

平成13年度 学位論文

独立確率変数の和に関する
極限定理について

兵庫教育大学大学院 学校教育研究科
教科・領域教育専攻 自然系コース
M00187E 森本美紀

序 文

本論文の目的は、独立確率変数の和に関する極限定理について考察し、それらの定理に明確な証明を与えることである。本論文において極限定理とは、確率変数列の法則収束、概収束に関する諸結果をさしているが、確率変数列が独立な場合これらの収束は同等になる。したがって本論文では主に、確率変数列が法則収束する場合を取り扱うことにする。

本論文における主題は、以下の問題を考察することである。

問題 各 n に対して、 $\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ は独立で、同分布をもつ確率変数列とする。
 $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ が、 $n \rightarrow \infty$ のとき法則収束するならば、その極限分布はどのようなものであるか。

この問題については 20 世紀半ばごろ、レヴィ、コルモゴロフらによって以下の結果が示された。

- 上記の問題に対する極限分布は、すべて無限分解可能な分布である。
- この極限分布の特性関数は、ある実数と \mathbb{R}^1 上の有界測度を用いて具体的に表現できる。

ところで、よく知られた独立確率変数の和に関する極限定理には、大数の法則や中心極限定理があるが、本文中で述べるように、これらはこの問題に属することがわかる。

したがって本論文の主題は、上記の問題について考察し、この 2 つの結果を導くことである。

本論文は、3 章で構成されている。

第 1 章では、測度論を前提とし、本論文を構成する上で必要となる確率論の基礎的概念を述べる。したがってこの章では、証明はすべて省略する。1 節では、 σ -加法族、ボレル集合体、可測空間を定義する。その後、コルモゴロフにしたがって全測度 1 の測度を確率として捉え確率空間を定義し、カラテオドリの拡張定理により有限次元直積確率空間が構成できることを述べる。2 節では、可測関数を定義し、可測関数により確率変数を定義する。次に分布と分布関数を定義し、分布関数が分布を特徴づける関数であることを述べ、論文に必要な分布の具体例をあげる。3 節では、確率変数の独立性、加法族・ σ -加

法族の独立性を述べ、確率変数列に関する収束概念のひとつである概収束を定義する。4節では、確率変数に対して平均値と分散を定義し、平均値の基本的な性質をあげ、2つの確率変数が同じ分布をもてば、その平均値は等しくなることを述べる。また、特定の分布に対する平均値の例をあげる。次に測度論でよく知られたフビニの定理を述べ、独立確率変数列に対する平均値の乗法性や、平均収束を導く重要な結果であるルベークの収束定理を述べる。

第2章では、分布を特徴づけるひとつの量として特性関数を導入し、特性関数の収束を通して分布の収束や確率変数の収束を考察する。1節では、特性関数を定義し、2つの確率変数が同じ分布をもてば、その特性関数は等しくなることを述べる。また、特性関数の簡単な性質を示し、独立確率変数の和の特性関数についても考察する。次にレヴィの反転公式と一意性定理を示し、分布と特性関数が一対一対応をもつことを述べる。2節では、分布の収束性の意味づけをし、命題 2.10 においてそれと同値な結果を5つ示す。また3節において、特性関数と分布の収束にかかわる定理を示す準備として、分布列の任意の無限列が収束部分列をもつための必要十分条件について述べる。3節では、確率変数の収束概念である法則収束を、対応する分布の収束によって定義し、概収束と法則収束の関係について述べる。次に定理 2.14 と定理 2.15 において、特性関数の収束と分布の収束が関連づけられることを示す。特にこの後者の定理は、分布の収束を考える上で非常に有用な定理である。

第3章では、0-1法則、大数の法則、中心極限定理と、はじめに述べた本論文の主題となる問題について考察する。1節では、末尾事象を定義し、コルモゴロフの0-1法則について述べ、独立確率変数の算術平均が収束する事象は末尾事象となることを示す。2節では、その算術平均が確率1で収束する条件について述べ、コルモゴロフの大数の法則を示す。3節では、一般的な枠組みにおいて中心極限定理を示す。その結果からの帰結として、確率変数が独立同分布な場合における中心極限定理を導く。4節では、本論文の主題である問題について考察し、定理 3.14 において、独立同分布確率変数の和が法則収束するとき、その極限分布は無分解可能な分布であり、さらに、その極限分布の特性関数は具体的な形で表現できることを示す。その準備として、無分解可能な分布・無分解可能な特性関数を定義し、それらがもつ性質を調べる。そして、定理 3.18、定理 3.19 を示し、定理 3.14 を導く。

本論文を構成するにあたっては、西尾 真喜子 著『確率論』を参考とし、本論文の主題である定理 3.14 を導くために必要となる筋道を再構成したが、証明に関してはより丁寧な証明を記すよう心がけた。

最後になりましたが、学部生時代から含めて六年間丁寧にご指導頂きました兵庫教育大学 数学教室 藤原 司先生をはじめ、数学教室の諸先生方に心より感謝の意を表します。

目次

第 1 章	確率論の基本概念	1
1.1	確率空間	1
1.2	可測関数と確率変数	3
1.3	確率変数の独立性と収束概念	6
1.4	平均値	8
第 2 章	特性関数	12
2.1	特性関数の定義とその性質	12
2.2	確率測度の収束	18
2.3	分布の収束と特性関数の収束	25
第 3 章	独立確率変数の極限定理	30
3.1	コルモゴロフの $0-1$ 法則	30
3.2	大数の法則	33
3.3	中心極限定理	36
3.4	無限分解可能な分布	40
	参考文献	56

第1章 確率論の基本概念

この章では，独立確率変数の和に関する極限定理を議論するにあたって，必要となる基本概念を述べる．その際，20世紀前半にコルモゴロフによって確立された測度論的確率論の枠組みに沿って議論を進める．

1.1 確率空間

定義 1.1 Ω を空でない集合とする． Ω の部分集合族 \mathcal{F} が次の3つの条件をみたすとき， \mathcal{F} を σ -加法族という．

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii) $\Lambda \in \mathcal{F}$ ならば， $\Lambda^c \in \mathcal{F}$
- (iii) $\Lambda_i \in \mathcal{F}$ ， $i = 1, 2, \dots$ ならば， $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i \in \mathcal{F}$

\mathcal{F} が定義 1.1 の () のかわりに次の条件をみたすとき， \mathcal{F} を Ω 上の加法族という．
()' $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}$ ならば， $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathcal{F}$

定理 1.2 \mathcal{C} を Ω の部分集合族とする．このとき， \mathcal{C} を含む最小の σ -加法族が唯一存在する．

これを \mathcal{C} より生成される σ -加法族といい， $\sigma(\mathcal{C})$ とかく．

定義 1.3 Ω を n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n ， \mathcal{C} を Ω 上の開集合全体とする．このとき， $\sigma(\mathcal{C})$ を n 次元ボレル集合体とよび， B_n とかく． B_n の要素を n 次元ボレル集合という．

例 1.4 $\mathcal{C}_1 \equiv \{(-\infty, r] ; r \text{ は有理数}\}$ ， $\mathcal{C}_2 \equiv \{(a, b] ; -\infty \leq a < b < \infty\}$ とおけば， $\sigma(\mathcal{C}_i) = B_1$ ， $i = 1, 2$ となる．

例 1.5 ξ を Ω 上の n 次元ベクトル値関数とする． $\mathcal{C} \equiv \{\xi^{-1}(A) ; A \in B_n\}$ とおけば， \mathcal{C} は σ -加法族となる．これを ξ からつくられる σ -加法族といい， $\sigma(\xi)$ とかく．

定義 1.6 Ω に σ -加法族 \mathcal{F} が定められているとき， (Ω, \mathcal{F}) を可測空間といい， \mathcal{F} の要素となる Ω の部分集合を \mathcal{F} -可測集合，または単に可測集合という．

定義 1.7 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$ を可測空間, $\mathcal{C} \equiv \left\{ \prod_{i=1}^n \Lambda_i ; \Lambda_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n \right\}$ とする. $\prod_{i=1}^n \Omega_i \equiv \{(\omega_1, \dots, \omega_n) ; \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \dots, n\}$ 上の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ を, \mathcal{F}_i , $i = 1, \dots, n$ の直積 σ -加法族といい, $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ とかく. また, 可測空間 $\left(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$ を $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$ の直積という.

次に, コルモゴロフにしたがって確率を定義する.

定義 1.8 (Ω, \mathcal{F}) を可測空間とする. \mathcal{F} 上で定義された P が次の 3 つの条件をみたすとき, P を \mathcal{F} 上の確率, もしくは確率測度という.

- (i) 任意の $\Lambda \in \mathcal{F}$ に対し, $P(\Lambda) \geq 0$
- (ii) $P(\Omega) = 1$
- (iii) $\Lambda_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ が互いに素のとき,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\Lambda_i) \quad (\sigma\text{-加法性})$$

P が定義 1.8 () のかわりに次の条件をみたすとき, P を測度という.

$$\text{任意の } \Lambda \in \mathcal{F} \text{ に対し, } P(\Lambda) \leq \infty$$

また $P(\Lambda) < \infty$ のとき, P を有界測度という. すなわち, 全測度 1 の測度が確率である. また, P は σ -加法性をみたすため, 有限項の $\Lambda_i \in \mathcal{F}$ に対しても条件 () は成り立つ. これを有限加法性という.

定義 1.9 (Ω, \mathcal{F}) を可測空間, P を \mathcal{F} 上で定義された確率とする. このとき, (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間, $\Lambda \in \mathcal{F}$ を事象, $P(\Lambda)$ を事象 Λ の起こる確率, あるいは Λ の確率という.

特定の事象に対する確率を定めたとき, そのようになる確率の存在を示すことは, 確率論の基本的な問題の一つである. この問題に対し, 次の拡張定理は重要である.

定理 1.10 (カラテオドリの拡張定理) \mathcal{C} を Ω 上の加法族, Q は \mathcal{C} 上で定義された有限加法性をもつ関数で, 次の条件をみたすものとする.

- (i) 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し, $Q(A) \geq 0$
- (ii) $Q(\Omega) = 1$
- (iii) $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \dots$ を互いに素な集合列とする.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \text{ ならば, } Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

このとき, Q は $\sigma(\mathcal{C})$ 上の確率に一意的に拡張できる. すなわち, $\sigma(\mathcal{C})$ 上で定義され, 次の条件をみたす確率 P が一意的に存在する.

$$\text{任意の } A \in \mathcal{C} \text{ に対し, } P(A) = Q(A)$$

集合 A, B に対し, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を A と B の対称差といい, $A \Delta B$ とかく.

定理 1.11 (近似定理) (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ とする. \mathcal{C} が加法族のとき, $\Lambda \in \sigma(\mathcal{C})$ に対し, 次をみたす $A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \dots$ が存在する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Lambda \Delta A_n) = 0$$

つまり, この定理は $\sigma(\mathcal{C})$ の集合が \mathcal{C} の集合で近似できることを示している.

カラテオドリの拡張定理により, 有限次元直積確率空間を構成することができる.

確率空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \dots, n$ に対し, $\Omega \equiv \prod_{i=1}^n \Omega_i$ とおく.

$\mathcal{B} \equiv \left\{ \prod_{i=1}^n \Lambda_i; \Lambda_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n \right\}$ とおき, \mathcal{C} を \mathcal{B} の互いに素な集合の有限和として

表わされる集合全体とすれば, \mathcal{C} は加法族で, $\sigma(\mathcal{C}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ となる. $\mathcal{F} \equiv \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ とおく.

Q を $Q \left(\prod_{i=1}^n \Lambda_i \right) = \prod_{i=1}^n P_i(\Lambda_i)$ となる \mathcal{C} 上の有限加法性をもつ関数とする. すなわち,

$A = \bigcup_{j=1}^l \prod_{i=1}^n \Lambda_i^{(j)}$ と互いに素な直積集合の和とかけたとき, $Q(A) = \sum_{j=1}^l \prod_{i=1}^n P_i(\Lambda_i^{(j)})$ となる. A が 2 通りの互いに素な直積集合の和で表わされたとすればそれらは等しくなるので, $Q(A)$ は A の表わし方によらない.

このとき, Q はカラテオドリの拡張定理の 3 つの条件をみたすので, 定理により Q は \mathcal{F} 上の確率 P に拡張できる. この P を P_1, \dots, P_n の直積確率測度といい, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ とかく. また, (Ω, \mathcal{F}, P) を $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \dots, n$ の直積確率空間という.

1.2 可測関数と確率変数

以下この節では (Ω, \mathcal{F}) を可測空間とする.

定義 1.12 Ω 上の実数値関数 X が, 任意の $A \in \mathcal{B}_1$ に対し

$$X^{-1}(A) = \{ \omega \in \Omega; X(\omega) \in A \} \in \mathcal{F}$$

をみたすとき, X を \mathcal{F} -可測または \mathcal{F} -可測関数という.

ただし X は, $+\infty, -\infty$ の値も許した関数が必要な場合もあるが, 特にことわらない限り実数値関数とする. $+\infty, -\infty$ も許した関数 X に対しては, 定義 1.12 以外に $X^{-1}\{\infty\}, X^{-1}\{-\infty\}$ が共に \mathcal{F} の要素になるとき, X を \mathcal{F} -可測という.

定理 1.13 X が \mathcal{F} -可測となる必要十分条件は,

$$\text{任意の有理数 } r \text{ に対し, } X^{-1}((-\infty, r]) \in \mathcal{F}$$

が成り立つことである.

\mathbb{R}^n 上の B_n -可測関数を n 次元ボレル関数という.

例 1.14 \mathbb{R}^n 上の連続関数 g は n 次元ボレル関数である.

定理 1.15 $X_i, i = 1, \dots, n$ を Ω 上の \mathcal{F} -可測関数, g を n 次元ボレル関数とすれば, 合成関数 $Y(\omega) \equiv g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ も \mathcal{F} -可測になる.

定理 1.16 $X_n, n = 1, 2, \dots$ を Ω 上の \mathcal{F} -可測関数列とする. $\inf_n X_n, \sup_n X_n, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ が, それぞれ Ω の各点で有限値をもてば, それらは Ω 上の \mathcal{F} -可測関数である. また, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ が \mathbb{R}^1 で存在する ω 全体の集合は \mathcal{F} -可測集合である.

Ω 上の関数 X が, 互いに素な \mathcal{F} -可測集合 $\Lambda_i, i = 1, \dots, n$ と $a_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, \dots, n$ により $X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i I_{\Lambda_i}(\omega)$ とかけるとき, X を階段関数という.

ただし I は, $\omega \in \Lambda$ のとき $I_{\Lambda}(\omega) = 1, \omega \notin \Lambda$ のとき $I_{\Lambda}(\omega) = 0$ となる関数とする.

定理 1.17 Ω 上の非負な \mathcal{F} -可測関数 X は, 非負階段関数で下から各点近似できる.

次に確率変数, 分布, 分布関数を定義し, これらの関係について述べる.

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された \mathcal{F} -可測関数 X を確率変数という. X が \mathcal{F} -可測より, 任意の $A \in B_1$ に対し $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となるから $P(X^{-1}(A))$ が定まる. これを X が A に入る確率といい, $P(X \in A)$ とかく.

定理 1.18 B_1 上の関数 μ を $\mu = P \circ X^{-1}$, すなわち

$$\mu(A) = P(X \in A), \quad A \in B_1$$

により定義すれば, μ は B_1 上の確率になる.

X を Ω から \mathbb{R}^1 への写像と見たとき, X により P は μ に写され, 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) は確率空間 (\mathbb{R}^1, B_1, μ) に写される.

定義 1.19 定理 1.18 の μ を X の分布といい,

$$F(x) \equiv \mu((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

と定義された \mathbb{R}^1 上の関数 F を, X の分布関数あるいは μ の分布関数という.

定理 1.20 \mathbb{R}^1 上の関数 F が分布関数ならば, F は次の性質をみたす.

- (i) $x \leq y$ ならば, $F(x) \leq F(y)$ (単調性)
- (ii) $x \searrow c$ ならば, $F(x) \searrow F(c)$ (右連続性)
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

逆に, \mathbb{R}^1 上の関数 F が () ~ () の条件をみたすならば, 適当な確率空間とその上の確率変数 X を, X の分布関数が F となるように作ることができる. さらに, F を分布関数とする確率変数の分布は一意である.

すなわちこの定理より, 分布関数は分布を特徴づける上で有用な関数であることがわかる.

ここで, 分布の例をあげておく.

例 1.21 単位分布 $\delta_{\{a\}}$, $a \in \mathbb{R}^1$

確率変数 X の分布 μ が次のようになるとき, X は単位分布 $\delta_{\{a\}}$ に従うという.

$$\mu(a) = P(X = a) = 1$$

すなわち単位分布とは, 確率変数 X が 1 点 a だけにおいて確率 1 をもつ測度のことである.

