平成１３年度　学 位 論 文

低次元格子の固定について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自 然 系 コ ー ス
Ｍ０ ０ １ ８ ２ Ｄ 河　田　　　悟

序　文

グラフとは "点"と "線"だけからなる図形のことで、数学的には有限集合とその適当な二元からなる部分集合の族を組にして指定される組み合わせ的な構造を持っている。このグラフを、何本かの硬い棒を自由自在に曲がる関節でつないだ "トラス構造"と捉えて、グラフが変形するかどうかを議論する。実際、そのような構造物が変形するかどうかは土木工学や建築学では自然に現れる問題である。このようなグラフの問題を、グラフの定形性 (rigidity) の問題と呼ぶことにする。

グラフの定形性の問題は、structural topology と呼ばれる分野に属する話題で、古くから研究されており、多くの実用的な応用を持つ。本論文では、グラフの定形性の問題の中でも、特に、平面格子の定形性と一階建の建物の定形性の問題について考える。

一階建の建物の定形性の問題は、モントリオール大学建築学科での Janos Baracs の設計コースのクラス・プロジェクトとして始まり、そのクラスの 1 人の学生は、3×3 の一階建の建物について、屋根に 4 本の支柱を、また、4 つの壁に支柱を入れてこの建物を強化する方法を、モデルを用いてすべて分析した。

本論文では、平面格子の定形性と一階建の建物の定形性について組み合わせ理論 (matroid 理論) および基礎的な線形代数を用いて考え、この問題を視覚化し、直感的な解決を可能にするためにグラフを利用する。

本論文の構成について述べる。

１章では、後章で必要になるグラフ理論や、一般的なフレームの基礎的事項、matroid 理論について述べる。

1.1 節では、グラフの定義を行い、フレームについての説明をする。また、フレームの運動について定義を行い、フレームが rigid であるという概念を定義する。フレームが rigid であるかどうか、また、rigid でないならば、どこに何本支柱を入れることで rigid にできるかを調べることが、この論文のテーマである。

1.2 節では、motion を定義し、すべての motion を集めた集合である motion space M を考察する。まず、M の部分空間 E とフレームに支柱の集合 B を加えた motion space $M(B)$ の説明をして、フレームが strictly rigid であるということを定義する。このとき、フレームが strictly rigid ならば rigid であること (付録で証明する) を用いて、以下、フレームを strictly rigid にしていくことを考える。次に、フレームに支柱の集合 B を加えたとき、フレームが strictly rigid であるかどうかは $M(B)$ を調べればよいことを示す。これらは、支柱を加えた平面上の格子と一階建の建物が strictly rigid であるかどうかを後の章で考えるための準備である。

1.3 節では、ベクトル集合とその階数を一般化した考え方である matroid 理論についての概要を説明する。この matroid 理論を使い、フレームの matroid とグラフの matroid を紹介し、これらの関係について述べる。これらの matroid は、フレームが strictly rigid であるかどうか判定する場面で重要な役割を果たす。

２章では、平面上の格子をフレームと考えて、平面上の格子に支柱を加えて strictly rigid にすることを考える。

2.1 節では、平面上の格子を説明し、格子の line を定義する。また、line motion を定義し、この line motion が motion space M の基底となる事を示す。次に、line motion を利用して、支柱の集合 B を加えたフレームが strictly rigid になるための motion space での条件を考察する。

2.2 節では、M の代わりにあるベクトル空間を使い、フレームを strictly rigid にすることを考える。まず、格子の hall を定義し、hall 全体の集合から $\mathbb{R}$ への写像の全体の集合である shear space S を考え、M から S への写像 σ を定義する。この σ について考察し、フレームが strictly rigid かどうかを考えるためには、M の代わりに S を見ればよいことを示す。また、支柱の集合 B を加えたフレームが strictly rigid になるための shear space での条件を考察する。

2.3 節では、平面上の格子の matroid と完全二部グラフの matroid が同型であることを示す。このことから、平面上の格子を strictly rigid にするための条件が、完全二部グラフではどのような条件になっているかを考察する。最後に、支柱の集合 B を加えてフレームを strictly rigid にするために考察した shear space を S^{π} と名付ける。また、平面上の格子では、格子が strictly rigid であることと rigid であることが同値であることを示す。

３章では、一階建の建物に壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を加えて strictly rigid にすることを考える。

3.1 節では、一階建の建物の説明を行い、一階建の建物での motion space M や壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を加えた建物の motion space $M(A \cup B)$ について考察をする。

3.2 節では、2.2 節と同様に shear space S を考える。さらに、支柱の集合 $A \cup B$ を加えた一階建の建物が strictly rigid かどうかを調べるためには、motion space $M(A \cup B)$ の代わりに、S の部分空間 $\sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$ を考察すればよいことを示す。

3.3 節では、壁の支柱の集合 A を建物に加え、S の部分空間 $\sigma\bigl(M(A)\bigr)$ について考察し、S の部分空間 S_{τ} を定義する。

3.4 節では、壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を建物に加え、建物を strictly rigid にするために $S_{\tau} \cap S^{\pi}$ を考察する。

3.5 節では、The joint occupancy matrix の定義を行い、The joint occupancy matrix L について、退化次数 $Z_c(L), Z_r(L)$ の定義を行う。最後に、支柱の集合を建物に加えると strictly rigid になるかどうかは、$Z_r(L)$ で決定できることを、また、支柱の集合が独立集合かどうかは、屋根の支柱の集合に対応する二部グラフと $Z_c(L)$ で決定できることを示す。

付録として、1.2 節で紹介した「フレームが strictly rigid ならば rigid である」ということを証明するが、ここでは、証明の概略を述べる。

最後に、この論文を作成するに当たって学部生時代から、懇切丁寧に御指導して下さった濱中裕明先生に深く御礼申し上げます。また、研究の環境を整え御指導下さった兵庫教育大学数学教室の諸先生方に心から御礼申し上げます。

目 次

1 章　準備

1.1　フレーム

　まず、単純グラフを以下のように抽象的に定義する。

定義 1.1 空でない集合 V と $E \subset \{A \subset V \mid |A| = 2\}$ の組 $G = (V, E)$ を**単純グラフ**という。
このとき、V の元を G の**頂点**、E の元を G の**辺**と呼ぶ。V を G の**頂点集合**、E を G の**辺集合**といい、それぞれ $V(G)$、$E(G)$ と書くこともある。
頂点 $a, b \in V$ に対して、$\{a, b\} \in E$ のとき、a, b が辺で**つながっている**、または、a と b は**隣接している**といい、$a \dashv\!\vdash b$ と書く。このとき、頂点 a, b を辺の**端点**という。また、辺 $\{a, b\}$ のことを ab と書いたり、辺 e のように一文字の英字で表すこともある。辺 e の端点が頂点 a であるとき、$a \dashv e$ と書くこともある。 □

　以下、本論文では、グラフとはすべて単純グラフのことである。グラフに関する定義を幾つか述べる。

定義 1.2 二つのグラフ G、G' が、$V(G') \subset V(G)$、$E(G') \subset E(G)$ を満たすとする。このとき、G' を G の**部分グラフ**という。
とくに、$V(G') = V(G)$ のとき、G' を G の**全域部分グラフ**という。

□

定義 1.3 G をグラフとする。G の頂点と辺からなる交互列、

$$W : x_1 e_1 x_2 e_2 \ldots e_k x_{k+1}$$

において各辺 e_i がその前後の頂点を両端点に持つとき、W を x_1 と x_{k+1} を結ぶ**歩道**といい、特に、$x_i \neq x_j$ $(1 \leq i < j \leq k+1)$ のとき W を**道**という。 □

定義 1.4 W が $x_1 = x_{k+1}$ かつ $x_i \neq x_j$ $(1 \leq i < j \leq k)$ を満たすとき、W を**閉路**という。閉路を部分グラフと考えることもある。 □

定義 1.5 $G = (V, E)$ をグラフとする。任意の $x, y \in V$ に対して、x、y を端点とする道が常に存在するとき、G は**連結グラフ**であるという。ただし、$|V| = 1$ のグラフは連結グラフとする。 □

定義 1.6 H を G の連結部分グラフとする。H を含む、より大きな連結部分グラフが存在しないとき、H を G の**連結成分**という。 □

定義 1.7 $G = (V, E)$ をグラフとする。G が閉路を含まないとき、G を**林**という。また、林の中で連結なグラフを**木**という。 □

定義 1.8 $G=(V,E)$ をグラフ、H を G の全域部分グラフとする。H が閉路を含まないとき、H を**全域木**という。 □

定理 1.9 $G=(V,E)$ を連結グラフとする。このとき、G は

$$|E(G)| \geq |V(G)| - 1$$

を満たす。等号が成立するのは G が木のときである。

定理 1.10 $G=(V,E)$ をグラフとする。このとき、G が林であることと、G が

$$|E(G)| = |V(G)| - (G \text{ の連結成分の個数})$$

を満たすことは同値である。

定理 1.9、1.10 の証明は前原　潤の [5] を参照。

定義 1.11 G をグラフとする。$v \in V(G)$ につながっている辺の個数を v の**次数**といい、$\deg(v)$ と書く。
$v \in V(G)$ において $\deg(v) = 0$ となるとき、v を**孤立点**という。 □

定義 1.12 グラフ $G=(V,E)$ において、頂点集合 V を k 個の組 $V_1, \ldots, V_k$ に分けたとき、どの V_i についても、任意の $v, v' \in V_i$ は隣接していないとする。このとき、G を k **部グラフ**という。 □

次に、G に対してフレームを以下のように定義する。

定義 1.13 G をグラフ、G の頂点集合を V とする。このとき、G と写像 $p: V \longrightarrow \mathbb{R}^N$ との組 (G,p) を N **次元フレーム**という。また、p を省いてフレーム G と参照することもある。G の辺集合 E の元をフレームでは**梁**と呼ぶ。 □

与えられたフレームに対して、“フレームの梁の長さを変えないように、フレームを動かしていく” ことを考える。

定義 1.14 (G,p) をフレームとする。各 $v \in V$ ごとに、微分可能な写像 $c_v : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ が与えられていて、c_v が次の条件を満たすとき、これらの写像の族 $(c_v | v \in V)$ を**フレーム** (G,p) **の運動**という。

$$\begin{cases} c_v(0) & = & p(v) \\ v_1 \dashv\vdash v_2 & \Longrightarrow & c_{v_1}(t) \text{ と } c_{v_2}(t) \text{ の間の距離は t によらず一定} \end{cases}$$

このような運動を各 $v \in V$ に与えることを**フレーム** (G,p) **を動かす**という。 □

特殊な運動として以下に述べる平行運動、回転運動、合同運動がある。

定義 1.15 (G,p) をフレームとする。微分可能なベクトル値関数 $a : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ $(\varepsilon > 0)$ が $a(0) = 0$ を満たすとする。このとき $a_v : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ $(v \in V)$ を、$a_v(t) = p(v) + a(t)$ とすると、各 $v_1, v_2 \in V$ について、$a_{v_1}(t)$ と $a_{v_2}(t)$ の間の距離は t によらず一定になる。また、任意の $v \in V$ について、$a_v(0) = p(v)$ となるので、$(a_v | v \in V)$ は (G,p) の運動となる。$(a_v | v \in V)$ のことを**平行運動**と呼ぶ。 □

