.deg}_k\ R/\mathfrak{p}_1 = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$$

が成り立つ. ∎

次式で定まる値をアフィン閉部分多様体 V のクルル次元という.

$$\max\{r \mid \emptyset \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subsetneq V,\ Z_i \text{ は閉部分多様体}\}$$

p.50 で定めたように V に含まれる閉部分多様体 Z に対して, その余次元 $\mathrm{codim}_V Z$ が次式で定まる.

$$\mathrm{codim}_V Z = \max\{r \mid Z = Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subsetneq V,\ Z_i \text{ は閉部分多様体}\}$$

これより V のクルル次元は V に含まれる閉部分多様体の余次元の中の最大値に一致するので次式が成り立つ.

$$(V \text{ のクルル次元}) = \max\{\mathrm{codim}_V Z \mid\ Z \text{ は } V \text{ に含まれる閉部分多様体}\}$$

定理 A.3 アフィン閉部分多様体 V に真に含まれる閉部分多様体 Z の次元は $\dim V - 1$ 以下である. 特に Z が極大ならば $\dim Z = \dim V - 1$ が成り立つ.

Proof　0 でない元 $f \in \mathbf{I}_V(Z)$ を選ぶ. f は 0 でも可逆でもない. Z は $\mathbf{V}_V(f)$ のある既約成分 Z' に含まれるので定理 A.2 より $\dim Z \leq \dim Z' = \dim V - 1$ が成り立つ. 特に Z が極大ならば $Z = Z'$ となるので $\dim Z = \dim V - 1$ が成り立つ. ∎

定理 A.4 アフィン閉部分多様体 V の次元はクルル次元と一致する.

Proof　任意の閉部分多様体の列 $\emptyset \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subsetneq V$ に対して定理 A.3 より

$$\dim Z_1 \leq \dim Z_2 - 1,\ \dim Z_2 \leq \dim Z_3 - 1,\ ....,\ \dim Z_r \leq \dim V - 1$$

が成り立つので $\dim Z_1 + r \leq \dim V$ を得る．これより V のクルル次元は $\dim V$ 以下である．逆に $\dim V = n$ とする．$n = 0$ ならば明らかに成り立つ．$n \geq 1$ とすると 0 でも可逆でもない元 $f \in O(V)$ が存在するので $\mathbf{V}_V(f)$ の既約成分 Z_1 が存在し $\dim Z_1 = n - 1$ となる．$n - 1 \geq 1$ ならば同様にして閉部分多様体 $Z_2 \subseteq Z_1$ で $\dim Z_2 = n - 2$ となるものが存在する．以下同様にして閉部分多様体の列

$$\emptyset \subsetneq Z_n \subsetneq \cdots \subsetneq Z_1 \subsetneq V$$

が得られるので V のクルル次元は $\dim V$ 以上となる．以上で V のクルル次元が $\dim V$ に一致することが示された． ∎

定理 A.5 閉部分多様体 Z が閉部分多様体 V に含まれるとき次が成り立つ．

$$\mathrm{codim}_V Z = \dim V - \dim Z$$

Proof　$\mathrm{codim}_V Z = s$ とすると閉部分多様体の列

$$Z = Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_s \subsetneq V$$

が存在する．$\dim Z_i < \dim Z_{i+1} - 1$ と仮定すると $\mathbf{I}_{Z_{i+1}}(Z_i)$ の 0 でない元 f が存在して，定理 A.2 より $\mathbf{V}_{Z_{i+1}}(f)$ の既約成分で Z_i を含むもの Z' が $\dim Z' = \dim Z_{i+1} - 1$ を満たす．従って $Z' \neq Z_i$ であるが，閉部分多様体の列

$$Z = Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_i \subsetneq Z' \subsetneq Z_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Z_s \subsetneq V$$

が得られ $\mathrm{codim}_V Z = s$ であったことに反する．従って $\dim Z_i = \dim Z_{i+1} - 1$ が成り立つ．これより $s = \dim V - \dim Z$ が得られる． ∎

定理 A.6 (Krull の標高定理) $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ を閉部分多様体，$f_1, ..., f_r \in O(V)$ とし，$\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ が空でないとする．このとき $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ の既約成分 Z について $\mathrm{codim}_V Z \leq r$ が成り立つ．

Proof　$\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_r)$ が空でないことから f_i は可逆でないことを注意しておく．r についての帰納法で示す．$r = 1$ のとき，$f_1 = 0$ ならば $\mathbf{V}_V(f_1)$ の既約

成分は V のみであるから $\operatorname{codim}_V(V) = 0$ より成り立つ．また $f_1 \neq 0$ ならば定理 A.2 より $\dim Z = \dim V - 1$ となるので，定理 A.5 を適用すると

$$\operatorname{codim}_V Z = \dim V - \dim Z = 1$$

となり成り立つ．

次に $r-1$ のとき成り立つと仮定して r のとき成り立つことを示す．Z を含む $\mathbf{V}_V(f_1, ..., f_{r-1})$ の既約成分を Z' とする．帰納法の仮定から $\operatorname{codim}_V Z' \leq r-1$ が成り立つ．また Z は $\mathbf{V}_{Z'}(f_r)$ の既約成分であるから $f_r \in O(Z')$ が 0 でないときは $\dim Z = \dim Z' - 1$ となる．これより

$$\operatorname{codim}_V Z = \dim V - \dim Z = \dim V - (\dim Z' - 1) \leq r$$

が得られる．f_r が $O(Z')$ で 0 であるときは $\mathbf{V}_{Z'}(f_r) = Z'$ となるので $Z = Z'$ が得られ，

$$\operatorname{codim}_V Z = \operatorname{codim}_V Z' < r - 1$$

より，この場合も成り立つ．以上で r のときも成り立つことが示された． ∎

参考文献

[1] F. オールト, H.J.K. ボス (上野健爾・訳), ポンスレの閉形定理, (数学セミナー 1986 年 5〜8 月号), 日本評論社.

[2] 梶原 健, 「代数曲線入門」, 日本評論社, 2004.

[3] 佐武一郎, 「線型代数学」, 裳華房, 1958.

[4] 永尾 汎, 「代数学」, 朝倉書店, 1983.

[5] 松村英之, 「代数学」, 朝倉書店, 1990.