例 1.22 ポアソン分布 $\Phi(\lambda, u)$, $\lambda > 0$, $u \neq 0$

確率変数 X の分布 μ が, 任意の $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対し次のようになるとき, X はパラメータ λ , 高さ u のポアソン分布 $\Phi(\lambda, u)$ に従うという.

$$\mu(ku) = P(X = ku) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

例 1.23 一次元正規分布 $N(m, v)$, $-\infty < m < \infty$, $v > 0$

確率変数 X の分布 μ が任意の $A \in B_1$ に対し次のようになるとき, X はパラメータ m, v

の一次元正規分布 $N(m, v)$ に従うという.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= P(X \in A) \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/2v} dx\end{aligned}$$

特に, $m = 0, v = 1$ のとき, X は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うという.

このように, (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 X が, 適当な非負値ボレル関数 f によって

$$\text{任意の } \Lambda \in \mathcal{F} \text{ に対し, } P(X \in \Lambda) = \int_{\Lambda} f(x) dx$$

と表わせるとき, f を P の密度関数という.

以上のことをベクトル値関数に拡張しておく.

$X_i, i = 1, \dots, n$ を (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数とする. Ω 上の n 次元ベクトル値関数 $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ を n 次元確率変数という.

定理 1.24 \mathbf{X} を n 次元確率変数とする. B_n 上の関数 μ を $\mu = P \circ \mathbf{X}^{-1}$, すなわち

$$\mu(A) = P(\mathbf{X} \in A), \quad A \in B_n$$

により定義すれば, μ は B_n 上の確率になる.

定義 1.25 定理 1.24 の μ を \mathbf{X} の分布または X_1, \dots, X_n の結合分布といい, $F(x_1, \dots, x_n) \equiv \mu((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ と定義された \mathbb{R}^n 上の関数 F を, \mathbf{X} の分布関数あるいは μ の分布関数という.

定義 1.26 n 次元確率変数 \mathbf{X} に対して次が成り立つとき, \mathbf{X} の分布は対称であるという.

$$P(\mathbf{X} \in A) = P(-\mathbf{X} \in A), \quad A \in B_n$$

1.3 確率変数の独立性と収束概念

まず確率変数の独立性を述べる前に, 事象の独立性について定義しておく.

定義 1.27 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) に対し, $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, \dots, n$ とする. A_1, \dots, A_n が独立とは,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

が成り立つときにいう.

$X_i, i = 1, \dots, n$ を (Ω, \mathcal{F}, P) 上の k_i 次元確率変数とする .

定義 1.28 任意の $A_i \in \mathcal{B}_{k_i}, i = 1, \dots, n$ に対し

$$P(\mathbf{X}_1 \in A_1, \dots, \mathbf{X}_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(\mathbf{X}_i \in A_i)$$

が成り立つとき , $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ は独立という .

定義 1.29 任意の n に対して $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ が独立のとき , $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots$ を独立という .

次に , 加法族と σ -加法族の独立性について述べる .

定義 1.30 \mathcal{F} の部分加法族 $\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n$ が , 任意の $\Lambda_i \in \mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n$ に対し

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \Lambda_i\right) = \prod_{i=1}^n P(\Lambda_i)$$

となるとき , $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ は独立という . また , 任意の n に対し $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ が独立のとき , \mathcal{F} の部分加法族の列 $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, \dots$ は独立という .

定理 1.31 $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, n$ が独立となる必要十分条件は , $\sigma(\mathbf{X}_i), i = 1, \dots, n$ が独立となることである .

定理 1.32 $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, \dots$ を独立な加法族とする . J_1, \dots, J_p が互いに素な集合のとき , $\sigma\left(\bigcup_{j \in J_l} \mathcal{C}_j\right), l = 1, \dots, p$ も独立になる .

例 1.33 $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, \dots$ を独立な加法族とすれば , $\sigma\left(\bigcup_{j=1}^k \mathcal{C}_j\right)$ と $\sigma\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \mathcal{C}_j\right)$ は独立になる .

次に , 確率変数列に関する収束概念のひとつとして概収束を定義する .

$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ が \mathbb{R}^1 で存在する ω 全体を Δ とすれば , 定理 1.16 より Δ は \mathcal{F} -可測集合であり , $\omega \in \Delta$ のとき $X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$, $\omega \notin \Delta$ のとき $X(\omega) = 0$ とおけば , X は \mathcal{F} -可測になる .

定義 1.34 $P(\Delta) = 1$ のとき , X_n は概収束するという . さらに , 確率変数 X が適当な確率 1 の集合の各点 ω で $X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ となるとき , X_n は X に概収束するといいい , $X_n \rightarrow X$ a.e. とかく .

数列 $X_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ が収束列であるための条件が, コーシー列であることを用いると,

$$\Delta = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n, m \geq N} \left\{ \omega \in \Omega ; |X_n(\omega) - X_m(\omega)| < \frac{1}{p} \right\}$$

となるため, この立場より $P(\Delta) = 1$ をみれば次の定理が成り立つ.

定理 1.35 X_n が概収束する必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\omega \in \Omega ; N \text{ 以上のすべての } n, m \text{ に対し, } |X_n(\omega) - X_m(\omega)| < \varepsilon) = 1$$

が成り立つことである.

また, X_n が X に概収束する必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega \in \Omega ; n \text{ 以上のすべての } m \text{ に対し, } |X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) = 1$$

が成り立つことである.

1.4 平均値

この節では確率変数に対して平均値を定義し, 平均値に関する性質をあげる.

定義 1.36 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 X に対し,

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| P(d\omega) < \infty$$

が成り立つとき, X を可積分な確率変数という.

定義 1.37 (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間, X をその上の可積分な確率変数とする.

$$EX \equiv \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

このように定義した EX を X の平均値, もしくは平均という. また EX を, $E[X]$ や $E(X)$ とかくこともある.

これに対し, $\Lambda \in \mathcal{F}$ 上での積分 $\int_{\Lambda} X(\omega) P(d\omega)$ を $\int_{\Omega} X(\omega) I_{\Lambda}(\omega) P(d\omega)$ により定義する. すなわち, 記号 $E(X; \Lambda)$ を導入し, 以下のように定義する.

$$E(X; \Lambda) \equiv E[XI_{\Lambda}], \quad \Lambda \in \mathcal{F}$$

平均値の定義より, 直ちに次の性質が示される.

命題 1.38 X, Y を (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数とする。このとき、平均値に関して次の性質が成り立つ。

(i) X, Y が可積分のとき、任意の $a, b \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$E(aX + bY) = aEX + bEY \quad (\text{線形性})$$

(ii) $X \leq Y$ a.e. ならば、 $EX \leq EY$ (単調性)

(iii) $|EX| \leq E|X|$

(iv) (単調収束定理) $X_n, n = 1, 2, \dots$ を非負確率変数の増大列とする。

$$X_n \nearrow X \text{ a.e. ならば, } EX_n \nearrow EX$$

\mathbf{X} を (Ω, \mathcal{F}, P) 上の n 次元確率変数、 g を n 次元ボレル関数とする。このとき定理 1.15 より、 $g(\mathbf{X})$ は Ω 上の確率変数となるので、 $Eg(\mathbf{X})$ が定義される。ところが、 \mathbf{X} により P は \mathbf{X} の分布 μ に写される。この変換により $g(\mathbf{X})$ の平均値は、 μ による積分としても表わされる。これを詳しく述べると次の定理になる。

定理 1.39 μ を \mathbf{X} の分布とする。 n 次元ボレル関数 g に対し、 $Eg(\mathbf{X})$ が存在するならば、 $Eg(\mathbf{X})$ は次のようになる。

$$Eg(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1 \cdots dx_n) \quad (1.1)$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mu)$ 上の確率変数の平均を \tilde{E} で表わすと、(1.1) の右辺の積分は $\tilde{E}g$ となる。この定理は、同じ分布をもつ 2 つの確率変数は、定義されている確率空間が異なっている場合でもその平均値は等しくなることを示している。

定義 1.40 確率変数 X に対し、 EX^k を X の k 次モーメント、 $E|X|^k$ を X の k 次絶対モーメント、 $V(X) \equiv E[(X - EX)^2]$ を X の分散という。

平均と分散の例をあげておく。

例 1.41 単位分布 $\delta_{\{a\}}$

$$EX = a, \quad V(X) = 0$$

例 1.42 ポアソン分布 $\Phi(\lambda, u)$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} u k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = u\lambda$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (uk - u\lambda)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = u^2\lambda$$

例 1.43 一次元正規分布 $N(m, v)$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/2v} dx = m$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/2v} dx = v$$

したがって、パラメータ m と v はそれぞれ X の平均と分散になる。

独立確率変数の平均値は、定理 1.46 に述べるように乗法性をもつ。まず、測度論でよく知られたフビニの定理 (定理 1.44, 1.45) を述べる。この定理は、重積分における積分の順序交換に関するものである。

$(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$ を可測空間, $\Omega \equiv \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ とする。集合 $\Lambda \subset \Omega$ に対し, $\Lambda_{\omega_1} \equiv \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda\}$ を ω_1 における Λ の切口, また Ω 上の関数 X に対し, $X_{\omega_1}(\omega_2) \equiv X(\omega_1, \omega_2)$ と定義された Ω_2 上の関数 X_{ω_1} を, ω_1 における X の切口とよぶ。

定理 1.44 $\Lambda \in \mathcal{F}$ ならば, すべての $\omega_1 \in \Omega_1$ に対し Λ_{ω_1} は \mathcal{F}_2 -可測である。

X が \mathcal{F} -可測ならば, すべての $\omega_1 \in \Omega_1$ に対し X_{ω_1} は \mathcal{F}_2 -可測である。

定理 1.45 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, 2$ を確率空間, (Ω, \mathcal{F}, P) をその直積確率空間とする。 X が非負な \mathcal{F} -可測関数ならば, $\int_{\Omega_j} X_{\omega_i}(\omega_j) P_j(d\omega_j)$, $i \neq j$ は $+\infty$ も許した \mathcal{F}_i -可測関数であり, 次が成り立つ。

$$\int_{\Omega} X(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1 d\omega_2) = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2) P_2(d\omega_2) \quad (1.2)$$

$$= \int_{\Omega_2} P_2(d\omega_2) \int_{\Omega_1} X_{\omega_2}(\omega_1) P_1(d\omega_1) \quad (1.3)$$

また, X が (Ω, \mathcal{F}, P) 上で可積分ならば, $\int_{\Omega_j} X_{\omega_i}(\omega_j) P_j(d\omega_j)$ も Ω_i 上の可積分関数で, (1.2) と (1.3) が成り立つ。

定理 1.46 (乗法定理) X_i , $i = 1, \dots, n$ を独立確率変数とする。各 X_i が可積分であれば, 積 $\prod_{i=1}^n X_i$ も可積分で, 次が成り立つ。

$$E \left[\prod_{i=1}^n X_i \right] = \prod_{i=1}^n EX_i$$

ここで, 平均値に関する不等式を 1 つあげておく。

命題 1.47 (ヘルダーの不等式)

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p} (E|Y|^q)^{1/q} \quad \text{ただし, } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty$$

定義 1.48 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p) = 0$ のとき, X_n は X に p 次平均収束するという. 特に, $p = 1$ のとき X_n は X に平均収束するという.

平均収束する条件として一様可積分性がある.

定義 1.49 $X_n, n = 1, 2, \dots$ が次の条件をみたすとき, 一様可積分という.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\{\omega; |X_n(\omega)| \geq a\}} |X_n(\omega)| P(d\omega) = 0$$

すなわち, $a \rightarrow \infty$ のとき, 積分値 $E(|X_n|; |X_n(\omega)| \geq a)$ は n に関して一様に 0 に収束する.

定理 1.50 $X_n, n = 1, 2, \dots$ が一様可積分で, $X_n \rightarrow X$ a.e. ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0$ である.

この結果より, 直ちに次のルベークの収束定理を得る.

定理 1.51 (ルベークの収束定理) 可積分確率変数 Y に対し, $|X_n| \leq Y$ a.e., $n = 1, 2, \dots$ かつ, $X_n \rightarrow X$ a.e. ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0$ である.

第2章 特性関数

分布 (\mathbb{R}^n 上の確率) を特長づける量として, 1章で分布関数を定義した. この章では, もう一つの特性量として特性関数を導入する. この関数は確率測度をフーリエ変換により特長づけたものであるが, これは分布と一対一対応をもつ. また特性関数の収束は分布の収束と対応しており, 分布の収束と確率変数の収束が関連づけられることから, 特性関数は, 確率変数の収束や分布の収束を考える上で有用な特性量であるといえる.

2.1 特性関数の定義とその性質

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された複素数値関数 Z に対し, Z の実部 $\operatorname{Re}Z$ と虚部 $\operatorname{Im}Z$ が共に実数値確率変数のとき Z を複素数値確率変数といい, Z の平均値 EZ を, $EZ = E[\operatorname{Re}Z] + iE[\operatorname{Im}Z]$ と定義する.

定義 2.1 X を n 次元確率変数, μ を X の分布とし, \mathbb{R}^n 上の関数 φ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{t}) &\equiv Ee^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \mu(dx_1 \cdots dx_n), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)\end{aligned}$$

このとき φ を X の特性関数, あるいは μ の特性関数という. ただし, (\mathbf{t}, \mathbf{X}) は内積とする.

$e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})}$ は, $|e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})}| \leq 1$ となる複素数値確率変数であるから平均値は存在する. また, μ が密度関数 f をもつとき φ は次のようになる.

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k x_k\right) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

すなわち, φ は可積分関数 f のフーリエ変換である.

定義から明らかのように, 特性関数は確率変数の分布だけに依存するため, 2つの確率変数 X と Y が同じ分布をもてば, それらが定義されている確率空間が異なっている場合でもその特性関数は等しくなる.

例えば X の分布が対称なとき, 定義 1.26 より X と $-X$ は同じ分布をもつので, その特性関数も等くなる.

命題 2.2 n 次元確率変数 X の特性関数を φ_X とおくと, φ_X は次のような性質をもつ.

- (i) $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1$, $|\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| \leq 1$, $\varphi_{\mathbf{X}}(-\mathbf{t}) = \overline{\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}$
(ii) $|\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| \leq \sqrt{2|\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}) - \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0})|}$
(iii) $\varphi_{\mathbf{X}}$ は \mathbb{R}^n 上の一様連続関数である .

【証明】証明は n 次元の場合も 1 次元の場合と同様のため , $n = 1$ として示す .

()

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)|^2 &= |Ee^{i(t+h)X} - Ee^{itX}|^2 \\ &= |E[e^{itX}(e^{ihX} - 1)]|^2 \\ &\leq (E|e^{ihX} - 1|)^2 \end{aligned}$$

ここで , 1 章 , 4 節のヘルダーの不等式を用いると ,

$$\begin{aligned} (E|e^{ihX} - 1|)^2 &\leq E[|e^{ihX} - 1|^2] \\ &= E[(\cos(hX) - 1)^2 + \sin^2(hX)] \\ &= 2E(1 - \cos(hX)) \\ &= 2\operatorname{Re}(\varphi_X(0) - \varphi_X(h)) \leq 2|\varphi_X(0) - \varphi_X(h)| \end{aligned}$$

よって , $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \sqrt{2|\varphi_X(h) - \varphi_X(0)|}$ となる .

()

$$|\varphi_X(h) - \varphi_X(0)| = |\varphi_X(0) - \varphi_X(h)| = |E(1 - e^{ihX})| \leq E|1 - e^{ihX}|$$

ところが , $|1 - e^{ihX}| \leq 2$ かつ $\lim_{h \rightarrow 0} |1 - e^{ihX}| = 0$ となるので , ルベグの収束定理より次が成り立つ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} E|1 - e^{ihX}| = 0$$

したがって , () の不等式と考えあわせると , 任意の $\varepsilon > 0$ に対し , ある $\delta > 0$ が存在して

$$|h| < \delta \quad \text{ならば} , \quad |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| < \varepsilon$$

となる . ゆえに , φ_X は \mathbb{R}^1 上で一様連続である . ■

以下この章では , 定義や定理の内容は n 次元であげるが , 証明は n 次元の場合も 1 次元の場合と同様のため , すべて $n = 1$ として示す .

定理 2.3 $X_i, i = 1, \dots, n$ を n 次元独立確率変数とし , $\mathbf{X} \equiv \sum_{i=1}^n X_i$ とおく . このとき , \mathbf{X} の特性関数は次のようになる .