定義 1.16 t に対して $N \times N$ の直交行列 A_t を対応させる微分可能な関数 A_t を考え、$A_0 = E$ (E は N 次単位行列) とする。$v \in V$ において、$e_v : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を $e_v(t) = A_t p(v)$ と定める。このとき、各 $v_1, v_2 \in V$ について、$e_{v_1}(t)$ と $e_{v_2}(t)$ の間の距離は t によらず一定になる。一方、任意の $v \in V$ において、$e_v(0) = A_0 p(v) = p(v)$ となる。よって、$(e_v | v \in V)$ は (G, p) の運動となる。このとき、$(e_v | v \in V)$ のことを**回転運動**と呼ぶ。 □

定義 1.17 (G, p) をフレーム、$(c_v | v \in V)$ を (G, p) の運動とする。c_v が回転運動 $e_v(t) = A_t p(v)$ と、平行運動 $a_v(t) = p(v) + a(t)$ を使って、$c_v(t) = A_t p(v) + a(t)$ と表せるとき、$(c_v | v \in V)$ を**合同運動**という。 □

定義 1.18 (G, p) をフレームとして、以下のように定義する。

(G, p) は (N 次元で) **flexible** である。	$\Longleftrightarrow$	隣接していない二頂点 $v_1, v_2 \in V$ について、$c_{v_1}(t)$ と $c_{v_2}(t)$ の間の距離が一定にならない (G, p) の運動 $(c_v | v \in V)$ が存在する。
(G, p) は (N 次元で)**rigid** である。	$\Longleftrightarrow$	(G, p) の運動は合同運動に限る。

□

この定義だけでは flexiblity と rigidity が相反することは自明ではないが、実は、次のことが成り立つ。このことの証明は、H.Gluck の [4] を参照。

定理 1.19 (G, p) をフレームとするとき、(G, p) が N 次元で flexible ではないことと、(G, p) が N 次元で rigid であることは同値である。

定義 1.18 では、rigidity と flexiblity を微分可能な曲線を使って定義したが、実は、連続な曲線を使って rigidity と flexiblity を定義しても、微分可能な曲線を使って定義したものと同値になる。このことの証明は、L.Asimow の [1] を参照していただきたい。

以下、フレームの rigidity と flexiblity は N 次元で考える。

フレームに関する主たるテーマは、フレームが rigid かどうか、flexible ならば新たに支柱をどこにどれだけ追加すれば rigid にできるか、という問題である。

以下、この章では一般のフレームについて述べる。

1.2 フレームの自由度

$G = (V, E)$ をグラフ、(G, p) を N 次元のフレームとする。$a, b \in V$ を $a \dashv\vdash b$ とすると、フレームの運動 (c_v) は頂点 a, b の間の距離をまったく変えない。頂点 a, b それぞれの初速ベクトルを μ^a, μ^b、すなわち、$\frac{d}{dt} c_a(t) \Big|_{t=0} = \mu^a, \frac{d}{dt} c_b(t) \Big|_{t=0} = \mu^b$ とする。$\| c_a(t) - c_b(t) \|$ は一定なので

$$\frac{d}{dt} \| c_a(t) - c_b(t) \|^2 \Big|_{t=0} = 0$$

となる。これを計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\| c_a(t)-c_b(t) \|^2 \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big\{\big(c_a(t)-c_b(t)\big)\cdot\big(c_a(t)-c_b(t)\big)\Big\}\Bigg|_{t=0} \\ &= 2\big(c_a(t)-c_b(t)\big)\cdot\left(\frac{d}{dt}c_a(t)-\frac{d}{dt}c_b(t)\right)\Bigg|_{t=0}\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\big(p(a)-p(b)\big)\cdot(\mu^a-\mu^b)=0$$

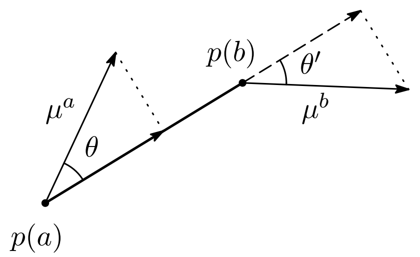
となり、

$$\mu^b\cdot\big(p(a)-p(b)\big)=\mu^a\cdot\big(p(a)-p(b)\big) \tag{1.1}$$

となる。等式 (1.1) のことを、梁 ab についての **mechanical principle** という。
　このとき、μ^a と $\big(p(a)-p(b)\big)$ のなす角を θ、μ^b と $\big(p(a)-p(b)\big)$ のなす角を θ' とおくと、

$$\| \mu^a \| \cdot \| p(a)-p(b) \| \cos\theta = \| \mu^b \| \cdot \| p(a)-p(b) \| \cos\theta'$$

となる。よって、$p(a)$ と $p(b)$ が異なるときは、$\| \mu^a \| \cos\theta = \| \mu^b \| \cos\theta'$ となり、下図のように mechanical principle は梁の上に初速ベクトルを射影すると同じベクトルが出てくることを表している。



定義 1.20 各頂点 $a\in V(G)$ に初速ベクトルを対応させるベクトルの族 $\mu=\big(\mu^a \bigm| a\in V\big)$ がすべての梁について mechanical principle を満たすとき、μ をフレームの **motion** という。また、$M=\big\{\mu \bigm| \mu$ は motion$\big\}$ を **motion space** という。 □

命題 1.21 $V(G)=\{1,\dots,n\}$ として、M の二元 $\mu=(\mu^1,\dots,\mu^n)$、$\mu'=(\mu'^1,\dots,\mu'^n)$ に対して、$\mu+\mu'=(\mu^1+\mu'^1,\dots,\mu^n+\mu'^n)$、$\lambda\mu=(\lambda\mu^1,\dots,\lambda\mu^n)\quad(\lambda\in\mathbb{R})$ と定義すると M はベクトル空間になる。
　このとき、$\dim M$ のことをフレームの**自由度**と呼ぶ。

証明
　$\mu+\mu'=(\mu^1+\mu'^1,\dots,\mu^n+\mu'^n)$ がすべての梁で mechanical principle を満たせばよい。$i \dashv\vdash j$ とすると、$\mu=(\mu^1,\dots,\mu^n)$、$\mu'=(\mu'^1,\dots,\mu'^n)$ は M の元なので、

$$\begin{aligned}&(\mu^i+\mu'^i)\cdot\big(p(i)-p(j)\big)-(\mu^j+\mu'^j)\cdot\big(p(i)-p(j)\big)\\ &=\mu^i\cdot\big(p(i)-p(j)\big)+\mu'^i\cdot\big(p(i)-p(j)\big)-\mu^j\cdot\big(p(i)-p(j)\big)-\mu'^j\cdot\big(p(i)-p(j)\big)\\ &=0\end{aligned}$$

となり、$\mu+\mu'\in M$ を得る。

また、$\lambda\mu = (\lambda\mu^1, \ldots, \lambda\mu^n) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ では、

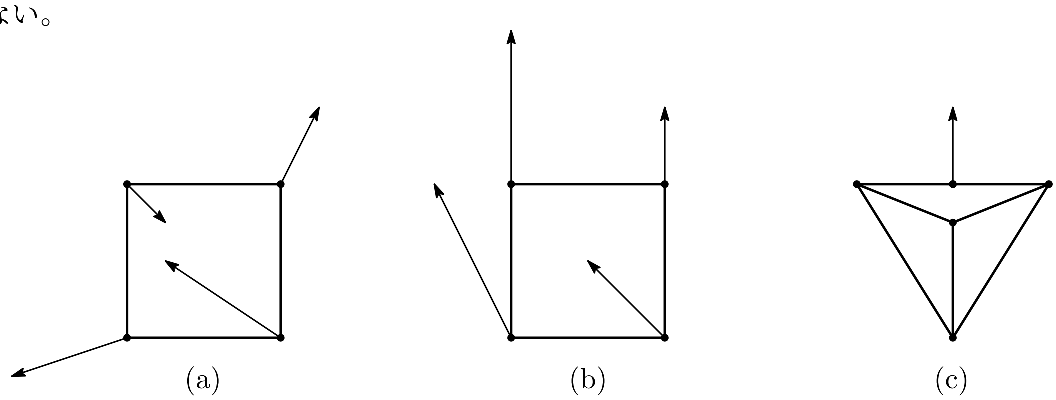
$$(\lambda\mu^i) \cdot \big(p(i) - p(j)\big) = \lambda\Big\{\mu^i \cdot \big(p(i) - p(j)\big)\Big\} = \lambda\Big\{\mu^j \cdot \big(p(i) - p(j)\big)\Big\} = (\lambda\mu^j) \cdot \big(p(i) - p(j)\big)$$

となり、$\lambda\mu \in M$ がいえる。

よって、M はベクトル空間となる。 ∎

ここで、motion は初速であり “無限小の動き”なので実際に motion を初速とする運動が存在するとは限らないことに注意する。motion を初速とする運動が実際に存在するとき、その motion を **mechanism** と呼ぶ。

実際、下の図 (a)、(b)、(c) の矢印で示されている各頂点の初速ベクトルは、すべて、mechanical principle を満たし motion となる。しかし、(a)、(b) は mechanism だが、(c) は mechanism ではない。



(a) (b) (c)

つぎに M と合同運動について考える。

定理 1.22 $V = \{1, \ldots, n\}$ として、$p(2) - p(1), \ldots, p(n) - p(1)$ が $\mathbb{R}^N$ を生成すると仮定する。このとき、$E = \{\mu \in M | \mu$ は合同運動の初速で与えられる motion$\}$ とすると、E は M の部分ベクトル空間となり、

$$\dim E = \frac{N(N+1)}{2}$$

となる。

証明 (G, p) をフレーム、$V(G) = \{1, \ldots, n\}$ とする。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき、$\mu_1 = (e_1, \ldots, e_1), \ldots, \mu_N = (e_N, \ldots, e_N)$ とおくと、$\mu_1, \ldots, \mu_N$ は各座標軸方向への平行移動の初速で与えられる motion となる。

次に、N 次正方行列 $T^{(kl)} = \Big({T^{(kl)}}_{ij}\Big) \quad (1 \leq k < l \leq N)$ を

$${T^{(kl)}}_{ij} = \begin{cases} -1 & (i = k \text{ かつ } j = l) \\ 1 & (i = l \text{ かつ } j = k) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおき、$\mu'_{kl} = \Big(T^{(kl)}p(1), \ldots, T^{(kl)}p(n)\Big)$ とおく。また、N 次正方行列 $R^{(kl)}(\theta)$ を

$$R^{(kl)}(\theta) = \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta & \vdots \\ \vdots & 0 & E_{l-k-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & E_{N-l} \end{pmatrix} (E_n \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

とおき、$f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を $f_i(t) = \Big(R^{(kl)}(t)\Big)p(i)$ とおくと、μ'_{kl} は $\big(f_i(t) \mid i \in V(G)\big)$ という回転運動の初速で与えられる motion となる。よって、$\mu_1, \ldots, \mu_N$, $\mu'_{12}, \ldots, \mu'_{(N-1)N}$ は E の元となる。

ここで、E は μ_i、μ'_{kl} で生成される M の部分空間 $\langle \mu_i, \mu'_{kl} | i = 1, \ldots, N, \quad 1 \leq k < l \leq N \rangle$ に含まれることを示そう。

E の任意の元 $\mu = (\mu^i | i \in V)$ は、ある合同運動 $(c_i | i \in V)$ を使って

$$\mu^i = \frac{d}{dt} c_i(t) \Big|_{t=0}$$

と表せる。$(c_i | i \in V)$ は、直交行列に値を持つ関数 A_t とベクトル値関数 $a(t)$ で $c_i(t) = A_t p(i) + a(t)$ と表せるので、

$$\begin{aligned} \mu^i &= \left(\frac{d}{dt} A_t p(i) + \frac{d}{dt} a(t)\right) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} A_t\right) \Big|_{t=0} p(i) + \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる。このとき、

$$\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i e^i \ (m_i \in \mathbb{R})$$