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t_i) , \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \quad (2.1)$$

【証明】 n についての帰納法で示す． $n = 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[e^{it(X_1+X_2)}] = E[\cos(tX_1 + tX_2) + i\sin(tX_1 + tX_2)] \\ &= E[\cos tX_1 \cos tX_2 - \sin tX_1 \sin tX_2] + iE[\sin tX_1 \cos tX_2 + \cos tX_1 \sin tX_2] \\ &= E[\cos tX_1 \cos tX_2] - E[\sin tX_1 \sin tX_2] \\ &\quad + iE[\sin tX_1 \cos tX_2] + iE[\cos tX_1 \sin tX_2]\end{aligned}\tag{2.2}$$

ここで，(2.2) の右辺に定理 1.46 を用いれば，

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[\cos tX_1]E[\cos tX_2] - E[\sin tX_1]E[\sin tX_2] \\ &\quad + iE[\sin tX_1]E[\cos tX_2] + iE[\cos tX_1]E[\sin tX_2] \\ &= E[\cos tX_1](E[\cos tX_2] + iE[\sin tX_2]) \\ &\quad + iE[\sin tX_1](E[\cos tX_2] + iE[\sin tX_2]) \\ &= E[e^{itX_1}]E[e^{itX_2}]\end{aligned}$$

よって， $n = 2$ の場合，定理は成り立つ．

n のとき定理が成り立つと仮定する． $n + 1$ のとき， $X_1 + \cdots + X_n$ と X_{n+1} は独立より，

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= Ee^{it(X_1+\cdots+X_n+X_{n+1})} \\ &= E[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}e^{itX_{n+1}}] \\ &= E[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}]E[e^{itX_{n+1}}] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)\right)\varphi_{X_{n+1}}(t) = \prod_{i=1}^{n+1} \varphi_{X_i}(t)\end{aligned}$$

ゆえに，定理は成り立つ． ■

この定理は，独立確率変数の和に対する特性関数が，それぞれの確率変数に対する特性関数の直積になることを示したものであるが，実はこの逆も成り立つ．すなわち， X_1, \dots, X_n が独立となる必要十分条件は， X の特性関数が (2.1) の形で書き表せることである．

ここで，特性関数の例をあげておく．

例 2.4 単位分布 $\delta_{\{a\}}$

$$\varphi(t) = e^{ita}$$

例 2.5 ポアソン分布 $\Phi(\lambda, u)$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ituk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \exp\{\lambda(e^{itu} - 1)\}$$

例 2.6 一次元正規分布 $N(m, v)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/2v} dx = e^{itm-vt^2/2}$$

関数のフーリエ変換の場合, f のフーリエ変換を \hat{f} とすれば, 逆変換により \hat{f} から再び f が得られる. 特性関数は確率測度のフーリエ変換になるので, この場合も特性関数から確率測度を求めることができる. この逆変換は次の公式により与えられる.

定理 2.7 (レヴィの反転公式) n 次元確率変数 X の分布を μ , 特性関数を φ とする. 矩形集合 $A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ に対し, $\mu(\partial A) = 0$ ならば

$$\mu(A) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \cdots \int_{-T}^T \prod_{k=1}^n \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \varphi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \quad (2.3)$$

となる. ただし, ∂A は A の境界とし, $\partial A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \setminus \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ とする.

【証明】まず, 次の式が成り立つことを示す.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

左辺の積分を $[0, T]$ 上で行えば,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^T \left(\int_0^{\infty} e^{-tu} du \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^T e^{-tu} \sin t dt du \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで, $J \equiv \int_0^T e^{-tu} \sin t dt$ とおく.

$$\begin{aligned} J &= \left[-e^{-tu} \cos t \right]_0^T - u \int_0^T e^{-tu} \cos t dt \\ &= 1 - e^{-Tu} \cos T + \left[-ue^{-tu} \sin t \right]_0^T - u^2 \int_0^T e^{-tu} \sin t dt \\ &= 1 - e^{-Tu} \cos T - ue^{-Tu} \sin T - u^2 J \end{aligned}$$

したがって, $J = \frac{1}{u^2 + 1} - \frac{e^{-Tu}}{u^2 + 1} (\cos T + u \sin T)$ となるのでこれを (2.5) に用いれば,

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du - \int_0^{\infty} \frac{e^{-Tu}}{u^2 + 1} (\cos T + u \sin T) du$$

ところが, $\left| \frac{\cos T + u \sin T}{u^2 + 1} \right| \leq \frac{u + 1}{u^2 + 1} \leq 2$ より右辺第二項は,

$$|\text{第二項}| \leq \int_0^{\infty} 2e^{-Tu} du = \frac{2}{T}$$

ゆえに,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = \left[\tan^{-1} u \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

となって, (2.4) は成り立つ.

よってこれより, 次の積分公式が得られる.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.6)$$

次に, (2.3) の右辺を考えれば,

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu(dx) \right) dt \quad (2.7)$$

が成り立つ. ところが,

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right| &\leq \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{-it(a-b)} e^{-itb} - e^{-itb}}{it} \right| \\ &\leq \left| \frac{(e^{-it(a-b)} - 1) e^{-itb}}{it} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{-it(a-b)} - 1}{it} \right| \\ &\leq |a - b| \end{aligned}$$

より $\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right|$ は有界で, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T \left| \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} \right| dt \mu(dx) < \infty$ となるので, (2.7) の右辺にフビニの定理を用いれば

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \mu(dx) \quad (2.8)$$

ここで, $J(T, x, a, b) \equiv \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt$ とおくと,

$$J(T, x, a, b) = 2 \int_0^T \frac{\sin(x-a)t}{t} dt - 2 \int_0^T \frac{\sin(x-b)t}{t} dt \quad (2.9)$$

ゆえに, (2.6) より

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J(T, x, a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ または } b < x \text{ のとき} \\ \pi, & x = a \text{ または } x = b \text{ のとき} \\ 2\pi, & a < x < b \text{ のとき} \end{cases}$$

ところで, (2.9) と (2.6) より $\sup_{x,T} |J(T, x, a, b)| < \infty$ となるので, 有界収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(T, x, a, b) \mu(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} J(T, x, a, b) I_{\partial A}(x) \mu(dx) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} J(T, x, a, b) I_A(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

ところが, 条件より $\mu(\partial A) = 0$ なので右辺の一項目は 0 になる. よって,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(T, x, a, b) \mu(dx) = (2\pi) \mu(A)$$

したがって, (2.8) より (2.3) は成り立つ. ■

反転公式より次の一意性定理を得る.

定理 2.8 (一意性定理) n 次元確率変数 X, Y の分布を μ_X, μ_Y , 特性関数を φ_X, φ_Y とする. $\varphi_X = \varphi_Y$ ならば, $\mu_X = \mu_Y$ となる.

【証明】 \mathcal{C} を $\mu_X(\partial A) + \mu_Y(\partial A) = 0$ となる矩形集合 $A = (-\infty, a]$ の全体とする.

まず, $\mu_X(\{a\}) + \mu_Y(\{a\}) > 0$ となる a はたかだか可算個しかないことを示す. 今,

$$\{a; \mu_X(\{a\}) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a; \mu_X(\{a\}) > 1/n\}$$

が成り立つが, $\{a; \mu_X(\{a\}) > 1/n\}$ をみたま a は n 個以下であるので,

$\{a; \mu_X(\{a\}) > 0\}$ をみたま a はたかだか可算個である. よって, $\mu_X(\{a\}) + \mu_Y(\{a\}) > 0$ をみたま a はたかだか可算個しかない.

したがって, 任意の矩形集合 $B = (-\infty, b]$ は $A_m \in \mathcal{C}$, $m = 1, 2, \dots$ で上から近似できる.

ゆえに, 単調収束定理より

$$\mu_X(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_X(A_m), \quad \mu_Y(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_Y(A_m)$$

が成り立つ. ところが, 条件 $\varphi_X = \varphi_Y$ と反転公式により

$$\mu_X(A_m) = \mu_Y(A_m), \quad m = 1, 2, \dots$$

となる. したがって, $\mu_X(B) = \mu_Y(B)$.

ところが, B は任意だから X と Y の分布関数が等しい. ゆえに, $\mu_X = \mu_Y$ となる. ■

よってこれら 2 つの定理により, 分布とその特性関数が一対一対応になっていることが示される. したがって, 特性関数は分布を特徴づける上で有用な関数である.

2.2 確率測度の収束

この節では、分布の収束について述べる。 $\mu, \mu_k, k = 1, 2, \dots$ を \mathbb{R}^n 上の確率とする。このとき、分布の収束を以下のように定義する。

定義 2.9 任意の有界連続関数 g に対し、 $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) \mu_k(dx_1 \cdots dx_n) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1 \cdots dx_n) \quad (2.10)$$

をみたすとき、 μ_k は μ に収束するといい、 $\mu_k \rightarrow \mu$ とかく。

誤解が生じない限り以下では、このように「 \longrightarrow 」を収束を表わす記号として用い、「 $k \rightarrow \infty$ のとき」などの条件も省略してかくことにする。

定理 2.10 次の条件は互いに同値である。

- (i) $\mu_k \rightarrow \mu$
- (ii) 任意の閉集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Gamma) \leq \mu(\Gamma)$
- (iii) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(G) \geq \mu(G)$
- (iv) $\mu(\partial A) = 0$ となる任意の $A \in \mathcal{B}_n$ に対し、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) = \mu(A)$
- (v) F, F_k を μ, μ_k の分布関数とする。

$$F \text{ の任意の連続点 } x \text{ に対し、 } \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = F(x)$$

- (vi) コンパクトな台をもつ任意の連続関数 f に対し、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \mu_k(dx_1 \cdots dx_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1 \cdots dx_n) \end{aligned}$$

【証明】

() \Rightarrow () : 任意の閉集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ に対し、 $\rho(x, \Gamma) \equiv \inf\{|x - y|; y \in \Gamma\}$ とおき、 $h_j(x) \equiv \left(\frac{1}{1 + \rho(x, \Gamma)}\right)^j$ と定義すれば、 $h_j(x) \searrow I_\Gamma(x)$ となる。したがって、 $h_j(x) \searrow I_\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^1$ をみたす非負連続関数 $h_j, j = 1, 2, \dots$ が存在するので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_j(x) \mu_k(dx) \geq \mu_k(\Gamma)$$

となる。よって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(x) \mu_k(dx) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Gamma)$$

ここで, $b_j \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(x) \mu_k(dx)$ とおけば, $\{b_j\}$ は j について単調減少となり,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} b_j \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Gamma)$$

をみtas. ところが, 条件 () と単調収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} b_j &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(x) \mu(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I_{\Gamma}(x) \mu(dx) = \mu(\Gamma) \end{aligned}$$

ゆえに, $\mu(\Gamma) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Gamma)$ となる.

() と () が同値なことは, 補集合を考えれば明らかである.

() () \Rightarrow (): $A \in B_1$ に対して, A^i を A の内部, \bar{A} を A の閉包とする.

このとき, $A^i \subset A \subset \bar{A}$ で, A^i は開集合, \bar{A} は閉集合であるので, () () より

$$\mu(A^i) \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A^i) \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\bar{A}) \leq \mu(\bar{A}) \quad (2.11)$$

また, $\bar{A} = A^i \cup (\partial A)$ と $\mu(\partial A) = 0$ より,

$$\mu(\bar{A}) \leq \mu(A^i) + \mu(\partial A) = \mu(A^i) \quad (2.12)$$

したがって, (2.11), (2.12) より $\mu(\bar{A}) = \mu(A^i)$ となり, (2.11) の不等号はすべて等号となる. すなわち, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) = \mu(A)$ が成り立つ.

() \Rightarrow (): x を F の任意の連続点とし, $A \equiv (-\infty, x]$ とおく.

このとき, $A^i = (-\infty, x)$ で,

$$\begin{aligned} \mu(\partial A) &= \mu(A) - \mu(A^i) \\ &= F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y) = 0 \end{aligned}$$

となる. ゆえに, A は () の条件をみtas. したがって,

$$F(x) = \mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$$

となって, () は成り立つ.

() \Rightarrow (): まず, f をコンパクトな台をもつ連続関数とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\|f - \tilde{f}\|_{\infty} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon \quad (2.13)$$

をみtas 階段関数 \tilde{f} が選べることを示す. f はコンパクトな台をもつからその集合を K とおけば, 十分大きな $M > 0$ に対して $K \subset [-M, M]$ となるので, f は $[-M, M]$ 上で一様

連続となる．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in [-M, M]$ に対し次が成り立つ．

$$|x - y| < \delta \quad \text{ならば,} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (2.14)$$

今，各 j に対して $|a_j - b_j| < \delta/2$ となるように $\Lambda_j = (a_j, b_j]$ をとり， Λ_j は $\bigcup_{j=1}^l \Lambda_j = [-M, M]$ をみたま互いに素な集合とする．また， $\alpha_j \equiv f(b_j)$ とし， \tilde{f} を次のように定義する．

$$\tilde{f}(x) \equiv \sum_{j=1}^l \alpha_j I_{\Lambda_j}(x)$$

このとき，(2.14) より

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}(x)| &= \sum_{j=1}^l |f(x) - f(b_j)| I_{\Lambda_j}(x) \\ &< \varepsilon \sum_{j=1}^l I_{\Lambda_j}(x) \\ &= \varepsilon I_{[-M, M]}(x) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに，(2.13) をみたま階段関数 \tilde{f} は存在する．

次に， F の連続点の集合は \mathbb{R}^1 で稠密で， Λ_j の端点は F の連続点となるようにできることを示す． F の任意の連続点 x に対して， $A(x) \equiv (-\infty, x]$ とおき， $A(x)$ に対して集合 B を $B \equiv \{x; \mu(\partial A(x)) > 0\}$ と定義する．このとき，

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; \mu(\partial A(x)) > 1/n\}$$

となり， $\{x; \mu(\partial A(x)) > 1/n\}$ をみたま x の個数は n 以下となるので，集合 B の濃度はたかだか可算個である．したがって B^c は \mathbb{R}^1 で稠密となるので， F の連続点の集合は \mathbb{R}^1 で稠密である．

また， Λ_j の端点が F の不連続点でも， F の連続点の集合は \mathbb{R}^1 で稠密だから，区間を少し小さくしてやればそれを連続点にとれるので， Λ_j の端点は F の連続点となるようにできる．

ゆえに， Λ_j の端点が F の連続点になっているとすると次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda_j) &= \mu((-\infty, b_j]) - \mu((-\infty, a_j]) \\ &= F(b_j) - F(a_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{F_k(b_j) - F_k(a_j)\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Lambda_j) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)\mu(dx) &= \sum_{j=1}^l \alpha_j \mu(\Lambda_j) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \alpha_j \mu_k(\Lambda_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)\mu_k(dx) \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる. ゆえに, (2.13) と (2.15) を用いれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 k_0 が存在して, $k \geq k_0$ ならば

$$\begin{aligned} \left| \int f(x)\mu(dx) - \int f(x)\mu_k(dx) \right| &\leq \left| \int f(x)\mu(dx) - \int \tilde{f}(x)\mu(dx) \right| \\ &+ \left| \int \tilde{f}(x)\mu(dx) - \int \tilde{f}(x)\mu_k(dx) \right| + \left| \int \tilde{f}(x)\mu_k(dx) - \int f(x)\mu_k(dx) \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

したがって, () は成り立つ.

() \Rightarrow (): 任意の $a > 0$ に対して, $J_a \equiv [-a, a]$ とおく. J_a 上で 1, J_{a+1}^c 上で 0 となるような $[0, 1]$ の値をとる連続関数を一つ定め, それを f_a とおく. μ は確率より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し十分大きな a をとれば,

$$1 - \mu(J_a) < \varepsilon \quad (2.16)$$

また () より,

$$\begin{aligned} \mu(J_a) &\leq \int I_{J_a}(x)\mu(dx) \leq \int f_a(x)\mu(dx) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_a(x)\mu_k(dx) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int I_{J_{a+1}}(x)\mu_k(dx) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(J_{a+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mu_k(J_{a+1}) \end{aligned}$$

となる. よって, ある番号 n_0 が存在して $k \geq n_0$ ならば,

$$1 - \mu_k(J_{a+1}) < \varepsilon \quad (2.17)$$

が成り立つ. この $\varepsilon > 0$ に対し, このような $a = a(\varepsilon)$ を一つ固定しておく.