と書ける。

一方、A_t は N 次直交行列なので ${}^tA_t \cdot A_t = E$ を満たすが、これを微分すると、

$$\left({}^t\!\left(\frac{d}{dt} A_t\right) A_t + {}^tA_t \frac{d}{dt} A_t \right) \Big|_{t=0} = 0$$

となり、$\frac{d}{dt} A_t \Big|_{t=0} = T$ とおくと、${}^tT + T = 0$ を得る。すなわち N 次正方行列 $T = (T_{ij})$ は

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ n_{ij} & (i < j) \quad (n_{ij} \in \mathbb{R}) \\ -n_{ji} & (i > j) \end{cases}$$

という成分を持つ行列となる。よって、

$$T = \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} n_{kl} T^{(kl)}$$

と書けるので、等式 (1.2) に代入すれば、

$$\mu^i = \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} n_{kl} T^{(kl)} p(i) + \sum_{i=1}^{N} m_i e_i$$

となり、

$$\mu = \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} n_{kl} {\mu'}_{kl} + \sum_{i=1}^{N} m_i \mu_i$$

がいえる。したがって、$E \subset \left\langle \mu_i, {\mu'}_{kl} \;\middle|\; i = 1, \dots, N, \;\; 1 \leq k < l \leq N \right\rangle$ である。

逆に、μ_i と ${\mu'}_{kl}$ の一次結合はすべて E の元であることを示す。そのためには、

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i + \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} \beta_{kl} {\mu'}_{kl} \; (\alpha_i, \beta_{kl} \in \mathbb{R})$$

に対して、$\left.\dfrac{d}{dt} c_i(t) \right|_{t=0} = \mu^i$ となる合同運動 $(c_i | i \in V)$ があればよい。

ここで、

$$\mu^i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i + \left(\sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} \beta_{kl} T^{(kl)} \right) p(i)$$

なので、$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i = a$、$\displaystyle\sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} \beta_{kl} T^{(kl)} = T$ とおき、$c_i(t) = \exp(tT) p(i) + ta$ とおけば、$\left.\dfrac{d}{dt} c_i(t) \right|_{t=0} = \mu^i$ を満たす。これより、任意の μ_i と ${\mu'}_{kl}$ の一次結合は E の元である。よって、$E = \langle \mu_i, {\mu'}_{kl} | i = 1, \dots, N, \;\; 1 \leq k < l \leq N \rangle$ となり、E はベクトル空間になる。

最後に μ_i、${\mu'}_{kl}$ が一次独立であることを示そう。

いま、$\mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i + \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} \beta_{kl} {\mu'}_{kl}$ と置いて、$\mu = 0$ と仮定すると、

$$\mu^i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j + \sum_{1 \leq k < l \leq N}^{N} \beta_{kl} T^{(kl)} p(i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

となる。ここで、$\beta_{kl} T^{(kl)} = T'$ とおき、$\mu^i - \mu^1$ を計算すると、

$$T' \big(p(i) - p(1) \big) = 0 \quad (i = 2, \dots, n)$$

を得る。このとき、$p(i) - p(1)$ $(i = 2, \dots, n)$ は $\mathbb{R}^N$ を生成していたので、$T' = 0$ がいえる。これより、$\beta_{kl} = 0$ となり、これらを $\mu^i = 0$ に代入すると $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i = 0$ が成り立つ。ここで、$e_1, \dots, e_N$ は一次独立なので、$\alpha_i = 0$ となる。したがって、$\mu_1, \dots, \mu_N$, ${\mu'}_{12}, \dots, {\mu'}_{(N-1)N}$ は一次独立であることが分かった。ゆえに、

$$\dim E = N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

となる。 ∎

定理 1.22 では「$p(2)-p(1),\dots,p(n)-p(1)$ が $\mathbb{R}^N$ を生成する」と仮定したが、実は、「$p(2)-p(1),\dots,p(n)-p(1)$ が $\mathbb{R}^N$ の $(N-1)$ 次元部分空間を生成する」と仮定を弱めることが可能であることが知られている。また、条件の仮定が無くても、E が M の部分空間であることは常に正しい。

定義 1.23 $\dim M/E$ のことを M の**内部自由度**という。特に、定理 1.22 の仮定が満たされるときは、

$$\dim M/E = \dim M - \dim E = \dim M - \frac{N(N+1)}{2}$$

となる。 □

定義 1.24 フレーム (G,p) は内部自由度が 0 のとき、つまり、$\dim M/E = 0$ のとき、**strictly rigid** と呼ばれる。 □

8 ページの図 (c) に例をあげたが、motion は必ず mechanism になるとは限らない。よって、内部自由度が正であってもフレームは flexible とは限らない。しかし、次の定理は成立する。

定理 1.25 (G,p) をフレームとする。(G,p) が strictly rigid ならば、(G,p) は rigid である。

この証明は付録で示す。
次に、フレームに “支柱を加える” ということを定式化する。

定義 1.26 グラフ G において、どの 2 頂点も隣接しているとき G を**完全グラフ**といい、頂点数 n の完全グラフを K_n と表す。 □

定義 1.27 フレーム (G,p) において、$\mid V(G) \mid = n$ として、G を K_n の全域部分グラフとみなす。すなわち、$G \subset K_n$、$V(G) = V(K_n)$ とする。このとき、差集合 $E(K_n) - E(G)$ を C とおき、C の元のことをフレーム (G,p) の**支柱**という。 □

C の部分集合 B に対して、$V(G') = V(G)$、$E(G') = E(G) \cup B$ となるグラフ G' と p でできるフレーム (G',p) のことをフレーム (G,p) に支柱の集合 B を加えてできたフレームという。

定義 1.28 C をすべての支柱の集合として、$B \subset C$ とする。B を加えたフレームの motion space を $M(B)$ とする。このとき、

$$r(B) = \dim M - \dim M(B)$$

を B **によって減少した自由度**という。 □

B を支柱の集合として、B を加えたフレームを (G',p) とする。定義 1.23 と定義 1.28 より、

$$\begin{aligned}\dim M(B)/E &= \dim M(B) - \dim E \\ &= \dim M - r(B) - \dim E \\ &= \dim M/E - r(B)\end{aligned}$$

なので、$r(B)$ について次の定理がいえる。

定理 1.29 B をフレーム (G,p) の支柱の集合、(G',p) を B を加えたフレームとする。このとき、$r(B) = \dim M/E$ であることと、フレーム (G',p) が strictly rigid であることは同値である。特に、$r(B) = \dim M/E$ ならば (G',p) は rigid である。

フレーム (G,p) において、隣接していない二頂点 $a,b\in V(G)$ を考える。$ab=c\in C$ に対して、M から $\mathbb{R}$ への写像 φ_c を、$\varphi_c(\mu)=(\mu^b-\mu^a)\cdot\big(p(b)-p(a)\big)$ と定義すると、φ_c は線型写像となるので、$\varphi_c\in M^*$ になる。ここで、M^* は M の双対空間である。このとき、$\varphi_c(\mu)=0$ とすると、μ は c についての mechanical principle を満たすことが分かる。また、逆もいえる。

$\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ を M の基底とし、$\varphi\in M^*$ を任意に選び、$\varphi(\mu_i)=a_i\quad(i=1,\dots,n,\quad a_i\in\mathbb{R})$ とする。任意の $\mu\in M$ は $\mu=b_1\mu_1+\cdots+b_n\mu_n\quad(b_i\in\mathbb{R})$ と一般的に書けるので、

$$\begin{aligned}\varphi(\mu)&=\varphi(b_1\mu_1+\cdots+b_n\mu_n)\\&=b_1\varphi(\mu_1)+\cdots+b_n\varphi(\mu_n)\\&=b_1a_1+\cdots+b_na_n\end{aligned}$$

が成り立ち、φ は $a_1,\dots,a_n$ によって完全に決定されてしまう。

今、$\varphi_i(\mu_j)=\delta^i{}_j$ と φ_i を定めると、$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ が M^* の基底となることを示そう。上記の任意の φ は $\varphi=a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n$ と表されるので、M^* は $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ で生成される。また、$a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n=0$ とすると、$a_1\varphi_1(\mu_1)+\cdots+a_n\varphi_n(\mu_1)=0(\mu_1)$ より $a_1=0$ となる。同様に、$a_i=0\quad(i=1,\dots,n)$ であることが分かり、$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ が一次独立ということがいえるので、$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ は M^* の基底となる。このとき、$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ を M の基底 $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ と**双対な基底**という。

今、M の基底 $\mu_i\quad(i=1,\dots,n)$ を用いて、$\langle\mu_i,\mu_j\rangle=\delta^i{}_j$ となるように M の内積を定める。この内積を用いて M から M^* への写像 τ を、$\mu\in M$ に対して M^* の元として

$$\big(\tau(\mu)\big)(\mu')=\langle\mu,\mu'\rangle\quad(\mu'\in M)\tag{1.3}$$

を対応させる写像とする。このとき、$\tau(\mu_i)=\varphi_i$ であり、基底が基底に写るので τ は M と M^* の間に同型を与える。以下、この対応で φ_c に対応する motion $\tau^{-1}(\varphi_c)$ を μ_c とおくことにする。等式 (1.3) より、特に、$\langle\mu_c,\mu\rangle=\varphi_c(\mu)$ である。

定義 1.30 V を有限なベクトル空間、$A\subset V$ を V の部分ベクトル集合とする。このとき、A が生成する V の部分ベクトル空間を $\langle A\rangle$ と表す。
また、

$$rankA=\dim A$$

と定義する。 □

さて、以上のことを用いると、実は $r(B)$ は次のように、あるベクトル集合の階数と考えることができる。

定理 1.31 フレーム (G,p) において、B を支柱の集合とする。このとき、

$$r(B)=rank\big\{\varphi_c\;\big|\;c\in B\big\}$$

がいえる。

ここで、右辺は M^* における階数である。

証明 $B=\{c_1,\dots,c_n\}$ として、前述のように M の基底を一つ取ってきて $M\cong M^*$ とする。$M(B)$ について考えると、$M(B)$ は B を加えてできたフレームの motion space なので、

$$\begin{aligned}M(B)&=\big\{\mu\in M\;\big|\;\varphi_{c_i}(\mu)=0,\quad i=1,\dots,n\big\}\\&=\big\{\mu\in M\;\big|\;\langle\mu,\mu_{c_1}\rangle=0,\quad i=1,\dots,n\big\}\\&=\langle\mu_{c_1},\dots,\mu_{c_n}\rangle^{\perp}\end{aligned}$$

となる。

よって、$\dim M(B)+\dim\langle\mu_{c_i}|i=1,\dots,n\rangle=\dim M$ となり、$r(B)=\dim\langle\mu_{c_i}|i=1,\dots,n\rangle$ がいえる。したがって、τ は同型であったので、

$$\begin{aligned} r(B) &= \dim\langle\mu_{c_1},\dots,\mu_{c_n}\rangle \\ &= \dim\langle\tau(\mu_{c_1}),\dots,\tau(\mu_{c_n})\rangle \\ &= \dim\langle\varphi_{c_1},\dots,\varphi_{c_n}\rangle \\ &= rank\{\varphi_{c_1},\dots,\varphi_{c_n}\} \\ &= rank\big\{\varphi_c \;\big|\; c\in B\big\} \end{aligned}$$