有界連続関数 g に対し, gf_a はコンパクトな台をもつ連続関数であるから,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x)f_a(x) + g(x)(1 - f_a(x)) \\ &\leq g(x)f_a(x) + \|g\|_{\infty}(1 - f_a(x)) \end{aligned}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} \left| \int g(x)\mu(dx) - \int g(x)\mu_k(dx) \right| &\leq \left| \int g(x)f_a(x)\mu(dx) - \int g(x)f_a(x)\mu_k(dx) \right| \\ &+ \|g\|_{\infty} \left\{ \int (1 - f_a(x))\mu(dx) + \int (1 - f_a(x))\mu_k(dx) \right\} \end{aligned}$$

となる．ところが，(2.16) と (2.17) より， $k \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} \int (1 - f_a(x))\mu(dx) + \int (1 - f_a(x))\mu_k(dx) &\leq 1 - \mu(J_a) + 1 - \mu_k(J_{a+1}) \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

また，() より任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 k_0 が存在して， $k \geq k_0$ ならば

$$\left| \int g(x)f_a(x)\mu(dx) - \int g(x)f_a(x)\mu_k(dx) \right| < \varepsilon$$

となる．したがって， $j \equiv \max(n_0, k_0)$ とおくと， $k \geq j$ ならば

$$\left| \int g(x)\mu(dx) - \int g(x)\mu_k(dx) \right| < \varepsilon + 2\varepsilon \|g\|_\infty$$

ゆえに， $\mu_k \rightarrow \mu$ である． ■

定理 2.11 \mathcal{M} を \mathbb{R}^n 上の確率を要素とする集合とする． \mathcal{M} 中の任意の無限列が収束部分列をもつための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次をみたす \mathbb{R}^n 上のコンパクト集合 Γ が選べることである．

$$\text{任意の } \mu \in \mathcal{M} \text{ に対し， } \mu(\Gamma) > 1 - \varepsilon \quad (2.18)$$

【証明】(必要性)：背理法で示す． \mathcal{M} 中の任意の無限列が収束部分列をもつとし，かつ適当な $\varepsilon > 0$ をとれば，任意のコンパクト集合 Γ に対し， $\mu(\Gamma) \leq 1 - \varepsilon$ となる $\mu \equiv \mu_\Gamma \in \mathcal{M}$ が選べると仮定する．

$\Gamma_l \equiv [-l, l]$ に対し $\mu_l \equiv \mu_{\Gamma_l}$ とおけば，仮定により無限列 μ_l ， $l = 1, 2, \dots$ は収束部分列 μ_{l_j} ， $j = 1, 2, \dots$ をもつ．

開集合 $G_k \equiv (-k, k)$ に対し， $l_j \geq k$ となる番号 j においては $G_k \subset \Gamma_{l_j}$ となるから， $l_j \geq k$ ならば，

$$\mu_{l_j}(G_k) \leq \mu_{l_j}(\Gamma_{l_j}) \leq 1 - \varepsilon$$

となる．したがって， $\mu_{l_j} \rightarrow \mu$ とすれば μ は \mathcal{M} に属する必要はないが，定理 2.10 () により，任意の k に対して

$$\mu(G_k) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_{l_j}(G_k) \leq 1 - \varepsilon$$

ゆえに，

$$\mu(\mathbb{R}^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_k) \leq 1 - \varepsilon$$

となって，これは μ が確率であることに矛盾する．よって，必要性は成り立つ．

(十分性)：(2.18) が成り立つとき， $\mu_k \in \mathcal{M}$ ， $k = 1, 2, \dots$ が収束部分列をもつことを，Helly の方法により三段階に分けて示す． F_k を μ_k の分布関数とし， $\{a_j; j = 1, 2, \dots\}$ を \mathbb{R}^1 の有理点全体の集合とする．

まず，関数 F を構成する．

$0 \leq F_k(a_j) \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$ となるので， F_k は有界数列であるから， a_j に対し $\{ F_k ; k = 1, 2, \dots \}$ の収束部分列 $\{ F_{k(j,l)} ; l = 1, 2, \dots \}$ が選べるので，その極限を ρ とおき次のようにとる．

$$F_{k(1,l)}(a_1) \longrightarrow \rho(a_1)$$

次に， $\{ k(2, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ は $\{ k(1, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ の部分列となるようにとる．

$$F_{k(2,l)}(a_2) \longrightarrow \rho(a_2)$$

さらに， $\{ k(3, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ は $\{ k(2, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ の部分列となるようにとる．これを繰り返せば，対角要素 $\{ k(l, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ は任意に m を固定したとき， $k(1, 1), \dots, k(m-1, m-1)$ をのぞき $\{ k(m, l) ; l = 1, 2, \dots \}$ の部分列になっている．ゆえに， $F_{k(m,l)}(a_m) \longrightarrow \rho(a_m)$ より

$$F_{k(l,l)}(a_m) \longrightarrow \rho(a_m), \quad m = 1, 2, \dots$$

が成り立つ． $J_x \equiv \{ y \in \mathbb{R}^1 ; y > x \}$ とおき， F を次のように定義する．

$$F(x) \equiv \inf_{a_m \in J_x} \rho(a_m)$$

このとき， $a_{m_j} \searrow x$ となる $a_{m_j} \in J_x$ に対し， $\rho(a_{m_j})$, $j = 1, 2, \dots$ は減少列である．この $\rho(a_{m_j})$, $j = 1, 2, \dots$ に対し，

$$F(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(a_{m_j}) \tag{2.19}$$

となることを示す．任意の $a_p \in J_x$ に対し， l を十分大きくとれば $a_p \geq a_{m_l}$ となるので，

$$\rho(a_p) \geq \rho(a_{m_l}) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(a_{m_j}) \geq \inf_{a_m \in J_x} \rho(a_m) = F(x)$$

したがって， $a_p \in J_x$ に対する下限をとれば，

$$F(x) = \inf_{a_p \in J_x} \rho(a_p) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(a_{m_j}) \geq F(x)$$

ゆえに，(2.19) は成り立つ．

第二段階として， F が分布関数になることを示す．

$h \geq 0$ とし， $a_{m_j} \searrow x$, $a_{p_j} \searrow x+h$, $a_{p_j} \geq a_{m_j}$ となる列 $a_{m_j} \in J_x$, $a_{p_j} \in J_{x+h}$, $j = 1, 2, \dots$ を任意に固定する．このとき， F が定理 1.20 の 3 つの条件をみたすことを確かめればよい．

$a_{p_j} \geq a_{m_j}$ より $0 \leq \rho(a_{p_j}) - \rho(a_{m_j})$ となる．よって，

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} (\rho(a_{p_j}) - \rho(a_{m_j})) \\ &= F(x+h) - F(x) \end{aligned}$$

となり, F は単調性をもつ.

次に, F の右連続性を示す. $k \rightarrow \infty$ のとき $x_k \searrow c$ とすれば, $F(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ は減少列で,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) \geq F(c)$$

となる. ところが, 任意の $a_p \in J_c$ に対し, $a_p \in J_{x_k}$ となる十分大きな番号 k がとれるので,

$$\rho(a_p) \geq \inf_{a_m \in J_{x_k}} \rho(a_m) = F(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) \geq F(c)$$

したがって, $a_p \in J_c$ に対する下限をとれば,

$$F(c) = \inf_{a_p \in J_c} \rho(a_p) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) \geq F(c)$$

ゆえに, $F(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k)$ となって $F(x_k)$ の単調減少性より, F は右連続性をもつ.

また定理の条件 (2.18) により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $A > 0$ を,

$$\sup_k \mu_k([-A, A]^c) < \varepsilon \quad (2.20)$$

をみたすように選べる. よって,

$$a_m < -A \quad \text{ならば,} \quad \sup_l F_{k(l,l)}(a_m) \leq \varepsilon$$

これより, $\rho(a_m) \leq \varepsilon$ となって, $a_m \in J_x$ に対する下限をとれば,

$$F(x) = \inf_{a_m \in J_x} \rho(a_m) \leq \varepsilon$$

ゆえに, $x < -A$ ならば $F(x) \leq \varepsilon$ となる. すなわち, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ が成り立つ.

また, (2.20) より

$$a_m > A \quad \text{ならば,} \quad \inf_l F_{k(l,l)}(a_m) > 1 - \varepsilon$$

となるので, $\rho(a_m) > 1 - \varepsilon$ が成り立つ. ここで $a_m > x > A$ となる x をとり, $a_m \in J_x$ に対する下限をとれば,

$$F(x) = \inf_{a_m \in J_x} \rho(a_m) > 1 - \varepsilon$$

ゆえに, $x > A$ ならば $F(x) > 1 - \varepsilon$ となる. すなわち, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ が成り立つ.

以上より, F は定理 1.20 の3つの性質をみたすので分布関数となる.

最後に, F の任意の連続点 x に対し, $F_{k(l,l)}(x) \rightarrow F(x)$ となることを示す.

x を F の任意の連続点とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $F(x) > F(a_p) - \varepsilon$ となるように $a_p \in J_x$ を選べる. ゆえに, $a_j \in J_{a_p}$ を a_p に十分近くとれば, (2.19) より

$$\begin{aligned} F(x) &> \rho(a_j) - 2\varepsilon \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} F_{k(l,l)}(a_j) - 2\varepsilon \\ &\geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} F_{k(l,l)}(x) - 2\varepsilon \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる．また a_m を， $a_m < x$ かつ $F(x) < F(a_m) + \varepsilon$ となるようにとれば， $a_m < a_j < x$ となる a_j に対し，

$$\begin{aligned} F(x) &< \rho(a_j) + \varepsilon \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} F_{k(l,l)}(a_j) + \varepsilon \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} F_{k(l,l)}(x) + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる．ゆえに，(2.21) と (2.22) により，任意の x に対して $F(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} F_{k(l,l)}(x)$ が成り立つ．

したがって， μ を F に対する確率とすると，定理 2.10 により $\mu_{k(l,l)} \rightarrow \mu$ となり， μ_k ， $k = 1, 2, \dots$ は収束部分列をもつ． ■

この定理より，直ちに次が成り立つ．

系 2.12 μ は \mathbb{R}^n 上の確率で， $\mathcal{M} \equiv \{\mu_k, k = 1, 2, \dots\}$ が定理 2.11 の条件をみたすとす
る． μ_k の任意の収束部分列が μ に収束するならば， $\mu_k \rightarrow \mu$ である．

【証明】 $\mu_k \rightarrow \mu$ が成立しないと仮定すれば，有界連続関数 g と部分列 k_j を，

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu_{k_j}(dx)$ は収束するが，

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu_{k_j}(dx) \neq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu(dx) \quad (2.23)$$

となるように選べる．

ところが，定理 2.11 により $\{\mu_{k_j}; j = 1, 2, \dots\}$ より収束部分列 $\mu_{k_{j_l}}$ ， $l = 1, 2, \dots$ が選べるので， $\mu_{k_{j_l}} \rightarrow \mu$ となる．したがって，

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu_{k_{j_l}}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu(dx)$$

ところが，これは (2.23) に矛盾する．ゆえに， $\mu_k \rightarrow \mu$ となる． ■

2.3 分布の収束と特性関数の収束

分布の収束と特性関数の収束との関連について述べる前に，法則収束の定義をしておく．これは確率変数の収束概念であり，分布の収束に対応した収束である．

定義 2.13 X_k, X を n 次元確率変数とし，それぞれの分布を μ_k, μ とする． $\mu_k \rightarrow \mu$ のとき， X_k は X に法則収束するという．

$\mu_k \rightarrow \mu$ となる条件 (2.10) を書き直せば， X_k が X に法則収束する条件は次のようになる．

$$\text{任意の有界連続関数 } g \text{ に対し， } Eg(X_k) \rightarrow Eg(X)$$

また，確率変数の収束としてほかに概収束が定義されていたが，法則収束は概収束より強い収束概念であるため，一般に， X_k が X に概収束するからといって法則収束するとは限らない。

次に，分布の収束と特性関数の収束を関連づける定理を 2 つ示す。

定理 2.14 φ, φ_k を分布 μ, μ_k の特性関数とする． $\mu_k \rightarrow \mu$ ならば， φ_k は φ に広義一様収束する。

【証明】まず，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，

$$|h| < \delta \quad \text{ならば,} \quad |\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)| < 3\varepsilon \quad (2.24)$$

が，各 k に対して成り立つことを示す． $\mathcal{M} \equiv \{\mu, \mu_k, k = 1, 2, \dots\}$ とおけば， \mathcal{M} の任意の無限列は μ に収束する。

よって，定理 2.11 より任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mu(\Gamma) > 1 - \varepsilon \quad \text{かつ} \quad \inf_k \mu_k(\Gamma) > 1 - \varepsilon \quad (2.25)$$

をみたくコンパクト集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ が選べる．ところが， e^{ihx} は $\{h; |h| \leq 1\} \times \Gamma$ 上で一様連続であるため， $\sup_{x \in \Gamma} |e^{ihx} - 1|$ は単位円内で h の連続関数となる．ゆえに，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|h| < \delta \quad \text{ならば,} \quad \sup_{x \in \Gamma} |e^{ihx} - 1| < \varepsilon \quad (2.26)$$

をみたく $\delta > 0$ が選べる．したがって，(2.25) と (2.26) により，各 k と $|h| < \delta$ となる h に対し，

$$\begin{aligned} |\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^1} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) \mu_k(dx) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^1} |e^{ihx} - 1| \mu_k(dx) \\ &= \int_{\Gamma} |e^{ihx} - 1| \mu_k(dx) + \int_{\Gamma^c} |e^{ihx} - 1| \mu_k(dx) \\ &< \varepsilon + 2\mu_k(\Gamma^c) < 3\varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに，(2.24) は各 k に対して成り立つ。

また， φ に対しても同様の評価が成り立つ．つまり，

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < 3\varepsilon$$

K を \mathbb{R}^1 のコンパクト集合とし， $\{t_1, \dots, t_l\}$ を K の δ -稠密とする．すなわち，任意の $t \in K$ に対し， $|t - t_j| < \delta$ となる $t_j, j = 1, \dots, l$ があるとする． $\mu_k \rightarrow \mu$ となるので，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\varphi_k(t) \rightarrow \varphi(t)$$

となるから，番号 k_0 を

$$k \geq k_0 \quad \text{ならば,} \quad |\varphi_k(t_j) - \varphi(t_j)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, l$$

となるように選べる．ゆえに， $k \geq k_0$ ならば

$$\begin{aligned} \sup_{t \in K} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| &\leq \sum_{j=1}^l \left\{ |\varphi_k(t) - \varphi_k(t_j)| I_{\{|t-t_j| < \delta\}} + |\varphi_k(t_j) - \varphi(t_j)| \right. \\ &\quad \left. + |\varphi(t_j) - \varphi(t)| I_{\{|t-t_j| < \delta\}} \right\} < 7l\varepsilon \end{aligned}$$

したがって ε は任意より， φ_k は φ に K 上で一様収束する． ■

定理 2.15 φ_k を分布 μ_k の特性関数とする． φ_k が φ に各点で収束し， φ が原点で連続であれば， μ_k はある分布 μ に収束して φ は μ の特性関数になる．さらに， φ_k は φ に広義一様収束する．

この定理を示す前に，次の補題を示しておく．

補題 2.16 ν を \mathbb{R}^n 上の分布， ψ を ν の特性関数とする．このとき，任意の $A > 0$ に対し次の不等式が成り立つ．

$$\nu([-4A, 4A]^n) \geq A^n \int_{-A^{-1}2^{-(n-1)/n}}^{A^{-1}2^{-(n-1)/n}} \cdots \int_{-A^{-1}2^{-(n-1)/n}}^{A^{-1}2^{-(n-1)/n}} \psi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n - 1 \quad (2.27)$$

【証明】 $n = 1$ として示す．フビニの定理を用いれば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \psi(t) dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \nu(dx) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T \frac{1}{2T} e^{itx} dt \nu(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Tx}{Tx} \nu(dx) \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで，(2.28) の右辺に対し $|\sin Tx/Tx| \leq 1$. また， $|x| > 2A$ のとき

$$\left| \frac{\sin Tx}{Tx} \right| \leq \frac{1}{T|x|} < \frac{1}{2AT}$$

となるので，この評価を用いれば

$$(2.28) \text{ の右辺} \leq \nu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2AT} (1 - \nu([-2A, 2A]))$$

したがって， $T = A^{-1}$ とおけば (2.28) は，

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \int_{-A^{-1}}^{A^{-1}} \psi(t) dt &\leq \nu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2} (1 - \nu([-2A, 2A])) \\ &\leq \frac{1}{2} \nu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} (\nu([-4A, 4A]) + 1) \end{aligned}$$

よって、この両辺を2倍すれば (2.27) は成り立つ。 ■

【証明】(定理 2.15)

今、任意の $\delta > 0$ に対して $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k(t) dt$, $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt$ は実数である。よって、任意の $\delta > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k(t) dt \geq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| dt \quad (2.29)$$

が成り立つ。

次に、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 k_0 が存在して、 $k \geq k_0$ ならば

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k(t) dt \geq 1 - 2\varepsilon \quad (2.30)$$

となることを示す。定理の条件より $\varphi(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(0) = 1$ で、 φ は原点 $t = 0$ で連続だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ を

$$|t| < \delta \quad \text{ならば} \quad |\varphi(t) - 1| < \varepsilon$$

となるように選べる。また φ_k が φ に各点で収束し、 $|\varphi_k(t)| \leq 1$ であるから、この δ を固定しルベーグの収束定理を用いれば、ある番号 k_0 が存在して、 $k \geq k_0$ ならば

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| dt < \varepsilon \quad (2.31)$$

とできる。また、

$$\begin{aligned} 2\delta - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt &= \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi(t)) dt \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |1 - \varphi(t)| dt \\ &\leq \varepsilon(2\delta) \end{aligned}$$

となるので、次が成り立つ。

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt \geq 2\delta(1 - \varepsilon) \quad (2.32)$$

ゆえに、(2.31) と (2.32) の評価を (2.29) の右辺に用いれば、(2.30) は成り立つ。

次に、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\inf_k \mu_k([-A, A]) > 1 - 4\varepsilon \quad (2.33)$$

をみたく $\tilde{A} > 0$ が存在することを示す。補題 2.16 の (2.27) において $n = 1$, $\nu = \mu_k$, $\psi = \varphi_k$, $A = \delta^{-1}$ とすれば、

$$\mu_k([-4A, 4A]) \geq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k(t) dt - 1$$

したがって, (2.30) より $k \geq k_0$ ならば

$$\mu_k([-4A, 4A]) \geq 2(1 - 2\varepsilon) - 1 = 1 - 4\varepsilon$$

となる. ところが, μ_j は確率であるから

$$\mu_j([-A_j, A_j]) > 1 - 4\varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, k_0 - 1$$

となるように A_j がとれるので, $\tilde{A} \equiv \max(A_1, \dots, A_{k_0-1}, 4A)$ とおけば, (2.33) は成り立つ.

ゆえに, 定理 2.11 より μ_k , $k = 1, 2, \dots$ は収束部分列 μ_{k_j} , $j = 1, 2, \dots$ をもつ. よって, ある分布 μ が存在して $\mu_{k_j} \rightarrow \mu$ とすれば, 特性関数 φ_{k_j} は μ の特性関数に収束する. ところが, 条件により φ_{k_j} は φ に収束するので, 一意性定理より μ の特性関数は φ と一致する.

今, μ_{k_l} を μ_k の別の収束部分列とし, ある分布 ν に対し $\mu_{k_l} \rightarrow \nu$ が成り立つとする. φ_{k_l} は φ に収束するので, ν の特性関数は φ である. したがって, 一意性定理により $\nu = \mu$ となる.

ゆえに, $\mathcal{M} \equiv \{\mu_k, k = 1, 2, \dots\}$ は定理 2.11 の条件をみたし, μ_k の任意の収束部分列が μ に収束するので, 系 2.12 により $\mu_k \rightarrow \mu$ となる.

さらに, 定理 2.14 により φ_k は φ に広義一様収束する. ■

この定理には 2 つの重要な結果が含まれている. それは, φ_k の各点での収束性と収束した関数 φ の原点での連続性という条件のみで, φ が特性関数であることが示されたことと, 特性関数の収束が分布の収束と一対一対応で関連づけられたことである. したがって, 分布の収束を考える上でこの定理は非常に大きな役割を果たすことになる.

第3章 独立確率変数の極限定理

この章では、0-1法則、大数の法則、中心極限定理について述べ、4節で、本論文の主題となる問題について考察する。大数の法則や中心極限定理は、よく知られた独立確率変数の和に関する極限定理であるが、これらは本論文において主題となる問題に属している。

本論文において極限定理とは、確率変数列の法則収束、概収束に関する諸結果をさしているが、確率変数列が独立な場合、これらの収束は同等になることが知られている。したがって本論文では主に、独立確率変数列が法則収束する場合について考察する。

3.1 コルモゴロフの 0-1 法則

$\mathcal{B}_j, j = 1, 2, \dots$ を \mathcal{F} の部分 σ -加法族とする。 $\sigma_k \equiv \sigma\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \mathcal{B}_j\right)$ とおけば、 σ_k は k につき減少する。極限の σ -加法族 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ に属する集合を、 $\{\mathcal{B}_j, j = 1, 2, \dots\}$ に関する末尾事象、 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ -可測な関数を末尾関数という。

特に、 $\xi_j, j = 1, 2, \dots$ を確率変数としたとき、 $\mathcal{B}_j = \sigma(\xi_j), j = 1, 2, \dots$ となる場合、 $\{\xi_j, j = 1, 2, \dots\}$ に関する末尾事象、末尾関数という。

例 3.1 事象列 $\Lambda_j \in \mathcal{B}_j, j = 1, 2, \dots$ に対し、 $\underline{\lim} \Lambda_k, \overline{\lim} \Lambda_k$ は末尾事象である。

また、 ξ_j が 0 に収束する ω 全体の集合 $\Lambda \equiv \{\omega; \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j(\omega) = 0\}$ も末尾事象となる。

大ざっぱに言えば、番号 k を任意に固定したとき、考えている事象 Λ が ξ_1, \dots, ξ_k に無関係になれば、 Λ は末尾事象である。

独立 σ -加法族の末尾事象に対し、次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (コルモゴロフの 0-1 法則) $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots$ を独立な σ -加法族とする。 $\{\mathcal{B}_j, j = 1, 2, \dots\}$ に関する末尾事象の確率は 0 または 1 である。

【証明】 $\mathcal{F}_k \equiv \sigma\left(\bigcup_{j=1}^k \mathcal{B}_j\right)$ とおけば、 \mathcal{F}_k は増大事象列である。さらに、 $\mathcal{C} \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$ とおくと、 $\mathcal{C} = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j\right)$ となり、 \mathcal{C} は $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j\right)$ となる加法族である。

Λ を $\{\mathcal{B}_j, j = 1, 2, \dots\}$ に関する末尾事象とする。
すなわち, 任意の k に対し $\Lambda \in \sigma\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \mathcal{B}_j\right)$ とすると, $\Lambda \in \sigma(\mathcal{C})$ となる。よって, 定理 1.11 により任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次をみたす $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{C}$ が存在する。

$$P((\Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon) \cup (\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda)) < \varepsilon \quad (3.1)$$

これより, ある l に対し $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{F}_l = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^l \mathcal{B}_j\right)$ とする。 Λ が末尾事象であるから,

$$\Lambda \in \sigma_{l+1} = \sigma\left(\bigcup_{j=l+1}^{\infty} \mathcal{B}_j\right)$$

となる。ゆえに, 例 1.33 により Λ_ε と Λ は独立となる。

したがって, (3.1) より

$$\begin{aligned} P(\Lambda) &= P(\Lambda \cap \Lambda) \leq P(\Lambda \cap \Lambda_\varepsilon) + P((\Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon) \cup (\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda)) \\ &\leq P(\Lambda)P(\Lambda_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq P(\Lambda)(P(\Lambda) + P((\Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon) \cup (\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda))) + \varepsilon \\ &\leq P(\Lambda)^2 + P(\Lambda)P((\Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon) \cup (\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda)) + \varepsilon \\ &\leq P(\Lambda)^2 + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ところが ε は任意だったので, $P(\Lambda) - P(\Lambda)^2 \leq 0$ となる。したがって,

$$P(\Lambda)(1 - P(\Lambda)) = 0$$

ゆえに, $P(\Lambda)$ は 0 または 1 である。 ■

定理 3.3 独立な σ -加法族に関する末尾関数 X は定数である。つまり, $P(X = c) = 1$ となる定数 c が存在する。

【証明】 X の分布関数を F とし, $F(x-) \equiv \lim_{y \nearrow x} F(y)$ とおく。すなわち, $F(x-)$ は x における F の左極限とする。

$\sigma(X)$ の定義より, $X^{-1}((-\infty, x]) \in \sigma(X)$ となるので, 事象 $X^{-1}((-\infty, x])$ は末尾事象である。

よって, コルモゴロフの 0-1 法則より, $F(x) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$ は 0 または 1 である。ところが, F は分布関数であるから,

$$c \equiv \sup\{x \in \mathbb{R}^1; F(x) = 0\}$$

とおけば, $c < \infty$ かつ $F(c-) = 0, F(c) = 1$ となる。ゆえに, $P(X = c) = 1$ である。 ■

例 3.4 $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ を独立確率変数とし, 各 ω に対して $\xi_i(\omega), i = 1, 2, \dots$ は, 有限確定値をとるとする. $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \infty$ なる正数列 b_n を任意に固定したとき, $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{b_n}$ が収束する確率は 0 または 1 である. さらに, この確率が 1 で, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ は定数である.

【証明】 $1 \leq k \leq n$ となる k を任意に固定する. $X_n^{(k)} = \sum_{i=k}^n \frac{\xi_i}{b_n}$ とおけば, $n \rightarrow \infty$ のとき, $Y_n - X_n^{(k)} = (\xi_1 + \dots + \xi_{k-1})/b_n$ は, $(\xi_1 + \dots + \xi_{k-1})/\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ に概収束する. さらに, $n \rightarrow \infty$ のとき, $X_n^{(k)}(\omega)$ が収束する ω 全体を Λ_k とおけば,

$$\Lambda_k = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{N=k}^{\infty} \bigcap_{n,m=N}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; |X_n^{(k)}(\omega) - X_m^{(k)}(\omega)| < \frac{1}{p} \right\}$$

となる. したがって,

$$\Lambda_k \in \sigma\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \sigma(\xi_j)\right)$$

ゆえに, $\overline{\lim} \Lambda_k$ は末尾事象である.

次に, $Y_n(\omega)$ が収束する ω 全体を Λ とおけば, $P(\Lambda_k \Delta \Lambda) = 0$ であることを示す.

ここで, $(Y_n - X_n^{(k)})(\omega)$ が $(\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{k-1}(\omega))/\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ に収束する ω 全体を Γ_k とおく. Λ_k と Λ の対称差の定義より,

$$P(\Lambda_k \Delta \Lambda) = P(\Lambda_k \cap \Lambda^c) + P(\Lambda_k^c \cap \Lambda)$$

となるので, $\omega \in \Lambda_k \cap \Lambda^c$ とすると, $\omega \in \Gamma_k^c$ となって, $P(\Lambda_k \cap \Lambda^c) = 0$ となる. 同様にして, $P(\Lambda_k^c \cap \Lambda) = 0$ となり, $P(\Lambda_k \Delta \Lambda) = 0$ が成り立つ.

次に, $P(\overline{\lim} \Lambda_k \Delta \Lambda) = 0$ となることを示す.

$\omega \in \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j \geq k} \Lambda_j\right) \Delta \Lambda$ とすると, $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda_k \Delta \Lambda)$ となる. したがって,

$$P(\overline{\lim} \Lambda_k \Delta \Lambda) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda_k \Delta \Lambda)\right) = 0$$

ところが, $\overline{\lim} \Lambda_k$ は末尾事象より $P(\overline{\lim} \Lambda_k)$ は 0 または 1 である. ゆえに, $P(\Lambda)$ は 0 または 1 となる.

次に, 主張の後半部分を示す.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき Y_n が概収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(k)}$ となる. ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(k)}$ は, 任意の k に対して σ_k -可測である. よって,

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R}^1 \text{ に対し, } \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \leq a \right\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(k)} \leq a \right\} \in \sigma_k$$

が, 任意の k に対して成り立つ. ゆえに, $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ は末尾関数となり, 定理 3.3 より $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ は定数となる. ■

3.2 大数の法則

独立確率変数列 $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ の算術平均 $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n$ が収束する事象は末尾事象となり, 収束した場合の極限関数は定数であることを前節の例 3.4 で示した. この節では, 算術平均が確率 1 で収束する条件をのべる. それを一般的に示したものが, コルモゴロフの大数の法則である.

まず, 独立確率変数の和に関するコルモゴロフの不等式を述べる.

定理 3.5 (コルモゴロフの不等式) $S_i \equiv \xi_1 + \dots + \xi_i$ とおく. 独立確率変数 $\xi_i, i = 1, \dots, n$ が, $E\xi_i = 0, i = 1, \dots, n$ であれば次が成り立つ.

$$P(\max_{i \leq n} |S_i| \geq a) \leq \frac{ES_n^2}{a^2}, \quad a > 0$$

【証明】 $ES_n^2 < \infty$ として示せばいいので, $E\xi_i^2 \equiv v_i < \infty, i = 1, \dots, n$ とおく.

$$\Lambda \equiv \{ \omega \in \Omega ; \max_{i \leq n} |S_i(\omega)| \geq a \}$$

とおき, $i = 1, \dots, n$ に対して Λ_i を以下のように定義する.

$$\Lambda_i \equiv \{ \omega \in \Omega ; |S_1(\omega)| < a, \dots, |S_{i-1}(\omega)| < a, |S_i(\omega)| \geq a \}$$

このとき, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ は互いに素で, $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i = \Lambda$ となる. また,

$$\begin{aligned} ES_n^2 &\geq E(S_n^2; \Lambda) = \sum_{i=1}^n E(S_n^2; \Lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^n E((S_i + \xi_{i+1} + \dots + \xi_n)^2; \Lambda_i) \\ &= \sum_{j=i}^n \{ E(S_i^2; \Lambda_i) + 2E(S_i(\xi_{i+1} + \dots + \xi_n); \Lambda_i) \\ &\quad + E((\xi_{i+1} + \dots + \xi_n)^2; \Lambda_i) \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで, $S_i I_{\Lambda_i}$ は (ξ_1, \dots, ξ_i) のボレル関数であり, $\xi_{i+1} + \dots + \xi_n$ と独立になるから,

$$\begin{aligned} E(S_i(\xi_{i+1} + \dots + \xi_n); \Lambda_i) &= E[S_i I_{\Lambda_i}(\xi_{i+1} + \dots + \xi_n)] \\ &= E[S_i I_{\Lambda_i}] E[(\xi_{i+1} + \dots + \xi_n)] = 0 \end{aligned}$$

さらに, (3.2) の右辺の第三項は非負であり, Λ_i 上では $|S_i| \geq a$ となるから

$$ES_n^2 \geq \sum_{i=1}^n E(S_i^2; \Lambda_i) \geq a^2 \sum_{i=1}^n P(\Lambda_i) = a^2 P(\Lambda)$$

したがって、コルモゴロフの不等式は成り立つ。 ■

次に、コルモゴロフの不等式を用いて、独立確率変数の和が概収束する条件をあげるが、その前に、事象列に関する重要な定理を準備しておく。

定理 3.6 (ボレル - カンテリの第一定理) 事象列 $\Lambda_n, n = 1, 2, \dots$ に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\Lambda_k) < \infty \quad \text{ならば,} \quad P(\overline{\lim} \Lambda_k) = 0$$

定理 3.7 $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ が独立で、 $E\xi_i = 0, i = 1, 2, \dots$ 、 $\sum_{i=1}^{\infty} V(\xi_i) < \infty$ であれば、 $S_n \equiv \xi_1 + \dots + \xi_n$ は概収束する。

【証明】まず、 Λ_k を次のようにおき、 $\sum_{k=1}^{\infty} P(\Lambda_k) < \infty$ となることを示す。

$$\Lambda_k \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{p_n \leq n} |S_n - S_{p_n}| \geq \frac{1}{2^k} \right\}$$

$v_i \equiv V(\xi_i), i = 1, 2, \dots$ とおけば、 $E\xi_i = 0$ より $u < t$ とすると、

$$\begin{aligned} E(S_t - S_u)^2 &= E(\xi_{u+1} + \dots + \xi_t)^2 = V(\xi_{u+1} + \dots + \xi_t) \\ &= \sum_{i=u+1}^t V(\xi_i) = \sum_{i=u+1}^t v_i \leq \sum_{i=u}^t v_i \end{aligned}$$

となる。ここで、番号 p_n を

$$\sum_{i=p_n}^{\infty} v_i < \left(\frac{1}{2^k}\right)^3$$

となるように選ぶ。 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i < \infty$ より、 $p_n \nearrow \infty$ としておいてよい。コルモゴロフの不等式を用いれば次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(\Lambda_k) &= \lim_{l \rightarrow \infty} P\left(\max_{p_n \leq n \leq l} |S_n - S_{p_n}| \geq \frac{1}{2^k} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} P\left(\max_{n-p_n \leq l-p_n} |S_n - S_{p_n}| \geq \frac{1}{2^k} \right) \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} 2^{2k} E(S_l - S_{p_n})^2 \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} 2^{2k} \sum_{i=p_n}^l v_i = 2^{2k} \sum_{i=p_n}^{\infty} v_i < \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\sum_{k=1}^{\infty} P(\Lambda_k) < \infty$ となる。

したがって、ボレル - カンテリの第一定理より $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \Lambda_j\right) = 0$. つまり,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} \Lambda_j^c\right) = 1$$

となる . ゆえに , ある番号 $K = K(\omega)$ を

$$k \geq K \quad \text{ならば} , \quad \omega \in \Lambda_k^c$$

をみたすように選べる . したがって , $n, m \geq p_n \geq K(\omega)$ ならば

$$\begin{aligned} |S_n(\omega) - S_m(\omega)| &\leq |S_n(\omega) - S_{p_n}(\omega)| + |S_{p_n}(\omega) - S_m(\omega)| \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} \end{aligned}$$

となる . よって , 数列 $\{S_n(\omega)\}$, $n = 1, 2, \dots$ はコーシー列となるので収束する .

ゆえに , $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega)$ は存在する . つまり , S_n は概収束する . ■

算術平均が概収束する条件をあげる前に , 次の補題を示しておく .

補題 3.8 $u_i (> 0)$ を ∞ への増大数列とする .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{u_i}$ が有限確定値として存在すれば , $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i = 0$ となる .