を得る。 ■

1.3 matroid とフレーム

前節では、支柱の集合 B に対して $r(B)$ を考えたが、$r(B)$ は B を加えたフレームが strictly rigid であるか判別するのに重要なものであり、定理 1.31 で見たようにベクトル集合の階数として表される。これから述べる matroid はベクトル集合とその階数を一般化したものと考えることができる。

定義 1.32 ある有限集合 E と、E の巾集合 $\mathfrak{B}(E)$ から自然数 $\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$ への写像 r に対して、r が任意の $A\subset E$ と任意の $x,y\in E$ について次を満たすとき、(E,r) を **matroid** という。

() $r(\phi)=0$

() $r(A)\le r\big(A\cup\{x\}\big)\le r(A)+1$

() $r\big(A\cup\{x\}\big)=r\big(A\cup\{y\}\big)=r(A) \implies r\big(A\cup\{x,y\}\big)=r(A)$

□

ここで、$A\subset E$ とおくと A は有限集合なので ()、() より、$r(A)\le|A|$ が分かる。また、$B\subset A$ とおくと、() より $r(B)\le r(A)$ が分かる。

定義 1.33 $(E,r),(E',r')$ を matroid とする。このとき、E から E' への全単射 ψ が存在し、任意の $A\subset E$ に対して、

$$r(A)=r'\big(\psi(A)\big)$$

が成り立つとき、(E,r) と (E',r') は**同型**であるという。 □

定義 1.34 (E,r) を matroid、$A\subset E$ とする。$r(A)=|A|$ のとき A のことを**独立集合**、$r(A)<|A|$ のとき A のことを**従属集合**という。 □

このとき、次のことがいえる。

定理 1.35 (E,r) を matroid、$A\subset E$ とする。このとき、A が独立集合ならば $B\subset A$ も独立集合である。

証明　対偶をとって、「$B \subset A$ が従属集合ならば A も従属集合となる」を示す。

$B \cup \{b_1, \dots, b_n\} = A$ とおく。このとき、定義 1.32 の () より $r\big(B \cup \{b_1\}\big) \le r(B) + 1$ がいえる。また、$r\Big(\big\{B \cup \{b_1\}\big\} \cup \{b_2\}\Big) \le \big\{r(B) + 1\big\} + 1$ となるが、$r\Big(\big\{B \cup \{b_1\}\big\} \cup \{b_2\}\Big) = r\big(B \cup \{b_1, b_2\}\big)$ なので、$r\big(B \cup \{b_1, b_2\}\big) \le r(B) + 2$ がいえる。これを繰り返していくと、$r\big(B \cup \{b_1, \dots, b_n\}\big) \le r(B) + n$ が成り立つ。ここで、B は従属集合なので $r(B) < |B|$、また、$r\big(B \cup \{b_1, \dots, b_n\}\big) = r(A)$、$|B| + n = |A|$ なので、$r(A) < |A|$ を得る。これより、A が従属集合であることが分かる。したがって、A が独立集合ならば $B \subset A$ も独立集合であることがいえる。 ∎

定義 1.36 (E, r) を matroid、$A \subset E$ とする。A が極大な独立集合のとき、すなわち、A が独立集合で、かつ、A を真部分集合としてもつ独立集合が存在しないとき、A を **base** という。また、A が空でない極小な従属集合のとき、すなわち、従属な A の真部分集合が存在しないとき、A を **circuit** という。 □

定理 1.37 (E, r) を matroid、$A \subset E$ とする。このとき、A が従属集合ということと A が circuit を含むことは同値である。

証明　C を circuit として、$A = C \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ とおく。C は極小な従属集合なので定理 1.35 より A も従属集合であることが分かる。

次に、A が従属集合ならば A は circuit を含むことをいう。$|A| = k$ とおいて k についての帰納法で示す。

$k = 1$ のとき、A は従属集合とする。$|A| = 1$ なので $A = \{a\}$ と書ける。A の真部分集合は空集合 ϕ だけで、$r(\phi) = 0$ より ϕ は独立集合となる。よって、A 自身が circuit となる。

$k \le n$ のとき、「A が従属集合ならば A は circuit を含む」ということが成り立つと仮定して、$|A| = n + 1$ のときを考える。A の任意の部分集合 B が独立集合とすると、A 自身が circuit となる。また、A のある部分集合 B が従属集合とすると、B は帰納法の仮定より circuit を含む。

よって、A が従属集合ならば A は circuit を含むということが成り立つ。 ∎

この定理より、A が独立集合かどうかは A が circuit を含んでいるかどうかを調べればよいことが分かる。逆に、すべての circuit が分かれば、写像 r を考えなくても A が独立集合かどうか判別できる。

例 1.38 V をベクトル空間、E を V の有限な部分集合とする。任意の $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset E$ に対して、$r(A) = \dim\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ と定義すると、(E, r) は matroid となることが容易に確かめられる。このような matroid を**ベクトル集合の matroid** といい、r のことを**階数関数**と呼ぶ。ここで、ベクトル空間において、$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ が一次独立であることと、$\dim\langle a_1, \dots, a_n\rangle = |A|$ は同値であり、これは $r(A) = |A|$ と同値である。つまり、ベクトル集合 E で A が一次独立ということと、matroid(E, r) で A が独立集合ということは同値となる。同様に、ベクトル集合 E で A が一次従属ということと、matroid(E, r) で A が従属集合ということは同値となる。

例 1.39 フレーム (G, p) において、支柱の集合を C とする。このとき、支柱の集合 C に対応するベクトル集合 $\{\varphi_c | c \in C\}$ の matroid を、特に、**フレーム (G, p) の matroid** という。

例 1.40 G をグラフとして、$V(G)$ に 1 から n まで番号を付ける。また、各辺 $e=\{i,j\}\quad(i<j)$ に対して、

$$\hat{e}=(0,\ldots,0,\underset{i\text{ 番目}}{-1},0,\ldots,0,\underset{j\text{ 番目}}{1},0,\ldots,0)$$

とおいて、$E(G)$ からベクトル集合 $\{\hat{e}|e\in E\}$ に対応を付ける。ここで、$A\subset E(G)$ に対して、$r(A)=\dim\langle\hat{e}|e\in A\rangle$ とおくと $\bigl(E(G),r\bigr)$ は matroid となる。今、$\hat{e}$ の定義において、$\hat{e}$ の代わりに $-\hat{e}$ を用いても $r(A)$ に変化はないことに注意する。つまり、$r(A)$ は $V(G)$ の番号を付け方に依存しないことが分かる。この $\bigl(E(G),r\bigr)$ を**グラフ G の matroid** という。

上記のグラフの matroid の定義では、辺集合にベクトル集合を対応させて、グラフの matroid をベクトル集合の matroid と考えたが、今から、グラフから直接、階数関数 r を決定することを考える。

G をグラフとして、$S\subset E(G)$ とする。このとき、G の部分グラフで、$V(\hat{S})=V(G)$、$E(\hat{S})=S$ を満たすものを $\hat{S}$ とする。また、$\hat{S}$ の部分グラフで $V(\overline{S})=\bigl\{v\in V(G)\ \big|\ {}^{\exists}e\in S, v\dashv e\bigr\}$、$E(\overline{S})=S$ を満たすものを $\overline{S}$ とおく。$\overline{S}$ は $\hat{S}$ から孤立点を除いたグラフに他ならない。このような $\overline{S}$ を S **に対応するグラフ G の部分グラフ**と呼ぶ。

定理 1.41 G をグラフとして、$\bigl(E(G),r\bigr)$ を matroid とする。また、$S\subset E(G)$ とする。このとき、次が成立する。

$$r(S)=|V(\hat{S})|-(\hat{S}\text{ の連結成分の個数})\tag{1.4}$$

証明 $\hat{S}$ の連結成分を $S_1,\ldots,S_p$ とおく。$|V(G)|=n$ として、$V(G)$ に 1 から n まで番号付けを行い、$e\in E(G)$ に対して、例 1.40 のように $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\hat{e}$ を対応させる。このとき、例 1.40 の定義では $r(S)=\dim\langle\hat{e}|e\in S\rangle$ であった。ここで、各連結成分に含まれる頂点を

$$\begin{array}{rcl} V(S_1) & = & \{{a^1}_1,\ldots,{a^1}_{i_1}\} \\ \vdots & & \vdots \\ V(S_p) & = & \{{a^p}_1,\ldots,{a^p}_{i_p}\} \end{array}$$

と順番付けをして、$V(G)$ の頂点に

$$V(G)=\{{a^1}_1,\ldots,{a^1}_{i_1},\ldots,{a^p}_1,\ldots,{a^p}_{i_p}\}$$

と順番を付ける。これにより、連結成分 S_j に含まれる辺に対応するベクトル $\hat{e}$ は、

$$\hat{e}=(\overbrace{0,\ldots,0}^{i_1\text{個}},0,\ldots,0,\overbrace{0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0}^{i_j\text{個}},0,\ldots,0,\overbrace{0,\ldots,0}^{i_p\text{個}})$$

という形で表すことができる。ここで、$a\in\langle\hat{e}|e\in S\rangle^{\perp}$ を考える。上の $\hat{e}$ は連結成分 S_j の二頂点 ${a^j}_k$、${a^j}_l$ を結ぶ辺に対応するベクトルとすると、a は $\hat{e}\in\langle\hat{e}|e\in S\rangle$ と直交するので、a の成分は ${a^j}_k$ と ${a^j}_l$ の場所で同じ値になる。このことは、連結成分 S_j に含まれるすべての辺に対応するベクトルについていえるので、a の成分は ${a^j}_1,\ldots,{a^j}_{i_j}$ の間で同じ値になる。同様に、すべての連結成分でもいえるので

$$a=(\overbrace{a_1,\ldots,a_1}^{i_1\text{個}},\ldots,\overbrace{a_p,\ldots,a_p}^{i_p\text{個}})$$

と表される。これより

$$\langle \hat{e} | e \in S \rangle^{\perp} \subset \left\{ (\overbrace{d_1, \ldots, d_1}^{i_1\text{個}}, \ldots, \overbrace{d_p, \ldots, d_p}^{i_p\text{個}}) \;\middle|\; d_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, p \right\} \tag{1.5}$$

がいえる。

一方、関係式 (1.5) の右辺を D とおくと、D の元は明らかに $\langle \hat{e} | e \in S \rangle$ と直交するので、

$$\langle \hat{e} | e \in S \rangle^{\perp} = D$$

となり、$\dim D = p$ がいえる。ここで、$\dim \langle \hat{e} | e \in S \rangle + \dim \langle \hat{e} | e \in S \rangle^{\perp} = n$ なので、

$$\dim \langle \hat{e} | e \in S \rangle = n - p$$

が成り立つ。

したがって、

$$r(S) = |V(G)| - (\hat{S} \text{ の連結成分の個数})$$

となる。 ∎

$\hat{S}$ には孤立点が入っており、孤立点はそれ自身で一つの連結成分となるので、等式 (1.4) より、

$$r(S) = |V(\overline{S})| - (\overline{S} \text{ の連結成分の個数})$$

といいかえることができる。

最後に、グラフ G の matroid における circuit について以下のことを示す。

定理 1.42 $\bigl(E(G), r\bigr)$ を G の matroid とし、$C \subset E(G)$ とする。このとき、C がグラフ G の matroid における circuit であるならば、$\overline{C}$ がグラフ G の閉路となる。また、この逆も正しい。