【証明】 $y_n \equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{u_i}$, $v_i \equiv u_i - u_{i-1}$, $v_0 \equiv 0$ とおくと次が成り立つ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n u_i (y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i v_j (y_i - y_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n v_j (y_i - y_{i-1}) = \sum_{j=1}^n v_j (y_n - y_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^p v_j (y_n - y_{j-1}) + \sum_{j=p+1}^n v_j (y_n - y_{j-1}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

今 , y_n は収束列であるので有界になる . よって , $|y_n| \leq K$, $n = 1, 2, \dots$ とおけば (3.3) の右辺は ,

$$\begin{aligned} |\text{第一項}| &\leq 2K u_p \\ |\text{第二項}| &\leq \max_{p \leq i \leq n} |y_n - y_i| \sum_{j=p+1}^n v_j \\ &\leq \max_{p \leq i \leq n} |y_n - y_i| (u_n - u_p) \\ &\leq \max_{p \leq i \leq n} |y_n - y_i| u_n \end{aligned}$$

となる．さらに， y_n は収束数列のためコーシー列であるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{p < n < m} |y_n - y_m| < \varepsilon$$

をみたく $p > 0$ が存在する．

したがってこのような p を固定して， $\frac{2Ku_p}{u_{n_0}} < \varepsilon$ となるような番号 n_0 をとれば， u_i の増大性により， $n \geq n_0$ ならば

$$\left| u_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \right| < \frac{2Ku_p}{u_n} + \max_{p \leq i \leq n} |y_n - y_i| < 2\varepsilon$$

となる．ゆえに， $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i = 0$ となる． ■

定理 3.9 独立確率変数 ξ_i ， $i = 1, 2, \dots$ が， $E\xi_i = 0$ ， $i = 1, 2, \dots$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E\xi_i^2}{i^2} < \infty$

をみたくならば， $\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{n}$ は 0 に概収束する．

【証明】 $\eta_i \equiv \frac{\xi_i}{i}$ とおけば， η_i は定理 3.7 の条件をみたく独立確率変数である．

ゆえに， $\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{i}$ は概収束する．

ところが補題 3.8 により， $\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{i}(\omega)$ が収束する ω に対し， $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)$ は 0 に収束する．したがって， $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$ は 0 に概収束する． ■

定理 3.9 より，コルモゴロフの大数の法則が得られる．

定理 3.10 (コルモゴロフの大数の法則) ξ_i ， $i = 1, 2, \dots$ を独立確率変数とする．各 i に対し， $E\xi_i \equiv a (< \infty)$ ， $V(\xi_i) < \infty$ とすれば， $\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{n}$ は a に概収束する．

【証明】 $\eta_i \equiv \xi_i - a$ とおけば， η_i は定理 3.9 の条件をみたく独立確率変数である．したがって， $n^{-1} \sum_{i=1}^n \eta_i$ は 0 に概収束する．よって， $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$ は a に概収束する． ■

3.3 中心極限定理

前節で，独立確率変数の算術平均 $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n$ が定数に収束することを示した．この節では，中心極限定理について述べる．この定理は，独立確率変数に関する極限定理の代表的かつ基本的な定理である．

まず，一般的な枠組みにおける中心極限定理を示す．

定理 3.11 (中心極限定理) 各 n に対し, $\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ は独立確率変数で, $E\xi_{n,i} = 0$, $\sum_{i=1}^n V(\xi_{n,i}) = 1$ とする. このとき, 次の条件 (L) の下で, $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ の分布は $N(0, 1)$ に収束する.

$$(L) \quad \text{任意の } \tau > 0 \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\tau) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E(\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| > \tau) = 0$$

【証明】 $\varphi_{n,i}$, φ_{S_n} をそれぞれ $\xi_{n,i}$, S_n の特性関数とすれば, $\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ は独立だから定理 2.3 より, $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{n,i}(t)$ が成り立つ. また, $N(0, 1)$ の特性関数を φ とすると, 例 2.6 より $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ となる. よって, S_n の分布が $N(0, 1)$ に収束するには, 定理 2.15 により, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\prod_{i=1}^n \varphi_{n,i}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3.4)$$

が成り立つことを示せばよい.

まず, 指数関数のテイラー展開より, 任意の $a \in \mathbb{R}^1$ に対し次の不等式が成り立つ.

$$|e^{ia} - 1| \leq |a| \quad (3.5)$$

$$|e^{ia} - 1 - ia| \leq \frac{a^2}{2} \quad (3.6)$$

$$\left| e^{ia} - 1 - ia + \frac{a^2}{2} \right| \leq \frac{|a|^3}{6} \quad (3.7)$$

次に, $n \rightarrow \infty$ のとき, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\max_{i \leq n} |1 - \varphi_{n,i}(t)| \longrightarrow 0 \quad (3.8)$$

となることを示す. 各 n に対し $E\xi_{n,i} = 0$ と (3.6) より,

$$|\varphi_{n,i}(t) - 1| = |E(e^{it\xi_{n,i}} - 1)| = |E(e^{it\xi_{n,i}} - 1 - it\xi_{n,i})| \leq \frac{t^2}{2} E\xi_{n,i}^2 = \frac{t^2}{2} V(\xi_{n,i})$$

ところが, 任意の $\tau > 0$ と $i = 1, \dots, n$ に対して

$$V(\xi_{n,i}) = E\xi_{n,i}^2 = E(\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| > \tau) + E(\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| \leq \tau) \leq L_n(\tau) + \tau^2$$

が成り立つ. ゆえに, $i = 1, \dots, n$ に対して $|\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}(L_n(\tau) + \tau^2)$ となるので,

$$\max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}(L_n(\tau) + \tau^2)$$

ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\tau^2 \leq \varepsilon$ となる τ を一つ固定する. また, 条件 (L) によりある番号 n_0 が存在して,

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば, } L_n(\tau) < \varepsilon$$

とできる．したがって， $n \geq n_0$ ならば

$$\max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq t^2 \varepsilon$$

となる．ゆえに， $n \rightarrow \infty$ のとき，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し (3.8) は成り立つ．

次に，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi_{S_n}(t) - \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) \right\} \right| = 0 \quad (3.9)$$

となることを示す． $|e^{(\varphi_{n,i}(t)-1)}| \leq 1$ ， $|\varphi_{n,i}(t)| \leq 1$ より，

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{S_n}(t) - \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) \right\} \right| &= \left| \prod_{i=1}^n \varphi_{n,i}(t) - \prod_{i=1}^n e^{(\varphi_{n,i}(t)-1)} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi_{n,i}(t) - e^{(\varphi_{n,i}(t)-1)}| \\ &= \sum_{i=1}^n |(\varphi_{n,i}(t) - 1) + 1 - e^{(\varphi_{n,i}(t)-1)}| \end{aligned}$$

また，指数関数のテイラー展開よりある定数 $C > 0$ が存在して， $|z| \leq 1$ となる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し， $|e^{z-1} - 1 - (z-1)| \leq C|z-1|^2$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{S_n}(t) - \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) \right\} \right| &\leq C \sum_{i=1}^n |\varphi_{n,i}(t) - 1|^2 \\ &\leq C \max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \times \sum_{i=1}^n |\varphi_{n,i}(t) - 1| \\ &= C \max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \times \sum_{i=1}^n |E(e^{it\xi_{n,i}} - 1 - it\xi_{n,i})| \end{aligned}$$

ここで (3.6) と， $\sum_{i=1}^n E\xi_{n,i}^2 = \sum_{i=1}^n V(\xi_{n,i}) = 1$ より，

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{S_n}(t) - \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) \right\} \right| &\leq C \max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \times \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n E\xi_{n,i}^2 \\ &= \frac{t^2}{2} C \max_{i \leq n} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって， $n \rightarrow \infty$ のとき両辺の極限をとると (3.8) より，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し (3.9) が成り立つ．

次に，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) \right\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3.10)$$

が成り立つことを示す． $\rho_n(t) \equiv \sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1) + \frac{t^2}{2}$ とおくと，定理の条件 $E\xi_{n,i} = 0$ と $\sum_{i=1}^n V(\xi_{n,i}) = 1$ により， $\rho_n(t) = \sum_{i=1}^n E(e^{it\xi_{n,i}} - 1 - it\xi_{n,i} + \frac{t^2}{2}\xi_{n,i}^2)$ となる．ゆえに，

$$|\rho_n(t)| \leq \sum_{i=1}^n \left| E(e^{it\xi_{n,i}} - 1 - it\xi_{n,i} + \frac{t^2}{2}\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| \leq \tau) \right| \\ + \sum_{i=1}^n \left| E(e^{it\xi_{n,i}} - 1 - it\xi_{n,i} + \frac{t^2}{2}\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| > \tau) \right|$$

この右辺第一項に (3.7)，第二項には (3.6) を用いれば，

$$\text{第一項} \leq \sum_{i=1}^n E\left(\frac{|t\xi_{n,i}|^3}{6}; |\xi_{n,i}| \leq \tau\right) \leq \frac{|t|^3}{6} \tau \sum_{i=1}^n E\xi_{n,i}^2 = \frac{|t|^3}{6} \tau \\ \text{第二項} \leq \sum_{i=1}^n E(t^2\xi_{n,i}^2; |\xi_{n,i}| > \tau) = t^2 L_n(\tau)$$

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し， $\tau = 3\varepsilon/|t|^3$ とすれば，第一項 $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

さらに，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し十分大きな番号 n をとれば，条件 (L) により $t^2 L_n(\tau) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ゆえに， $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = 0$ が成り立つ．よって，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\rho_n(t)} = 1$$

ところが， $e^{\rho_n(t)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n (\varphi_{n,i}(t) - 1)\right\} \times e^{\frac{t^2}{2}}$ とかける．ゆえに，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し (3.10) は成り立つ．

したがって，(3.9) と (3.10) により任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して (3.4) が成り立つので， S_n の分布は $N(0, 1)$ に収束する． ■

この結果において重要なことは，各確率変数 $\xi_{n,i}$ の分布が既定されていないことである．すなわちこの定理は， $\xi_{n,i}$ の分布がどのようなものであれ，条件 (L) をみたせば， S_n の分布が常に標準正規分布に収束することを示している．それゆえ中心極限定理は，統計学においても非常に重要な役割を果たしている．

系 3.12 $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ を独立で，同分布をもつ確率変数列とする． $V(\xi_1) \equiv v$ とおき， $E|\xi_1|^2 < \infty$ とする．このとき， $\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - E\xi_i}{\sqrt{nv}}$ の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に収束する．

系 3.12 は，定理 3.11 で述べた中心極限定理に含まれる結果である．なぜならば，系 3.12 において， $\xi_{n,i} \equiv \frac{\xi_i - E\xi_i}{\sqrt{nv}}$ ， $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ とおく．このとき， $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ が独立同分布確率変数であることより，各 n に対して $\xi_{n,i}, i = 1, \dots, n$ は独立で， $E\xi_{n,i} = 0$ ，

$\sum_{i=1}^n V(\xi_{n,i}) = 1$ をみたす確率変数である．この場合，条件 (L) は必然的にみたされているので，系 3.12 は定理 3.11 から得られる結果である．

3.4 無限分解可能な分布

ここでは，以下の問題について考察する．この問題を考察し，その結果を導くことが本論文の主題である．

問題 各 n に対して， $\xi_{n,i}$ ， $i = 1, \dots, n$ は独立で，同分布をもつ確率変数列とする． $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ が， $n \rightarrow \infty$ のとき法則収束するならば，その極限分布はどのようなものであるか．

大数の法則において， ξ_i ， $i = 1, 2, \dots$ を独立で，同分布をもつ確率変数とし， $\xi_{n,i} \equiv \frac{\xi_i}{n}$ ， $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ とおく．このとき， S_n が $n \rightarrow \infty$ のとき法則収束すれば，その極限分布は単位分布 $\delta_{\{E\xi_1\}}$ である．また，中心極限定理においても， S_n が法則収束すれば，その極限分布は標準正規分布であるということが具体的にわかる．したがってこれらは，この問題に属する結果である．

では，一般の場合ではその極限分布はどうなっているだろうか．それに対する答えは 20 世紀半ばごろ，レヴィ，コルモゴロフらによって得られ，その極限分布は無限分解可能な分布 (infinitely divisible distribution) になることが示された．以下ではそれについて議論する．

まず，無限分解可能な分布について定義する．その後，上記の問題に対する解答を定理 3.14 として述べ，定理 3.18，定理 3.19 を用いて示す．これらは，本論文での主要な結果である．

定義 3.13 μ を \mathbb{R}^1 上の分布， φ を μ の特性関数とする．任意の $n = 1, 2, \dots$ に対し，

$$\varphi(t) = ({}_n\varphi(t))^n, \quad t \in \mathbb{R}^1 \quad (3.11)$$

をみたす特性関数 ${}_n\varphi$ が存在するとき， φ を無限分解可能な特性関数， μ を無限分解可能な分布という．

すなわち， μ が無限分解可能な分布であるとは，適当な確率空間上に，同じ分布をもつ独立確率変数 Y_1, \dots, Y_n を， $\sum_{i=1}^n Y_i$ の分布が μ となるように構成できることである．

定理 3.14 各 n に対して, $\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ は独立で, 同分布をもつ確率変数列とする. $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$ が, $n \rightarrow \infty$ のとき法則収束するならば, その極限分布は無分解可能な分布である. さらに, その極限分布の特性関数を φ とおくと, 実数 α と \mathbb{R}^1 上の有界測度 ν が存在して, φ は次のように表現できる.

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right\}$$

この定理の前半と, 大数の法則・中心極限定理の結果を比べれば, 確かに, 極限分布である単位分布, 標準正規分布は, その特性関数が共に指数関数の形でかけているので, 無分解可能な分布である. また定理の後半部分の結果に対しても, 単位分布の場合 α を $E\xi_1$, 測度 ν を $\nu = 0$ とみれば, その特性関数は上記の形で書き表せる. 中心極限定理の場合においても, $\alpha = 0$, 測度 ν を $\delta_{\{0\}}$ とすれば同様のことがいえる. したがって, これらはこの定理をみたしている.

この定理を示すための準備として, まず, 複素数値関数に対する 2 つの命題を示す.

命題 3.15 f は \mathbb{R}^1 上の連続な複素数値関数で, $f(0) = 1$ とする. $[-T, T]$ 上で f が 0 にならなければ, 任意の $t \in [-T, T]$ に対して

$$\lambda(0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f(t) = e^{\lambda(t)} \quad (3.12)$$

をみたす連続関数 $\lambda(t)$ が一意的存在する. さらに, f が $(-\infty, \infty)$ 上で 0 にならなければ, (3.12) は $(-\infty, \infty)$ 上で成り立つ.

【証明】まず, $z = 1$ において 0 となる対数関数 L を, 複素平面上の閉領域 $\{z; |z-1| \leq 1/2\}$ において, 以下のように定義する.

$$L(z) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (z-1)^j \quad (3.13)$$

このとき, L は

$$L(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad e^{L(z)} = z \quad (3.14)$$

をみたす連続関数になることを示す. L の定義より, L は絶対一様収束するから連続関数で, $L(1) = 0$ をみたす. 今, 点 1 を点 z に結ぶ曲線を c とする. ただし c は 0 を通らないものとし, 関数 $1/z$ の c に沿う積分を次のように定義する.

$$\tilde{L}(z) \equiv \int_c \frac{dz}{z} \equiv \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

このとき，曲線 c のとり方によらず $\tilde{L}(z) = \log |z| + i \arg z$ となる．

また， $\frac{1}{\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\zeta - 1)^k$ より，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\tilde{L}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_1^z (\zeta - 1)^k d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - 1)^{k+1}}{k + 1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z - 1)^j}{j} = L(z)\end{aligned}$$

ゆえに， $e^{L(z)} = e^{\tilde{L}(z)} = e^{\log |z| + i \arg z} = z$ となり， L は (3.14) をみたす連続関数である．

次に，ある $\delta > 0$ が存在して， $[-\delta, \delta]$ 上で (3.12) をみたす連続関数 λ が存在することを示す． f は $[-T, T]$ 上で一様連続だから， $\rho \equiv \inf_{|t| \leq T} |f(t)| > 0$ とおけば，任意の $t, s \in [-T, T]$ に対し，

$$|t - s| \leq \delta \quad \text{ならば} \quad |f(t) - f(s)| \leq \min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

をみたす $\delta > 0$ が存在する．したがって，

$$\lambda(t) \equiv L(f(t)), \quad |t| < \delta$$

とおけば， $|f(t) - f(0)| \leq 1/2$ となるので， λ は $[-\delta, \delta]$ 上で (3.12) をみたす連続関数である．

次に， $[\delta, 2\delta]$ 上で (3.12) をみたす連続関数 λ が存在することを示す． $g(s) \equiv f(s + \delta)/f(\delta)$ とおけば $g(0) = 1$ であり， $|s| \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|g(s) - g(0)| &= |f(s + \delta)/f(\delta) - 1| \\ &= \left| \frac{f(s + \delta) - f(\delta)}{f(\delta)} \right| \\ &\leq \frac{\min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}\right)}{|f(\delta)|} \leq \frac{\min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\rho} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．ゆえに， $\tilde{\lambda}(s) \equiv L(g(s))$ とおくと， $g(s) = e^{\tilde{\lambda}(s)}$ となる．したがって，

$$\lambda(s + \delta) \equiv \lambda(\delta) + \tilde{\lambda}(s), \quad 0 \leq s \leq \delta$$

により λ を定義すれば，

$$e^{\lambda(s+\delta)} = e^{\lambda(\delta) + \tilde{\lambda}(s)} = e^{\lambda(\delta)} e^{\tilde{\lambda}(s)} = f(\delta) g(s) = f(s + \delta)$$

となって， $[\delta, 2\delta]$ 上で (3.12) は成り立つ．

このようにして $[-\delta, k\delta]$ 上で λ が構成されたとき, $0 \leq s \leq \delta$ に対し, 以下のように定義すれば $[-\delta, T]$ 上で λ が構成できる.

$$\begin{aligned} g(s) &\equiv f(s + k\delta)/f(k\delta) \\ \tilde{\lambda}(s) &\equiv L(g(s)) \\ \lambda(s + k\delta) &\equiv \lambda(k\delta) + \tilde{\lambda}(s) \end{aligned}$$

また δ を $-\delta$ に変えて同様に λ を定義していけば, $[-T, T]$ 上で (3.12) をみたす連続関数 λ が存在する.