証明 まず、$\overline{C}$ をグラフ G の閉路としたとき、C がグラフ G の matroid の circuit になることをいう。

$\overline{C}$ はグラフ G の閉路で連結なので、定理 1.41 より $r(C) = \bigl|V(\overline{C})\bigr| - 1$ となる。ここで、閉路では、$\bigl|V(\overline{C})\bigr| = |C|$ なので、

$$r(C) = |C| - 1 < |C|$$

が成り立つ。これより、C は従属集合であることが分かる。また、任意の $e \in C$ について $C' = C - \{e\}$ とすると、閉路から一つの辺を取り除いても連結のままなので、定理 1.41 より $r(C') = \bigl|V(\overline{C'})\bigr| - 1$ となる。閉路から辺を一つ取り除いても頂点数は変わらないので、$\bigl|V(\overline{C'})\bigr| = \bigl| V(\overline{C}) \bigr| = |C|$ となる。これより、

$$r\bigl(C - \{e\}\bigr) = |C| - 1 = \bigl| C - \{e\} \bigr|$$

となり C' は独立集合となる。よって、C は circuit となるので、$\overline{C}$ をグラフ G の閉路としたとき、C はグラフ G の matroid の circuit となることがいえる。

逆に、C をグラフ G の matroid での circuit と仮定して、$\overline{C}$ が、グラフ G の閉路になることを示す。

C は circuit なので、$r(C) < |C|$ がいえ、任意の $e \in C$ に対して、$r\bigl(C - \{e\}\bigr) = |C| - 1$ がいえる。これらより、$|C| - 1 = r\bigl(C - \{e\}\bigr) \leq r(C) < |C|$ となるが、$r(C)$ は整数なので、$r(C) = |C| - 1$ を得る。

一方で、定理 1.41 より、

$$r(C) = \left| \, V(\overline{C}) \, \right| - \left(\overline{C}\text{ の連結成分の個数}\right)$$

となる。よって、

$$|C| - 1 = \left| \, V(\overline{C}) \, \right| - \left(\overline{C}\text{ の連結成分の個数}\right) < |C|$$

がいえる。このとき、定理 1.10 より $\overline{C}$ が林でないことが分かるので、$\overline{C}$ は閉路を含むことが分かる。

ここで、$\overline{C}' \subsetneqq \overline{C}$ がグラフ G の閉路 とすると、上の証明より C' が circuit となり、C が circuit ということに矛盾する。よって、$\overline{C}$ は閉路となる。ゆえに、C をグラフ G の matroid での circuit とすると、$\overline{C}$ が、グラフ G の閉路になる。 ∎

2章　平面上の格子

平面内の $m \times n$ の正方格子フレームを考える。つまり、縦が m 個、横が n 個の格子状に並んだ単位正方形の頂点をフレームの頂点とし、単位正方形の各辺を梁とするフレームを考える。また、ここでは、支柱の集合は各単位正方形の対角線に限定する。

この章では、この $m \times n$ 格子のフレームを標準的な位置で考えて、その固定について考えていく。第一章で、フレームの固定は $r(B) = rank\{\varphi_c | c \in B\}$ と密接な関係にあった。この章では$m \times n$格子のフレームの matroid を決定する。

2.1　line motion

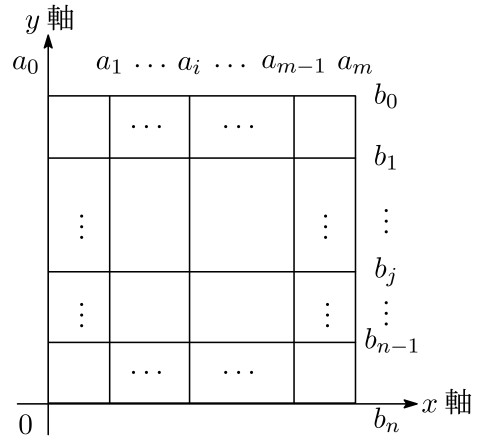
$V = \{(i,j) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, \ldots, m, \ \ j = 0, \ldots, n\}$ とし、$E = \{\{v, v'\} \subset V \mid v$ と v' の間の長さは $1\}$ として、$G = (V, E)$ とする。また、写像 p を V から $\mathbb{R}^2$ への包含写像とすると、(G, p) はフレームとなる。このフレームのことを $m \times n$ **格子**といい、特に、サイズが明らかな時は**格子**ということもある。

また、このフレームに支柱を入れることを考えるが、支柱は梁によって作られる単位正方形の対角線に限定する。

定義 2.1 梁を含む直線のうち格子と交わる部分の線分を **line** という。
y 軸に平行な line のうち、左から $(i+1)$ 番目の line を a_i と呼び、x 軸に平行な line のうち、上から $(j+1)$ 番目の line を b_j と呼ぶ。

□

具体的には次の図のようになる。



次に、フレームの motion を考える。motion μ が頂点 (i,j) に定める初速ベクトルを $\mu^{(i,j)}$ と表し、

任意の $\mu \in M$ を、$\mu = \left(\mu^{(i,j)} \,\middle|\, i = 0, \ldots, m,\ \ j = 0, \ldots, n\right)$ と表示する。

定義 2.2 $\mu = \left(\mu^{(i,j)} \,\middle|\, i = 0, \ldots, m,\ \ j = 0, \ldots, n\right)$ を格子の motion とする。$\mu^{(i,j)}$ がある line l 上の頂点を除いて 0 のとき、この μ のことを l を動かす **line motion** という。 □

$\mu \in M$ を l を動かす line motion とする。l 上にある頂点での初速ベクトルを考えると、mechanical principle によって、これらは、l 上に同じ射影を持つことになる。また、l と垂直に交わる line に、l との交点での初速ベクトルを射影すると mechanical principle によって 0 ベクトルが出てくることが分かる。

さて、motion υ_k, θ_l を

$$\upsilon_k = \left({\upsilon_k}^{(i,j)} \,\middle|\, {\upsilon_k}^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ {\delta^k}_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, m \right) \quad (k = 0, \ldots, m)$$

$$\theta_l = \left({\theta_l}^{(i,j)} \,\middle|\, {\theta_l}^{(i,j)} = \begin{pmatrix} {\delta^{n-l}}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n \right) \quad (l = 0, \ldots, n)$$

と定義すると、$\upsilon_i\ (i = 0, \ldots, m)$、$\theta_j\ (j = 0, \ldots, n)$ は mechanical principle を満たし、line motion となる。$\upsilon_i\ (i = 0, \ldots, m)$ は $a_i\ (i = 0, \ldots, m)$ を動かす line motion であり、$\theta_j\ (j = 0, \ldots, n)$ は $b_j\ (j = 0, \ldots, n)$ を動かす line motion である。

定理 2.3 $\upsilon_i\ (i = 0, \ldots, m)$、$\theta_j\ (j = 0, \ldots, n)$ は $m \times n$ 格子の motion space M の基底になる。

証明　まず、M が line motion で生成されることを示す。

μ を任意の motion とする。μ が頂点 (i, j) に定める初速ベクトルを、

$$\mu^{(i,j)} = \begin{pmatrix} {a_H}^{(i,j)} \\ {a_V}^{(i,j)} \end{pmatrix} \quad \left({a_H}^{(i,j)}, {a_V}^{(i,j)} \in \mathbb{R}\right)$$

とすると、$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を使って、

$$\mu^{(i,j)} = {a_V}^{(i,j)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + {a_H}^{(i,j)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。

μ は mechanical principle を満たすので、ある line 上に存在するすべての頂点について、各頂点での初速ベクトルをその line を延長した直線上に射影すると、どの頂点でも同じベクトルが出てくる。よって、j によらず、${a_V}^{(i,j)}$ は一定になるので、これを ${a_V}^i$ とおき、また、i によらず、${a_H}^{(i,j)}$ は一定になるので、これを ${a_H}^j$ とおくと、

$$\mu^{(i,j)} = \sum_{k=0}^{m} {a_V}^k {\upsilon_k}^{(i,j)} + \sum_{l=0}^{n} {a_H}^l {\theta_{n-l}}^{(i,j)}$$

と書ける。したがって、$\mu = \left(\mu^{(i,j)}\right)$ なので、

$$\mu = \sum_{k=0}^{m} {a_V}^k \upsilon_k + \sum_{l=0}^{n} {a_H}^l \theta_{n-l}$$

となり、M は line motion で生成される。

次に、line motion が独立であることをいう。

$$\sum_{k=0}^{m} x_k \upsilon_k + \sum_{l=0}^{n} y_l \theta_l = 0 \quad (x_k, y_l \in \mathbb{R})$$

とすると、頂点 (i,j) については、

$$\sum_{k=0}^{m} x_k {\upsilon_k}^{(i,j)} + \sum_{l=0}^{n} y_{n-l} {\theta_{n-l}}^{(i,j)} = 0$$

となる。これより、

$$x_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_{n-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

がいえるので、$x_i = y_{n-j} = 0$ が成り立つ。これはすべての頂点でいえるので、$x_k = y_l = 0$ $(0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq n)$ が成り立つ。よって、υ_i $(i = 0, \ldots, m)$、θ_j $(j = 0, \ldots, n)$ が一次独立となり、これらより、line motion は M の基底となる。 ∎

定理 2.3 より次のことが導かれる。

系 2.4 M を $m \times n$ 格子の motion space とすると、$\dim M = m + n + 2$ となる。また、$\dim M/E = m + n - 1$ となる。

証明 line motion は M の基底なので、line の数が M の次元となる。また、定理 1.22 より $\dim M/E = \dim M - \dfrac{N(N+1)}{2}$ なので、$\dim M/E = (m + n + 2) - 3 = m + n - 1$ となる。 ∎

以下、line motion υ_i $(i = 0, \ldots, m)$、θ_j $(j = 0, \ldots, n)$ を M の標準的基底として、M の元を成分表示するときはこの基底をこの順番で用いる。例えば、

$$\mu = \sum_{k=0}^{m} x_k \upsilon_k + \sum_{l=0}^{n} y_l \theta_l$$

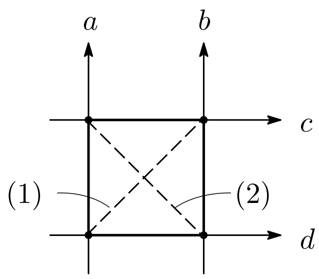
の成分表示は

$$(x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_n)$$

となる。また、M には υ_i $(i = 0, \ldots, m)$、θ_j $(j = 0, \ldots, n)$ を正規直交基底とする内積を入れる。

これから、支柱を格子に入れることを考える。支柱は正方形の対角線だったので、一つの正方形に入る支柱は二種類存在する。今から、この二種類の支柱の mechanical principle を比較してみる。

今、任意の motion μ を考え、次の図のように正方形の四辺を通る line での μ の成分を a, b, c, d と定めて、支柱をおく。



支柱が (1) のとき、支柱の右の端点での初速ベクトルは (c, b) で、支柱の左の端点での初速ベクトルは (d, a) となる。これらのベクトルは対角線上に同じ射影を持つという条件が mechanical principle だったので、

$$a + d = b + c \tag{2.1}$$

を得る。また、支柱が (2) のとき、支柱の右の端点での初速ベクトルは (d, b) で、支柱の左の端点での初速ベクトルは (c, a) となる。これらのベクトルは対角線上に同じ射影を持つことは、

$$-c + a = -d + b$$

と同値で、これは等式 (2.1) と同値である。よって、どちらの対角線を支柱と考えても mechanical principle は同じで、どちらの支柱も、motion space M 上では同じ制約を与えることが分かる。以下、支柱の向きは (2) だけを考えることにするが、ある支柱の集合 B でいくつかの支柱を逆の傾きの対角線に変えても、$r(B)$ が不変であることに注意する。

次に、B を支柱の集合として、$c \in B$ が入る正方形の四辺を通る line を $a_i, a_{i+1}, b_j, b_{j+1}$ とする。このとき、$\varphi_c \in M^*$ を 1 章と同様に定義して、$\mu \in M$ を

$$\mu = \sum_{k=0}^{m} x_k \upsilon_k + \sum_{l=0}^{n} y_l \theta_l \ (x_k, y_l \in \mathbb{R})$$

とおけば、

$$\varphi_c(\mu) = (x_i - x_{i+1}) - (y_j - y_{j+1}) \tag{2.2}$$

がいえる。つまり、$\varphi_c(\mu)$ を成分を使って書けば

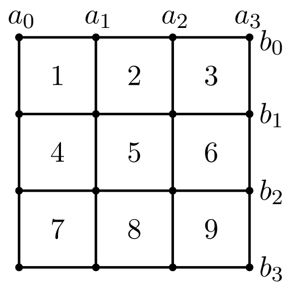
$$\varphi_c(\mu) = (0, \ldots, 0, \ \underset{a_i}{1}, \ \underset{a_{i+1}}{-1}, \ 0, \ldots, 0, \ \underset{b_j}{-1}, \ \underset{b_{j+1}}{1}, \ 0 \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \\ y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となるので、μ_c の成分表示は

$$(0, \ldots, 0, \ \underset{a_i}{1}, \ \underset{a_{i+1}}{-1}, \ 0, \ldots, 0, \ \underset{b_j}{-1}, \ \underset{b_{j+1}}{1}, \ 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+n+2}$$

となる。ここで、μ_c は 1 章で定義した $\varphi_c(\mu) = \langle \mu_c, \mu \rangle$ を満たす M の元である。この対応は M と M^* の同型を与えるから、$r(B)$ を計算するときはこの μ_c の階数を計算すればよいことが分かる。

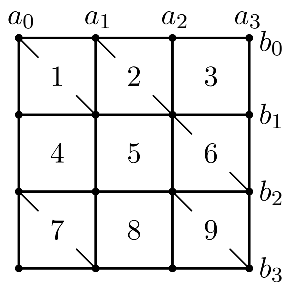
例 2.5 上記のことを 3×3 格子で説明する。次の図のように正方形に番号を付けて、これを支柱の番号とする。



このとき、支柱 i に対応するベクトル μ_i をすべて成分表示する。得られた数ベクトルを縦に並べると次のようになる。ただし、$\cdot$ は 0 を表すものとする。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\
(& 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot &) & 1 \\
(& \cdot & 1 & -1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot &) & 2 \\
(& \cdot & \cdot & 1 & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot &) & 3 \\
(& 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot &) & 4 \\
(& \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot &) & 5 \\
(& \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot &) & 6 \\
(& 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 &) & 7 \\
(& \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 &) & 8 \\
(& \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 &) & 9
\end{array}
$$

このとき、次の図のように支柱の集合 B を入れて考える。



すると、支柱 i に対応するベクトル μ_i を成分表示して、得られた数ベクトルを縦に並べた行列 A は

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\
1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\
\cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$

となるので、A の階数を考えると、$rank(A) = 5$ となり、これは、$r(B) = 5$ となることを表している。よって、定理 1.31 より、$\dim M(B)/E = 0$ となり、これらの支柱を入れると rigid であることが分かる。

2.2 shear space

例 2.5 のようにすれば、$r(B)$ を使って格子の固定を判定することができるが、支柱が入った格子を見て rigid かどうかを視覚的に判断したい。そのための準備をこの節で行う。

隣り合う line、つまり、お互いが平行でその間の距離が 1 の line の組を **hall** と呼び、hall に $A_i = \{a_{i-1}, a_i\}, B_j = \{b_{j-1}, b_j\} \quad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n)$ と名前を付ける。

定義 2.6 hall 全体の集合 $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$ から $\mathbb{R}$ への写像の全体を S とおく。
このとき、S を **shear space** といい、S の元を **shear** という。 □

このとき、$s, s' \in S, \lambda \in \mathbb{R}$ とおき、$X \in \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$ とする。S の演算を

$$\begin{aligned}(s+s')(X) &= s(X) + s'(X) \\ (\lambda s)(X) &= \lambda\bigl(s(X)\bigr)\end{aligned}$$

のように定義すると S はベクトル空間になる。

ここで、$s(A_i) = X_i, s(B_j) = Y_j \quad (X_i, Y_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n)$ となる s に対して、$(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ を対応させると、S は $\mathbb{R}^{m+n}$ と同型となる。以下、これを S の成分表示として用いる。

次に、M と S の間の写像を用意する。定理 2.3 より、$\upsilon_i \ (i = 0, \dots, m)$、$\theta_j \ (j = 0, \dots, n)$ は M の基底で、前節において、$\mu = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} x_k \upsilon_k + \sum_{l=0}^{n} y_l \theta_l \in M$ の成分表示を $(x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n)$ と定めた。また、S の元の成分表示は $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ なので、次のように写像を定める。

定義 2.7 M から S への線形写像 σ を次のように定める。

$$\begin{aligned}\sigma(x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n) &= (x_1 - x_0, \dots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \dots, y_n - y_{n-1}) \\ &= (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)\end{aligned}$$

□

この定義より $\ker(\sigma) = \bigl\{(x_0, \dots, x_0, y_0, \dots, y_0) \bigm| x_0, y_0 \in \mathbb{R}\bigr\}$ となることは明らかである。

一方で、$T = \bigl\{\mu \in M \bigm| \mu^{(i,j)}\text{は } i, j \text{ によらず一定}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n\bigr\}$ とおく。つまり、T は平行移動の motion 全体である。$\mu^{(i,j)}$ の成分は (x_i, y_j) と書けるので、「$\mu^{(i,j)}$ が i, j によらず一定」ということは「$\mu^{(i,j)}$ の成分である (x_i, y_j) が i, j によらず一定」といいかえることができる。これより、$T = \ker(\sigma)$ がいえる。

定義 2.8 頂点 (i, j) に対して、S から M への線形写像 $\tau_{(i,j)}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}\tau_{(i,j)}(X_0, \dots, Y_n) = \bigl(&-(X_1 + \dots + X_i), \dots, -X_i, 0, X_{i+1}, \dots, X_{i+1} + \dots + X_m, \\ &-(Y_1 + \dots + Y_j), \dots, -Y_j, 0, Y_{j+1}, \dots, Y_{j+1} + \dots + Y_n\bigr)\end{aligned}$$

□

$\tau_{(i,j)}(s)$ は、頂点 (i, j) が固定されていると考えて、各 hall X に $s(X)$ のずれが生じたとき、line a_k $(0 \le k \le m)$ の a_i に対する相対的なずれ、及び、line b_l $(0 \le l \le n)$ の b_j に対する相対的なずれを表している。

定理 2.9 定義 2.7、2.8 のように、σ、$\tau_{(i,j)}$ を定める。
このとき、σ は全射で $\tau_{(i,j)}$ は単射である。

証明 $s \in S$ を $s = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ とおき、$\sigma \circ \tau_{(i,j)}(s)$ を考える。

そのために、motion $\tau_{(i,j)}(s)$ に $\left(\sum_{k=1}^{i} X_k, \ldots, \sum_{k=1}^{i} X_k, \sum_{l=1}^{j} Y_l, \ldots, \sum_{l=1}^{j} Y_l \right) \in T$ を加えてみる。すると、

$$\tau_{(i,j)}(s) + \left(\sum_{k=1}^{i} X_k, \ldots, \sum_{k=1}^{i} X_k, \sum_{l=1}^{j} Y_l, \ldots, \sum_{l=1}^{j} Y_l \right) = \left(0, X_1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} X_k, 0, Y_1, \ldots, \sum_{l=1}^{n} Y_l \right)$$

が成り立ち、右辺は、$\tau_{(0,0)}(s)$ に一致する。よって、

$$\tau_{(i,j)}(s) - \tau_{(0,0)}(s) = \left(-\sum_{k=1}^{i} X_k, \ldots, -\sum_{k=1}^{i} X_k, -\sum_{l=1}^{j} Y_l, \ldots, -\sum_{l=1}^{j} Y_l \right)$$

となり、$\tau_{(i,j)}(s) - \tau_{(0,0)}(s) \in T$ がいえる。これより、$\sigma\Big(\tau_{(i,j)}(s) - \tau_{(0,0)}(s)\Big) = 0$ がいえ、

$$\sigma\Big(\tau_{(i,j)}(s)\Big) = \sigma\Big(\tau_{(0,0)}(s)\Big)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sigma\Big(\tau_{(0,0)}(s)\Big) &= \sigma\left(\left(0, X_1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} X_k, 0, Y_1, \ldots, \sum_{l=1}^{n} Y_l\right)\right) \\
&= \left(X_1 - 0, (X_2 + X_1) - X_1 \ldots, \sum_{k=1}^{m} X_k - \sum_{k=1}^{m-1} X_k, Y_1 - 0, \ldots, \sum_{l=1}^{n} Y_l - \sum_{l=1}^{n} Y_{l-1}\right) \\
&= (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)
\end{aligned}$$

なので、

$$\sigma\Big(\tau_{(i,j)}(s)\Big) = \sigma\Big(\tau_{(0,0)}(s)\Big) = s$$

が成り立つ。したがって、$\sigma \circ \tau_{(i,j)} = 1_S$ となり、σ は全射で $\tau_{(i,j)}$ は単射がいえる。 ∎

定理 2.10 $T \oplus S$ から M への写像 f を $f(t,s) = \Big(t + \tau_{(i,j)}(s)\Big)$ $(t \in T, s \in S)$ とおく。このとき、

$$f : T \oplus S \cong M$$

が成り立つ。

証明 これは、f が全単射であることをいえばよい。
まず、f が全射であることを示そう。$\mu \in M$ として $\sigma\Big(\mu - \tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu)\Big)$ を考える。すると、

$$\sigma\Big(\mu - \tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu)\Big) = \sigma(\mu) - \sigma\Big(\tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu)\Big) = 0$$

がいえ、$\mu - \tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu) \in T$ となる。$\mu - \tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu) = t$、$\tau_{(i,j)} \circ \sigma(\mu) = s'$ とおくと、

$$\mu = t + s' \quad \Big(t \in T, s' \in \tau_{(i,j)}(S) \Big)$$

を得る。ここで、$s' = \tau_{(i,j)}(s)$ となる $s \in S$ を取ってくれば、μ に対して $\mu = f(t, s)$ となる $t \in T, s \in S$ が存在することが分かるので、f は全射である。

次に、f が単射であることを示す。

$s \in S, t \in T$ とおいて、$f(t, s) = 0$ と仮定すると、f の定義より $t + \tau_{(i,j)}(s) = 0$ となる。$t \in T$ なので

$$\sigma(0) = \sigma\Big(t + \tau_{(i,j)}(s)\Big) = \sigma \circ \tau_{(i,j)}(s) = s$$

が成り立ち、$s = 0$ となる。よって、$t = 0$ を得る。つまり、$\ker f = 0$ で f は単射である。

したがって、$T \oplus S \cong M$ がいえる。 ∎

内部自由度を考えるために M/E を考えたいが、上記のことから、$S \cong M/T$ が分かる。そこで、$S/W \cong M/E$ となるような S の部分空間 W を求めたい。