次に, (3.12) をみたす連続関数 λ が一意的に存在することを示す. $\hat{\lambda}$ も (3.12) をみたす連続関数とすれば,

$$\exp(\hat{\lambda}(t) - \lambda(t)) = 1$$

となる. ゆえに, 適当な整数 $m(t)$ により

$$\hat{\lambda}(t) - \lambda(t) = 2\pi i \cdot m(t)$$

とかける. ところが, $\hat{\lambda} - \lambda$ は連続関数より $m(t)$ は整数値連続関数となり, 定数となる. $m(0) = \hat{\lambda}(0) - \lambda(0) = 0$ より $m(t) = 0$ だから, $\hat{\lambda} = \lambda$ となって (3.12) をみたす連続関数 λ は一意的に存在する.

次に, f が $(-\infty, \infty)$ 上で 0 にならなければ, (3.12) をみたす連続関数 λ が $(-\infty, \infty)$ 上で存在することを示す. f が $(-\infty, \infty)$ 上で 0 にならなければ, $[-T, T]$ 上で (3.12) をみたす λ_T が一意的に定まる. したがって, $T < \tilde{T}$ のとき

$$\lambda_T(t) = \lambda_{\tilde{T}}(t), \quad |t| \leq T$$

となる. ゆえに, $(-\infty, \infty)$ 上の連続関数 λ を

$$\lambda(t) = \lambda_T(t), \quad |t| \leq T$$

により定義すればよい. ■

以下, 命題 3.15 の関数 λ を $\log f$ とかくことにする.

命題 3.16 \mathbb{R}^1 上の連続な複素数値関数 $f, f_k, k = 1, 2, \dots$ が, $f(0) = f_k(0) = 1$ であり, $[-T, T]$ において 0 にならないとする. f_k が f に $[-T, T]$ 上で一様収束するなら, $\log f_k$ も $\log f$ に $[-T, T]$ 上で一様収束する.

【証明】まず, 次の式が成り立つことを示す.

$$\log \frac{f_k}{f} = \log f_k - \log f \tag{3.15}$$

$[-T, T]$ 上では $f_k/f \neq 0$ で, $(f_k/f)(0) = 1$ となるから命題 3.15 の条件をみたす. ゆえに,

$$\frac{f_k}{f} = \frac{e^{\log f_k}}{e^{\log f}} = e^{\log f_k - \log f}$$

となって, (3.15) は成り立つ.

次に, $\log(f_k/f)$ が 0 に $[-T, T]$ 上で一様収束することを示す. 定理の条件により f_k/f は 1 に $[-T, T]$ 上で一様収束するので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$k \geq k_0 \quad \text{ならば,} \quad \sup_{|t| \leq T} |(f_k/f)(t) - 1| < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

をみたす番号 k_0 が存在する. よって, $k \geq k_0$ ならば, (3.13) より

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq T} |L((f_k/f)(t)) - 0| &\leq \sup_{|t| \leq T} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} |(f_k/f)(t) - 1|^j \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sup_{|t| \leq T} |(f_k/f)(t) - 1|^j \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \varepsilon^j \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに, $\log(f_k/f)$ は 0 に $[-T, T]$ 上で一様収束する.

したがって, (3.15) より $\log f_k$ は $\log f$ に $[-T, T]$ 上で一様収束する. ■

次に, 無限分解可能な特性関数をもつ性質を 4 つあげる. 無限分解可能な特性関数の全体を Φ とおく.

命題 3.17 無限分解可能な特性関数は次のような性質をもつ.

- (i) $\varphi \in \Phi$ ならば, $\overline{\varphi} \in \Phi$.
- (ii) $\varphi_i \in \Phi, i = 1, 2$ ならば, $\varphi_1 \varphi_2 \in \Phi$.
- (iii) $\varphi \in \Phi$ ならば, φ は 0 にならない.
- (iv) $\varphi_k \in \Phi$ が φ に各点で収束し, φ が特性関数ならば, $\varphi \in \Phi$ である.

【証明】 () $\varphi \in \Phi$ より $\varphi = ({}_n\varphi)^n$ が成り立つとすれば, $\overline{\varphi} = (\overline{{}_n\varphi})^n$ となる. ここで, $\overline{{}_n\varphi}$ は φ の分布とは対称な分布の特性関数であるので, $\overline{\varphi} \in \Phi$ となる.

() $\varphi_i \in \Phi, i = 1, 2$ より $\varphi_i = ({}_n\varphi_i)^n, i = 1, 2$ とすれば, $\varphi_1 \varphi_2 = ({}_n\varphi_1 {}_n\varphi_2)^n$ が成り立つ. ここで, ${}_n\varphi_1 {}_n\varphi_2$ も定理 2.3 より特性関数になるので, $\varphi_1 \varphi_2 \in \Phi$ となる.

() $\varphi \in \Phi$ より, $\varphi = ({}_n\varphi)^n$ をみたす特性関数 ${}_n\varphi$ が存在する.

$f \equiv |\varphi|^2, {}_nf \equiv |{}_n\varphi|^2$ とおけば, $|\varphi|^2 = \varphi \overline{\varphi}, |{}_n\varphi|^2 = {}_n\varphi \overline{{}_n\varphi}$ となるので, 命題 3.17 の

() () より $f, {}_nf$ も特性関数である.

また, $f, {}_n f$ は非負であり, $f = |\varphi|^2 = |({}_n \varphi)^n|^2 = ({}_n f)^n$ となるから ${}_n f(t) = (f(t))^{1/n}$ が成り立つ. ゆえに, $0 \leq f(t) \leq 1$ を考えあわせると以下が成り立つ.

$$h(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} {}_n f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(t))^{1/n} = \begin{cases} 1, & f(t) \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & f(t) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

次に, この関数 h が特性関数であることを示す. $f(0) = |\varphi(0)|^2 = 1$ より, f は $t = 0$ の近傍では 0 にならないから, h は $t = 0$ の近傍で 1 となる.

したがって, 特性関数 ${}_n f$ は h に各点で収束し, h は $t = 0$ で連続であるので, 定理 2.15 により h は特性関数になる.

よって, h は \mathbb{R}^1 上で一様連続であるから, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して $h(t) = 1$ となる. ゆえに, $|\varphi(t)|^2 = f(t) \neq 0$ となって φ は 0 にならない. ■

この性質の () により, $\varphi \in \Phi$ ならば (3.11) の $\varphi, {}_n \varphi$ は, 共に 0 にならない. また, $\varphi(0) = {}_n \varphi(0) = 1$ であるので, 命題 3.15 により $n \log {}_n \varphi(t) = \log \varphi(t)$ が成り立つ. さらに, (3.11) をみたく ${}_n \varphi$ は一意的となるから, それを $\varphi^{1/n}$ とかく.

【証明】(命題 3.17 ())

まず, φ が 0 にならないことを示す. $f \equiv |\varphi|^2, f_k \equiv |\varphi_k|^2$ とおけば, f, f_k は共に非負実数値の特性関数である. さらに,

$$f_k^{1/n} = (|\varphi_k|^2)^{1/n} = \varphi_k^{1/n} \overline{\varphi_k}^{1/n}$$

より $f_k^{1/n}$ も特性関数であり, $k \rightarrow \infty$ のとき $f_k^{1/n}$ も $f^{1/n}$ に各点収束する. ところが, f は特性関数だから原点で連続である. したがって, 定理 2.15 より $f^{1/n}$ も特性関数になり,

$$f = (f^{1/n})^n \in \Phi$$

が成り立つ. ゆえに, 命題 3.17 () により f は 0 にならない. すなわち, φ も 0 にならない. これより, φ が特性関数ならば $\log \varphi$ が存在する. また, $\varphi_k \in \Phi$ より $\log \varphi_k$ も存在する.

φ_k が φ に各点で収束し, φ は原点で連続であるので, 定理 2.15 により φ_k は φ に広義一様収束する. よって, 命題 3.16 により $\log \varphi_k$ も $\log \varphi$ に広義一様収束する.

ゆえに, $\varphi_k^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi_k\right)$ は $\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi\right)$ に広義一様収束する.

$\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi_k\right)$ は連続関数だから, その極限である $\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi\right)$ も原点で連続となる.

よって, 定理 2.15 により $\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi\right)$ は特性関数となり,

$$\varphi = e^{\log \varphi} = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi\right)\right)^n$$

が成り立つ. ゆえに, $\varphi \in \Phi$ である. ■

次の定理 3.18 が，定理 3.14 の後半部分に対する証明となる．また，3 章でとりあげた単位分布，ポアソン分布，一次元正規分布の特性関数は，すべて無限分解可能な特性関数の例であり，これらの例を含む特性関数の一般の形が (3.16) となっている．またこの形は，レヴィの標準形とよばれている．

定理 3.18 φ が無限分解可能な特性関数となる必要十分条件は，実数 α と \mathbb{R}^1 上の有界測度 ν が存在して， φ が次の形で書き表せることである．

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right\} \quad (3.16)$$

【証明】(十分性)： $\psi(t)$ を次のようにおく．

$$\psi(t) \equiv it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \quad (3.17)$$

このとき， $e^{\psi(t)} \in \Phi$ となることを示せばよい．

まず，被積分関数が連続であることを確認する．指数関数 e^{itx} のテイラー展開より，

$$\begin{aligned} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} &= -\frac{it}{x} + (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} \\ &= -\frac{it}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x^k \frac{1+x^2}{x^2} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k (1+x^2)}{k!} x^{k-2} \end{aligned}$$

となる．ここで，右辺の級数の収束半径は無限大なので，被積分関数は連続である．

次に，被積分関数の有界性を示す．

$|x| \geq 1$ のとき，任意の t に対して

$$\begin{aligned} \left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| \frac{1+x^2}{x^2} &\leq 2 \left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| \\ &\leq 2 \left(|e^{itx} - 1| + \frac{|tx|}{1+x^2} \right) \leq 2(2 + |t|) \end{aligned}$$

また， $|x| < 1$ のとき， $|e^{itx} - 1 - itx| \leq |tx|^2/2$ より

$$\begin{aligned} \left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| &\leq \left| e^{itx} - 1 - itx \right| + \left| itx - \frac{itx}{1+x^2} \right| \\ &\leq \frac{|tx|^2}{2} + \left| itx \frac{x^2}{1+x^2} \right| \end{aligned}$$

となるので，任意の t に対して

$$\left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| \frac{1+x^2}{x^2} \leq \frac{t^2(1+x^2)}{2} + |tx| \leq t^2 + |t|$$

が成り立つ．したがって，被積分関数は有界である．

次に、任意の t に対して、 $\psi(t) - it\alpha$ がリーマン和により近似できることを示す。

$\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$ は有界連続で ν は有界測度より、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $M > 0$ が存在して、

$$\int_{\{|x|>M\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) < \varepsilon \quad (3.18)$$

となる。よって、

$$\int_{\{|x|\leq M\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx)$$

について考える。

今、 $\Delta_k = (x_k, x_{k+1}]$ を、 $\bigcup_{k=1}^l \Delta_k = [-M, M]$ をみたす互いに素な集合とする。

$f(x) \equiv \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$ 、 $h_l(x) \equiv \sum_{k=1}^l f(x_k) I_{\Delta_k}(x)$ とおけば、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in [-M, M]$ に対し、ある番号 l_0 が存在して

$$l \geq l_0 \quad \text{ならば、} \quad |h_l(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となる。 f は有界連続関数だから有界収束定理より、 $l \geq l_0$ ならば

$$\left| \int_{[-M, M]} h_l(x) \nu(dx) - \int_{[-M, M]} f(x) \nu(dx) \right| < \varepsilon$$

したがって、この ε と番号 l_0 に対し、

$l \geq l_0$ ならば、

$$\left| \sum_{k=1}^l \left(e^{itx_k} - 1 - \frac{itx_k}{1+x_k^2} \right) \frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) - \int_{\{|x|\leq M\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right| < \varepsilon \quad (3.19)$$

が成り立つ。よって、(3.18) と (3.19) より、 $l \geq l_0$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) - \sum_{k=1}^l \left(e^{itx_k} - 1 - \frac{itx_k}{1+x_k^2} \right) \frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right| \\ & \leq \left| \int_{\{|x|>M\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\{|x|\leq M\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) - \sum_{k=1}^l \left(e^{itx_k} - 1 - \frac{itx_k}{1+x_k^2} \right) \frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して， $\psi(t) - it\alpha$ は $\sum_{k=1}^l \left(e^{itx_k} - 1 - \frac{itx_k}{1+x_k^2} \right) \frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k)$ により近似できる．

ところが，リーマン和は次のようにかける．

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \left(e^{itx_k} - 1 - \frac{itx_k}{1+x_k^2} \right) \frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \\ &= -it \left(\sum_{k=1}^l \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right) + \sum_{k=1}^l \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\} \end{aligned}$$

よって， $e^{\psi(t)-it\alpha}$ は $\exp \left\{ -it \left(\sum_{k=1}^l \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right) + \sum_{k=1}^l \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\} \right\}$ により任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して近似できる．また，

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -it \left(\sum_{k=1}^l \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right) + \sum_{k=1}^l \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^l \left(\exp \left\{ -it \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right\} \times \exp \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\} \right) \quad (3.20) \end{aligned}$$

となる．ここで， $\exp \left\{ -it \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right\}$ は例 2.4 より単位分布 $\delta_{\{-\frac{\nu(\Delta_k)}{x_k}\}}$ の特性関数であるから，無限分解可能な特性関数である．

また，例 2.5 により $\exp \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\}$ はポアソン分布 $\Phi\left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k), x_k\right)$ の特性関数であるから，無限分解可能な特性関数である．したがって，命題 3.17 () により (3.20) の右辺の積は Φ に属する．

また，(3.17) の右辺の積分は可積分であるので，ルベークの収束定理より $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$ となり， $e^{\psi(t)-it\alpha}$ は原点で連続である．

よって， $\prod_{k=1}^l \left(\exp \left\{ -it \frac{\nu(\Delta_k)}{x_k} \right\} \times \exp \left\{ \left(\frac{1+x_k^2}{x_k^2} \nu(\Delta_k) \right) (e^{itx_k} - 1) \right\} \right) \in \Phi$ が $e^{\psi(t)-it\alpha}$ に各点で収束し， $e^{\psi(t)-it\alpha}$ は原点で連続であるので，定理 2.15 により $e^{\psi(t)-it\alpha}$ は特性関数になる．したがって，命題 3.17 () により $e^{\psi(t)-it\alpha}$ は Φ に属する．ところが， $e^{it\alpha}$ も無限分解可能な特性関数である．ゆえに， $e^{\psi(t)}$ は Φ に属する．

(必要性)： φ を無限分解可能な特性関数とすると，実数 α と \mathbb{R}^1 上の有界測度 ν が存在して，

$$\log \varphi(t) = it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \quad (3.21)$$

となることを示せばよい． $\varphi_n \equiv \varphi^{1/n}$ ， $\lambda \equiv \log \varphi$ とおく．

まず，任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して， $|t| < T$ をみたく T をとる．この $T > 0$ に対し，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} |n(\varphi_n(t) - 1) - \lambda(t)| = 0 \quad (3.22)$$

が成り立つことを示す. $n(\varphi_n(t) - 1) = n(e^{\frac{\lambda(t)}{n}} - 1)$ とかけるので, 指数関数のテイラー展開より, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{|t| \leq T} \left| e^{\frac{\lambda(t)}{n}} - 1 - \frac{\lambda(t)}{n} \right| \leq \sup_{|t| \leq T} C \left| \frac{\lambda(t)}{n} \right|^2$$

が成り立つ. この両辺を n 倍すると,

$$\sup_{|t| \leq T} |n(e^{\frac{\lambda(t)}{n}} - 1) - \lambda(t)| \leq \sup_{|t| \leq T} \frac{C|\lambda(t)|^2}{n}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき両辺の極限をとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} |n(e^{\frac{\lambda(t)}{n}} - 1) - \lambda(t)| = 0$$

となり, (3.22) は成り立つ.