点 $P \in \mathbb{R}^2$ を中心に角速度 ω $(0 \leq \omega < 2\pi)$ で回転させる運動を考える。この運動が与える motion を $\varrho \in M$ とする。このとき、$x \in \mathbb{R}^2$ の初速ベクトル ϱ^x は

$$\varrho^x = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} (x - P)$$

と表すことができるので

$$\varrho^x = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x - P)$$

を得る。ここで、$x = (i, j), P = (P_x, P_y)$ とすると、

$$\varrho^{(i,j)} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i - P_x \\ j - P_y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -j + P_y \\ i - P_x \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、$\varrho = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k \upsilon_k + \sum_{k=0}^{m} y_k \theta_k$ とおくと、頂点 (i, j) を通る line は a_i, b_{n-j} だったので、ϱ の成分は $x_i = \omega i - \omega P_x, \quad y_{n-j} = -\omega j + \omega P_y \quad (i = 0, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, n)$ となる。また、$s = \sigma(\varrho)$ となる $s \in S$ の成分表示を $(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ とおくと、$X_i = x_i - x_{i-1}$ だったので、

$$X_i = \omega i - \omega P_x - \big\{\omega(i-1) - \omega P_x\big\} = \omega \quad (i = 1, \ldots, m)$$

となる。また、$Y_{n-j} = y_{n-j} - y_{(n-j)-1} = y_{n-j} - y_{n-(j+1)}$ なので、

$$Y_{n-j} = -\omega j + \omega P_y - \big\{-\omega(j+1) + \omega P_y\big\} = \omega \quad (j = 0, \ldots, n-1)$$

がいえる。したがって、回転の motion $\varrho \in M$ について

$$\sigma(\varrho) = \omega(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m+n}) \in S \tag{2.3}$$

が成り立つ。このとき、

$$\rho = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m+n}) \in S$$

とおくと、次が成り立つ。

定理 2.11 $\bar{\rho}$ を $\rho = (1, \dots, 1) \in S$ が張る空間とすると、

$$E = \sigma^{-1}(\bar{\rho})$$

となる。

証明　まず、$E \supset \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ を示す。$\mu \in \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ とすると、$\sigma(\mu) \in \bar{\rho}$ がいえるので、

$$\sigma(\mu) = (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m+n}) \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

と書ける。このとき、$\sigma(\mu)$ はある回転の運動の motion ϱ を使い、$\sigma(\mu) - \sigma(\varrho) = 0$ とすることができる。実際、等式 (2.3) で $\omega = \alpha$ とおけばよい。これより、$\sigma(\mu - \varrho) = 0$ となるので、$\mu - \varrho \in T \subset E$ がいえる。$\varrho \in E$ なので、$\mu \in E$ となる。

次に、$E \subset \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ を示そう。$\mu \in E$ とおくと

$$\mu = t + \varrho \quad (t \in T,\ \varrho \text{は回転運動の初速ベクトルで与えられる motion})$$

と書けるはず。これより、

$$\sigma(\mu) = \sigma(t + \varrho) = \sigma(\varrho) \in \bar{\rho}$$

となり、$\sigma(\mu) \in \bar{\rho}$ を得る。よって、$\mu \in \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ が成り立つので、$E \subset \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ となる。

これらより、$E = \sigma^{-1}(\bar{\rho})$ がいえる。 ∎

この $\bar{\rho}$ を使えば、次のことが成立する。

定理 2.12 $\bar{\rho}$ を $\rho = (1, \dots, 1) \in S$ が張る空間とする。このとき、

$$M/E \cong S/\bar{\rho}$$

が成り立つ。

証明　M/E から $S/\bar{\rho}$ への写像 φ を $\mu + E \in M/E$ に対して、$\varphi(\mu + E) = \sigma(\mu) + \bar{\rho}$ とおく。この φ が全単射であることがいえればよい。

まず、φ の定義が $\mu + E \in M/E$ の代表元の選び方には影響されないことを示す。$\mu + E = \mu' + E$ とおくと、同値類のとり方より、$\mu - \mu' \in E$ が分かる。ここで、$\mu - \mu' = t + \varrho \quad (t \in T,\ \varrho$は回転運動の初速ベクトルで与えられる motion) とおくと、

$$\begin{aligned}\sigma(\mu - \mu') &= \sigma(t + \varrho) \\ &= \sigma(t) + \sigma(\varrho) \\ &= \sigma(\varrho) \in \bar{\rho}\end{aligned}$$

となるので、

$$\sigma(\mu)+\bar{\rho}=\sigma(\mu')+\bar{\rho}$$

が成り立ち、

$$\varphi(\mu+E)=\sigma(\mu)+\bar{\rho}=\sigma(\mu')+\bar{\rho}=\varphi(\mu'+E)$$

がいえる。

これらより、$\mu+E\in M/E$ の代表元の選び方に φ は影響されないことが分かる。

次に、φ が全射であることを示そう。$s+\bar{\rho}\in S/\bar{\rho}$ とおくと、σ が全射だったので、$\sigma(\mu)=s$ となる $\mu\in M$ が存在する。よって、$s+\bar{\rho}=\sigma(\mu)+\bar{\rho}=\varphi(\mu+E)$ となり、φ は全射である。

最後に、φ が単射であることをいう。$\varphi(\mu+E)=0+\bar{\rho}$ とすると、$\sigma(\mu)+\bar{\rho}=0+\bar{\rho}$ がいえる。これより、$\sigma(\mu)\in\bar{\rho}$ となり、$\mu\in\sigma^{-1}(\bar{\rho})=E$ を得る。よって、$\mu+E=E$ がいえるので、$\ker(\varphi)=\{0+E\}$ が成り立ち、φ は単射である。

したがって、$M/E\cong S/\bar{\rho}$ が成立する。 ∎

定理 2.12 より $\dim M/E=\dim S/\bar{\rho}$ が成り立つ。

これから、M の代わりに S を使ってフレームの固定を考えたい。そのために、M^* と S^* の関係や $r(B)$ と S の関係について述べる。

支柱 c で決まる M から $\mathbb{R}$ への写像 φ_c に対して S から $\mathbb{R}$ への写像 $\hat{\varphi}_c$ を以下のように定める。すなわち、$s\in S$ に対して $s=\sigma(\mu)$ となる $\mu\in M$ を取ってきて、

$$\hat{\varphi}_c(s)=\varphi_c(\mu)$$

と定義する。

このとき、$\mu\in M$ の選び方に $\hat{\varphi}_c(s)$ が影響されないことを示す。$s\in S$ に対して、$s=\sigma(\mu)=\sigma(\mu')$ とすると、

$$\sigma(\mu-\mu')=\sigma(\mu)-\sigma(\mu')=0$$

が成り立つ。よって、$\mu-\mu'\in T\subset E$ がいえる。ここで、T の元は $(x_0,\dots,x_0,y_0,\dots,y_0)$ という形で書けるので、等式 (2.2) より、$\varphi_c(\mu-\mu')=0$ となる。したがって、$\varphi_c(\mu)=\varphi_c(\mu')$ となるので、

$$\hat{\varphi}_c(s)=\hat{\varphi}_c(s')$$

がいえる。よって、$\mu\in M$ の代表元の選び方に $\hat{\varphi}_c(s)$ は影響されないことが分かる。

次に、S^* から M^* への写像 σ^* を $\hat{\varphi}\in S^*$ に対して、$\sigma^*(\hat{\varphi})=\hat{\varphi}\circ\sigma$ と定義する。このとき、σ^* が単射を示そう。そのために $\ker\sigma^*$ を調べる。$\sigma^*(\hat{\varphi})=0$ とおくと、$\hat{\varphi}\circ\sigma=0$ となる。

σ の全射性より、任意の $s\in S$ に対して、$\sigma(\mu)=s$ となるような $\mu\in M$ が取れる。すると、$\hat{\varphi}\circ\sigma(\mu)=\hat{\varphi}(s)=0$ がいえ、$\hat{\varphi}\equiv 0$ を得る。よって、σ^* は単射になる。

これを使うと次のことがいえる。

定理 2.13 M を motion space、S を shear space として、B を支柱の集合とする。$c\in B$ に対して、$\varphi_c\in M^*$、$\hat{\varphi}_c\in S^*$ を上記のように定める。このとき、ベクトル空間として

$$\langle\hat{\varphi}_c|c\in B\rangle\cong\langle\varphi_c|c\in B\rangle$$

が成り立つ。

証明　まず、φ_c に対して、$\sigma^*(\hat{\varphi}_c) = \hat{\varphi}_c \circ \sigma$ なので、任意の $\mu \in M$ に対して、$s = \sigma(\mu)$ とおくと、

$$\begin{aligned}\bigl(\sigma^*(\hat{\varphi}_c)\bigr)(\mu) &= \bigl(\hat{\varphi}_c \circ \sigma\bigr)(\mu) \\ &= \hat{\varphi}_c\bigl(\sigma(\mu)\bigr) \\ &= \hat{\varphi}_c(s) \\ &= \varphi_c(\mu)\end{aligned}$$

となり、$\varphi_c = \sigma^*(\hat{\varphi}_c)$ が成り立つ。

ここで、$B = \{c_1, \ldots, c_n\}$ とおくと、$\hat{\varphi} \in \langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ は

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\varphi}_{c_i} \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

と書ける。これより、

$$\begin{aligned}\sigma^*(\hat{\varphi}) &= \sigma^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\varphi}_{c_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma^*\bigl(\hat{\varphi}_{c_i}\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{c_i}\end{aligned} \tag{2.4}$$

となり、σ^* による $\langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ の像は $\langle \varphi_c | c \in B \rangle$ となることが分かった。

もともと、σ^* は単射なので、これを、$\langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ に制限し、$\langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ から $\langle \varphi_c | c \in B \rangle$ への写像としても σ^* は単射である。

次に、$\sigma^* : \langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle \longrightarrow \langle \varphi_c | c \in B \rangle$ が全射であることをいう。$\varphi \in \langle \varphi_c | c \in B \rangle$ を

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{c_i} \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

とおく。これに対して、

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\varphi}_{c_i} \in \langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$$

を取ってくると、等式 (2.4) より $\sigma^*(\hat{\varphi}) = \varphi$ となる $\hat{\varphi} \in \langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ が存在することが分かる。よって、$\langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle$ に制限した σ^* は全射である。

したがって、$\langle \hat{\varphi}_c | c \in B \rangle \cong \langle \varphi_c | c \in B \rangle$ となる。 ∎

定理 2.14 B を支柱の集合として B を加えた$m \times n$格子の motion space を $M(B)$ とする。このとき、

$$M(B) = \sigma^{-1}\Bigl(\bigl\{s \in S \bigm| \hat{\varphi}_c(s) = 0, c \in B\bigr\}\Bigr)$$

が成り立つ。

証明　$\mu \in M(B)$ であることと、すべての $c \in B$ について $\varphi_c(\mu) = 0$ となることは同値である。このとき、定理 2.13 より、$\varphi_c(\mu) = \hat{\varphi}_c\bigl(\sigma(\mu)\bigr)$ なので、$\hat{\varphi}_c\bigl(\sigma(\mu)\bigr) = 0$ となる。これは、$\sigma(\mu) \in \bigl\{s \in S \bigm| \hat{\varphi}_c(s) = 0, c \in B\bigr\}$ と同値であり、$\mu \in \sigma^{-1}\Bigl(\bigl\{s \in S \bigm| \hat{\varphi}_c(s) = 0, c \in B\bigr\}\Bigr)$ と同値である。 ∎

定理 2.15 フレーム$m \times n$格子に入るすべての支柱の集合をCとする。フレーム$m \times n$格子の matroid はベクトル集合$\{\hat{\varphi}_c \in S^* | c \in C\}$の matroid と同型である。