したがって,

$$\sup_n \sup_{|t| \leq T} n|\varphi_n(t) - 1| < \infty \quad (3.23)$$

次に, μ_n を φ_n に対する分布とすると, 任意の $\varepsilon' > 0$ に対しある $A > 0$ を,

$$\sup_n n\mu_n([-A, A]^c) < \varepsilon' \quad (3.24)$$

をみたすように選べることを示す. 補題 2.16 の不等式によれば任意の $\hat{A} > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^c) &\leq 2 - \hat{A} \int_{-1/\hat{A}}^{1/\hat{A}} \varphi_n(t) dt \\ &= 2 - \hat{A} \int_{-1/\hat{A}}^{1/\hat{A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu_n(dx) dt \\ &= 2 - \hat{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/\hat{A}}^{1/\hat{A}} (\cos tx + i \sin tx) dt \mu_n(dx) \\ &= 2 - \hat{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{1/\hat{A}} 2 \cos tx dt \mu_n(dx) \\ &= 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} dt - 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \mu_n(dx) dt \\ &= 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} \operatorname{Re} (1 - \varphi_n(t)) dt \end{aligned}$$

となる. ゆえに, 両辺を n 倍すれば

$$n\mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^c) \leq 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} \operatorname{Re} \{n(1 - \varphi_n(t))\} dt$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, (3.22) により被積分関数 $\operatorname{Re} \{n(1 - \varphi_n(t))\}$ は $-\operatorname{Re} \lambda(t)$ に $[0, 1/\hat{A}]$ 上で一様収束するので,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n\mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^{\complement}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} \operatorname{Re} \{n(1 - \varphi_n(t))\} dt \\ &= 2\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} -\operatorname{Re} \lambda(t) dt \end{aligned}$$

ここで, $\hat{A} \rightarrow \infty$ のとき, $\hat{A} \int_0^{1/\hat{A}} -2\operatorname{Re} \lambda(t) dt$ は $-2\operatorname{Re} \lambda(0)$ に収束するので,

$$\overline{\lim}_{\hat{A} \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n\mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^{\complement}) \leq -2\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$$

となる. よって, 任意の $\varepsilon' > 0$ に対しある $\hat{A}(\varepsilon') > 0$ が存在して,

$$\hat{A} \geq \hat{A}(\varepsilon') \quad \text{ならば,} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n\mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^{\complement}) < \varepsilon'$$

したがって, ある番号 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば,} \quad n\mu_n([-4\hat{A}, 4\hat{A}]^{\complement}) < \varepsilon'$$

となる. $n < n_0$ のときは, μ_n の性質より十分大きな \tilde{A} をとれば,

$$n\mu_n([- \tilde{A}, \tilde{A}]^{\complement}) < \varepsilon', \quad n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$$

が成り立つ. したがって, この $4\hat{A}$ と \tilde{A} のうち大きい方を新たに A とおけば, 任意の $\varepsilon' > 0$ に対し $A > 0$ を, (3.24) をみたすように選べる.

次に, $\nu_n(dx) \equiv x^2/(1+x^2) n\mu_n(dx)$ とおいたとき,

$$\sup_n \nu_n(\mathbb{R}^1) < \infty \tag{3.25}$$

となることを示す.

$$L(t) \equiv |t| \inf_{x \in \mathbb{R}^1} \left(1 - \frac{\sin tx}{tx} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$$

とおけば,

$$|x| \geq 1 \quad \text{では,} \quad \left| 1 - \frac{\sin tx}{tx} \right| \frac{1+x^2}{x^2} \leq 4.$$

$$|x| < 1 \quad \text{では} \quad |\sin tx - tx| \leq \frac{|tx|^3}{3!} \quad \text{より,} \quad \left| 1 - \frac{\sin tx}{tx} \right| \leq \frac{t^2 x^2}{6} \quad \text{となるから,}$$

$$\left| 1 - \frac{\sin tx}{tx} \right| \frac{1+x^2}{x^2} \leq \frac{t^2(1+x^2)}{6} < \frac{t^2}{3}$$

したがって, $t \neq 0$ のとき $0 < L(t) < \infty$ となる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t n(1 - \operatorname{Re} \varphi_n(s)) ds \right| &= \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos sx) n\mu_n(dx) ds \right| \\ &= |t| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin tx}{tx} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_n(dx) \\ &\geq L(t) \nu_n(\mathbb{R}^1) \end{aligned}$$

(3.23) より, 左辺の積分値は n に関し有界である. したがって, (3.25) は成り立つ.

次に, 任意の有界連続関数 g に対して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \nu_{n_j}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \nu(dx) \quad (3.26)$$

をみたく n の部分列 n_j と, 有界測度 ν が存在することを示す. (3.25) よりある正の実数 a が存在して, $n' \rightarrow \infty$ のとき $\nu_{n'}(\mathbb{R}^1) \rightarrow a$ となる $\{n\}$ の部分列 $\{n'\}$ がとれる. ν_n の定義と (3.24) より, 任意の n に対して

$$\begin{aligned} \nu_n([-A, A]^c) &= \int_{[-A, A]^c} \frac{x^2}{1+x^2} n\mu_n(dx) \\ &\leq n\mu_n([-A, A]^c) < \varepsilon' \end{aligned}$$

が成り立つので, $\nu_{n'}([-A, A]^c) < \varepsilon'$ となる. ここで,

$$\tilde{\nu}_{n'}(B) \equiv \frac{\nu_{n'}(B)}{\nu_{n'}(\mathbb{R}^1)}, \quad B \in \mathbf{B}_1$$

とおくと $\tilde{\nu}_{n'}$ は確率で,

$$\tilde{\nu}_{n'}([-A, A]^c) < \frac{\varepsilon'}{\nu_{n'}(\mathbb{R}^1)} \leq \frac{\varepsilon'}{\inf_{n'} \nu_{n'}(\mathbb{R}^1)}$$

となる.

(i) $\inf_{n'} \nu_{n'}(\mathbb{R}^1) \neq 0$ のとき

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, (3.24) における ε' を, $\varepsilon' < \varepsilon \inf_{n'} \nu_{n'}(\mathbb{R}^1)$ をみたくすようにとれば,

$$\tilde{\nu}_{n'}([-A, A]^c) \leq \frac{\varepsilon'}{\inf_{n'} \nu_{n'}(\mathbb{R}^1)} < \varepsilon$$

となる. よって, 定理 2.11 より $\tilde{\nu}_{n'}$ は収束部分列 $\tilde{\nu}_{n''}$ をもち, $\tilde{\nu}_{n''} \rightarrow \tilde{\nu}$ かつ $\nu_{n''}(\mathbb{R}^1) \rightarrow a$ となる. したがって, 任意の有界連続関数 g に対して,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \nu_{n''}(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \nu_{n''}(\mathbb{R}^1) \tilde{\nu}_{n''}(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (\nu_{n''}(\mathbb{R}^1) - a) \tilde{\nu}_{n''}(dx) + a \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \tilde{\nu}_{n''}(dx) \end{aligned}$$

となるので両辺の極限をとると,

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \nu_{n''}(dx) = a \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \tilde{\nu}(dx)$$

ゆえに, $\nu = a\tilde{\nu}$, $\nu_{n''} = \nu_{n_j}$ とすれば, 任意の有界連続関数 g に対して, (3.26) をみたくす部分列 n_j と有界測度 ν が存在するといえる.

(ii) $\inf_{n'} \nu_{n'}(\mathbb{R}^1) = 0$ のとき

$\nu_{n''}(\mathbb{R}^1) \rightarrow 0$ となるように $\{n'\}$ の部分列 $\{n''\}$ がとれる．したがって, $\nu \equiv 0$ とすれば, 部分列 n_j と有界測度 ν が存在するといえる．

次に, $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x}{1+x^2} n_j \mu_{n_j}(dx)$ の値が存在し, かつそれを α とおいたとき, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n_j(\varphi_{n_j}(t) - 1) = it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \quad (3.27)$$

が成り立つことを示す． $\varphi_n(t)$ の定義より, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n(t) - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) n \mu_n(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_n(dx) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_{n_j}(dx) \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_{n_j}(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \right\} + \frac{itx}{x^2} \nu_{n_j}(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_{n_j}(dx) \\ &\quad + it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} n_j \mu_{n_j}(dx) \end{aligned}$$

となり, $\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$ は有界連続関数だったので両辺の極限をとると, (3.26) と (3.28) より

$$\begin{aligned} it \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} n_j \mu_{n_j}(dx) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_{n_j}(dx) \\ &\quad - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_{n_j}(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n(t) - 1) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \end{aligned}$$

が成り立つ．(3.22) と ν が有界測度であることより右辺の値は存在するので, 左辺の値も存在する．したがって, $\alpha \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} n_j \mu_{n_j}(dx)$ とおけば, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して (3.27) が成り立つ．

ところが, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n(t) - 1) = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j(\varphi_{n_j}(t) - 1)$ である．ゆえに (3.27) と, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し (3.22) が成り立つことを考えあわせれば, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し (3.21) は成り立つ． ■

定理 3.14 において，法則収束という確率変数が収束する条件が用いられていた．ところが，定義 2.13 により法則収束と分布の収束が対応づけられ，定理 2.15 により分布の収束と特性関数の収束が対応づけられるので，法則収束と特性関数の収束が対応づけられる．したがって次の定理は，定理 3.14 の前半部分を示すために必要な結果となる．

定理 3.19 φ, φ_n を特性関数とする． $n \rightarrow \infty$ のとき， $(\varphi_n)^n$ が φ に各点収束するならば， φ は無限分解可能な特性関数である．

【証明】まず，ある $\delta > 0$ が存在して， $\varphi(t), \varphi_n(t)$ が $[-\delta, \delta]$ 上において 0 にならないことを示す． φ_n は特性関数だから，定理 2.3 より $(\varphi_n)^n$ も特性関数となる．以下 $(\varphi_n(t))^n$ を $\varphi_n^n(t)$ とかくことにする．今 φ_n^n が φ に各点で収束し， φ は原点で連続であるから，定理 2.15 より φ_n^n は φ に広義一様収束する．よって，任意の $\delta > 0$ に対し

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば,} \quad \sup_{|t| \leq \delta} |\varphi_n^n(t) - \varphi(t)| < \frac{1}{4} \quad (3.29)$$

をみたす番号 n_0 が選べる．また， φ は \mathbb{R}^1 上で連続で $\varphi(0) = 1$ より，ある δ を (3.29) かつ

$$|t| \leq \delta \quad \text{ならば,} \quad |\varphi(t) - 1| < \frac{1}{4} \quad (3.30)$$

をみたすようにとれば， $1 - |\varphi(t)| \leq |1 - \varphi(t)|$ より， $|t| \leq \delta$ において $|\varphi(t)| \geq 3/4$ となる．ゆえに，

$$\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi(t)| > 0 \quad (3.31)$$

次に， $|\varphi_n^n(t) - 1| \leq |\varphi_n^n(t) - \varphi(t)| + |\varphi(t) - 1|$ より， $|t| \leq \delta$ に対して両辺の上限をとると，(3.29)，(3.30) から

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば,} \quad \sup_{|t| \leq \delta} |\varphi_n^n(t) - 1| \leq \frac{1}{4}$$

が成り立つ．

同様に， $1 - |\varphi_n^n(t)| \leq |1 - \varphi_n^n(t)|$ より， $|t| \leq \delta$ において $|\varphi_n^n(t)| \geq 1/2$ となるので， $n \geq n_0$ ならば， $\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi_n^n(t)| \geq 1/2$ となる．

ところが， $\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi_n^n(t)| = (\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi_n(t)|)^n$ となるので，

$$\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi_n(t)| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

したがって， $n \geq n_0$ ならば

$$\inf_{|t| \leq \delta} |\varphi_n(t)| > 0 \quad (3.32)$$

となる．ゆえに，(3.31) と (3.32) により $\varphi(t), \varphi_n(t)$ は $[-\delta, \delta]$ 上で 0 にならない．

かつ, $\varphi(0) = 1$, $\varphi_n^n(0) = 1$ となるので, 命題 3.15 により $\log \varphi(t)$, $\log \varphi_n^n(t)$ が存在する. また, $\varphi_n^n(t)$ は $\varphi(t)$ に $[-\delta, \delta]$ 上で一様収束していたので, 命題 3.16 から $\log \varphi_n^n(t)$ は $\log \varphi(t)$ に $[-\delta, \delta]$ 上で一様収束する.

よって, $\log \varphi_n^n(t) = n \log \varphi_n(t)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} |n \log \varphi_n(t) - \log \varphi(t)| = 0 \quad (3.33)$$

が成り立つ.

次に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} |n(\varphi_n(t) - 1) - n \log \varphi_n(t)| = 0 \quad (3.34)$$

が成り立つことを示す. 指数関数のテイラー展開より, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{|t| \leq \delta} |e^{\log \varphi_n(t)} - 1 - \log \varphi_n(t)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} C |\log \varphi_n(t)|^2$$

が成り立つ. この両辺を n 倍すると,

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq \delta} |n(e^{\log \varphi_n(t)} - 1) - n \log \varphi_n(t)| &\leq \sup_{|t| \leq \delta} C n |\log \varphi_n(t)|^2 \\ &= \sup_{|t| \leq \delta} \frac{C |n \log \varphi_n(t)|^2}{n} \end{aligned}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき両辺の極限をとると, (3.33) より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} |n(e^{\log \varphi_n(t)} - 1) - n \log \varphi_n(t)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} \frac{C |n \log \varphi_n(t)|^2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} \frac{C |\log \varphi(t)|^2}{n} = 0 \end{aligned}$$

となる. ゆえに, (3.34) が成り立つ.

したがって, (3.33) と (3.34) により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta} |n(\varphi_n(t) - 1) - \log \varphi(t)| = 0 \quad (3.35)$$

となる.

μ_n を φ_n に対する分布とする.

$\nu_n(dx) \equiv x^2/(1+x^2) n\mu_n(dx)$ とおき, $|t| < \delta$ となる t を固定して定理 3.18 (必要性) と同様の方法を用いれば, 任意の有界連続関数 g に対して, (3.26) をみたく n の部分列 n_j と有界測度 ν が存在することが示せる.

さらに, (3.35) が成り立つので, 定理 3.18 (必要性) と同様の方法により

$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x}{1+x^2} n_j \mu_{n_j}(dx)$ の値が存在し, かつそれを α とおいたとき, 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n_j(\varphi_{n_j}(t) - 1) = it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \quad (3.36)$$

が成り立つことが示せる。

次に、 φ は \mathbb{R}^1 上で 0 にならないことを示す。

$$c(t) \equiv \left| it\alpha + \int_{\mathbb{R}^1} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right| + 1$$

とおくと、(3.36) より $|\varphi_{n_j}(t) - 1| < \frac{c(t)}{n_j}$ となるから、十分大きな n_j に対して $|\varphi_{n_j}(t)| > 1 - \frac{c(t)}{n_j}$ が成り立つ。

ゆえに、

$$|\varphi(t)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_{n_j}(t)|^{n_j} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c(t)}{n_j} \right)^{n_j} = e^{-c(t)}$$

したがって、 φ は \mathbb{R}^1 上で 0 にならない。

よって、(3.35) が成り立つ証明を見直せば、 δ は任意にとれていることがわかる。したがって、(3.36) により任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\begin{aligned} \log \varphi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n(t) - 1) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} n_j(\varphi_{n_j}(t) - 1) \\ &= it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、定理 3.18 (十分性) より $\varphi \in \Phi$ となる。 ■

【証明】(定理 3.14) 後半部分は定理 3.18 ですでに示したので、前半部分について示す。

$\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ は各 n に対して同分布をもつので、 n をとめるごとに特性関数は等しくなる。よって、 $\xi_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ の特性関数を φ_n とおくと、定理 2.3 より S_n の特性関数は $(\varphi_n)^n$ となる。

今、 φ をある分布の特性関数とすると φ は原点で連続となる。よって、 $(\varphi_n)^n$ が φ に各点で収束するならば、定理 2.15 より $(\varphi_n)^n$ を特性関数にもつ分布が φ を特性関数にもつ分布に収束する。すなわち、 S_n は $n \rightarrow \infty$ のとき法則収束することになる。

このとき、定理 3.19 より φ は無限分解可能な特性関数であり、 φ に対する分布、つまり極限分布は、無限分解可能な分布である。 ■

この定理 3.14 においても、もともとの $\xi_{n,i}$ の分布は全く既定されていない。したがってこの結果は、独立で同分布をもつ確率変数の和に関する極限定理においては、もともとの確率変数の分布にかかわらず、その極限分布は無限分解可能な分布に限るということを示している。つまり、我々はすべての分布を知り尽くしていないにもかかわらず、この場合における極限分布は、無限分解可能な分布以外ではありえないということである。また、極限分布の特性関数が具体的な形で書き表せるため、レヴィの反転公式によりその極限分布をも知ることができる。よってこの定理は、独立確率変数の和に関する極限定理とそれに対する結果を一般的に述べたものといえる。

参考文献

- [1] 伊藤 清, 確率論, 岩波書店, 1976
- [2] 伊藤 清三, ルベーク積分入門, 裳華房, 1963
- [3] 小谷 眞一, 測度と確率 1, 岩波書店, 1997
- [4] 掛下 伸一, 確率論, サイエンス社, 1973
- [5] 竹之内 脩, ルベーク積分, 培風館, 1980
- [6] 西尾 真喜子, 確率論, 実教出版, 1978