証明　支柱の集合Cに対応するベクトル集合$\{\varphi_c \in M^* | c \in C\}$の matroidがフレームの matroidであったので、定理 2.13 より自明である。 ∎

この定理より、支柱の集合Bに対して、定理 1.31 を使うと、$r(B) = rank\{\hat{\varphi}_c \in S^* | c \in B\}$となる。また、$S$の内積を次のように定義する。すなわち、$s, s' \in S$に対して、$s$の成分表示を$(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$と、$s'$の成分表示を$(X_1', \ldots, X_m', Y_1', \ldots, Y_n')$として、

$$\langle s, s' \rangle = \sum_{i=1}^{m} X_i X_i' + \sum_{j=1}^{n} Y_j Y_j'$$

と定義する。ここで、1 章のμ_cの定義と同様に、$\hat{\varphi}_c$に対応する shear $s_c \in S$を$\hat{\varphi}_c(s) = \langle s_c, s \rangle$を満たす$S$の元とすると、$r(B) = \dim\langle s_c | c \in B \rangle$と考えることもできる。

命題 2.16 hall A_i, B_jの交わる正方形に支柱cが入るとする。このとき、$s \in S$に対して$\hat{\varphi}_c(s) = \langle s_c, s \rangle$を満たす$s_c \in S$の成分は

$$(0, \ldots, 0, \underset{A_i}{-1}, 0, \ldots, 0, \underset{B_j}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

と表せる。

証明　$s = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Yn)$とおくと、$\sigma(\mu) = s$となる$\mu \in M$として$\mu = \left(0, X_1, X_2 + X_1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} X_k, 0, Y_1, \ldots, \sum_{l=1}^{n} Y_l\right)$がとれる。ここで、hall A_i, B_jが交わる場所にある正方形の四辺は line $a_i, a_{i-1}, b_j, b_{j-1}$が囲んでいるので、

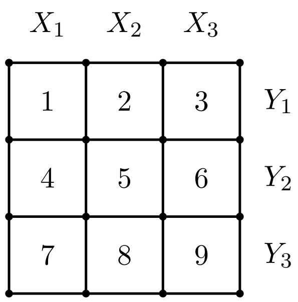
$$\begin{aligned} \varphi_c(\mu) &= (x_{i-1} - x_i) - (y_{j-1} - y_j) \\ &= -X_i + Y_j \end{aligned}$$

がいえる。これより、$\hat{\varphi}_c(s) = -X_i + Y_j$が成り立ち、$s_c$の成分は

$$(0, \ldots, 0, \underset{A_i}{-1}, 0, \ldots, 0, \underset{B_j}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

と表せる。 ∎

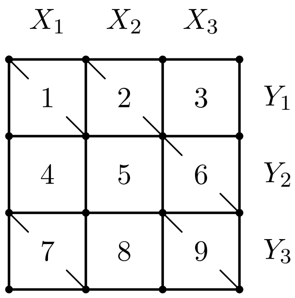
例 2.17 上記のことを例 2.5 に適用してみる。例 2.5 と同様に定義して、次図のように shear をおく。



このとき、支柱 i に対応するベクトル s_i をすべて成分表示する。得られた数ベクトルを縦に並べると次のようになる。ただし、$\cdot$ は 0 を表すものとする。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\
(& -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot &) & 1 \\
(& \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot &) & 2 \\
(& \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot &) & 3 \\
(& -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot &) & 4 \\
(& \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot &) & 5 \\
(& \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot &) & 6 \\
(& -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 &) & 7 \\
(& \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 &) & 8 \\
(& \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 &) & 9
\end{array}
$$

このとき、次の図のように支柱の集合 B を入れて考える。



すると、支柱 i に対応するベクトル μ_i を成分表示して、得られた数ベクトルを縦に並べた行列 A' は

$$
A' = \begin{pmatrix}
-1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
$$

となる。A' の階数を考えると、$rank(A') = 5$ となり、$r(B) = 5$ が得られる。

2.3　$m \times n$ 格子と matroid

前節までで、フレーム$m \times n$格子の matroid は S^* 内のベクトル集合の matroid と考えることができたが、実は、この matroid はあるグラフの matroid と同型である。今からこのことを示す。

$V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$、$E = \{\{A_i, B_j\} \subset V \mid i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n\}$ とおき、グラフ $K_{m,n} = (V, E)$ を考えると、二部グラフになる。このグラフ $K_{m,n}$ と$m \times n$格子を matroid を使って関連付ける。

定理 2.18 フレーム$m \times n$格子の matroid は、グラフ $K_{m,n}$ の matroid と同型である。

証明　Cを$m\times n$格子に入るすべての支柱の集合として、Cに対応するベクトル集合$\langle \hat{\varphi}_c \in S^* | c \in C\rangle$を考える。このとき、$c\in C$をhall A_i, B_jの交わる場所にある正方形に入る支柱とすると、$\hat{\varphi}_c(s) = \langle s_c, s\rangle$となる$s_c \in S$の成分表示は

$$(0,\ldots,0,\underset{A_i}{-1},0,\ldots,0,\underset{B_j}{1},0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

であった。これは、例1.40に従い、$K_{m,n}$の頂点を$A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n$の順に番号付けて、$e=\{A_i,B_j\}\in E(K_{m,n})$に対応させたベクトル$\hat{e}$に他ならない。つまり、ベクトル集合$\{\hat{\varphi}_c \in S^* | c \in C\}$のmatroidは、グラフ$K_{m,n}$のmatroidと一致するので、フレーム$m\times n$格子のmatroidと、グラフ$K_{m,n}$のmatroidとは同型である。 ∎

フレーム$m\times n$格子のmatroidは$K_{m,n}$のmatroidと同型だから、グラフ$K_{m,n}$の性質がフレームの固定に関する性質として反映される。このことについて述べる。

上の定理で支柱cの定めるベクトル$s_c\in S$はグラフ$K_{m,n}$の辺に対応した。この対応に従い、A_i, B_jが交わる正方形に入る支柱をグラフ$K_{m,n}$の辺$\{A_i,B_j\}$とみなす。ここでは、$m\times n$格子のすべての支柱の集合をCとして、$B\subset C$とする。Bを辺集合として、$V(K_{m,n})$を頂点集合とするグラフを$\hat{B}$とおく。また、Bを辺集合としてBの端点を頂点集合とするグラフを$\bar{B}$とする。このとき、$\bar{B}$は1章のときと同様に$\hat{B}$から孤立点を取り除いたグラフに他ならない。

定理 2.19 $m\times n$格子のすべての支柱の集合をCとして、$B\subset C$とする。

このとき、Bが$m\times n$格子に加えるとstrictly rigidになる極小の支柱の集合であるための必要十分条件は、$\hat{B}$はグラフ$K_{m,n}$の全域木となることである。

証明　Bを$m\times n$格子に加えるとstrictly rigidになるということは、

$$r(B) = m+n-1$$

と同値であり、これは、定理1.41より、

$$(\hat{B}\text{の連結成分の個数}) = 1$$

と同値である。これより、Bは$m\times n$格子に加えるとstrictly rigidになる支柱の集合ということと、$\hat{B}$が連結な全域グラフであることは同値であることが分かる。

よって、Bを$m\times n$格子に加えるとstrictly rigidになる支柱の集合のうち極小なものとすると、$\hat{B}$は極小な連結全域グラフである。したがって、定理1.9、1.10より、$\hat{B}$は全域木となる。

逆に、$\hat{B}$は全域木ならば、$\hat{B}$は極小な連結全域グラフなので、Bは$m\times n$格子に加えるとstrictly rigidになる極小な支柱の集合であることが分かる。 ∎

系 2.20 $m\times n$格子に入るすべての支柱の集合をCとして、$B\subset C$とする。このとき次が成り立つ。

Bがフレーム$m\times n$格子のmatroidでcircuitである。	$\Longleftrightarrow$	$K_{m,n}$の部分グラフ$\bar{B}$が閉路となる。
Bがフレーム$m\times n$格子のmatroidで従属集合である。	$\Longleftrightarrow$	$K_{m,n}$の部分グラフ$\bar{B}$が閉路を含む。
Bがフレーム$m\times n$格子のmatroidで独立集合である。	$\Longleftrightarrow$	$K_{m,n}$の部分グラフ$\bar{B}$が木となる。

証明　$m \times n$格子の matroid がグラフ $K_{m,n}$ の matroid と同型なので、定理 1.37、1.42 より、自明である。 ∎

支柱の集合 B が従属であることは、B を加えたフレームからいくつかの支柱を取り去ってもフレームの自由度が変わらないような "無駄な支柱" があることと同値であり、支柱の集合 B が独立であることは、B を加えたフレームからどの支柱を取り去っても自由度が大きくなってしまうことと同値である。

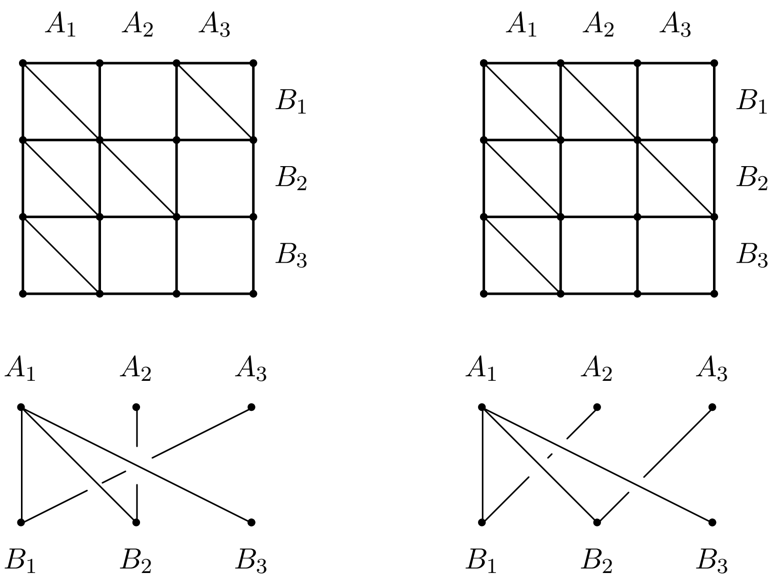
次に、支柱の集合 B が入っている $m \times n$ 格子について、hall A_k と A_l に入っている支柱を入れ替えることを考える。hall A_k と B_p の交わる正方形に入っている支柱を、hall A_l と B_p の交わる正方形に移動し、また、hall A_l と B_q の交わる正方形に入っている支柱を、hall A_k と B_q の交わる正方形に移動する。このとき、hall A_i と A_j を入れ替える前の $m \times n$ 格子の支柱の集合を B、入れ替えた後の格子の支柱の集合を B' とする。ここで、支柱の集合 B と B' を入れた格子を考えるには、グラフ $K_{m,n}$ の部分グラフ、$\hat{B}$ と $\hat{B}'$ を考えればよいが、$\hat{B}$ と $\hat{B}'$ とは、頂点 A_k と A_l が入れ替わっているだけのグラフであることが分かるので、同型なグラフである。よって、

$$r(B) = r(B')$$

が成り立つ。同様に、hall B_i と B_j を入れ替えても、r の値は変化しない。

図 (a) の hall A_2 と A_3 に入る支柱を入れ替えたものが図 (b) である。それぞれの二部グラフを比べてみると、頂点 A_2 と A_3 が入れ替わっているだけのグラフであることが分かる。

つまり、格子の固定への寄与は、直感に反してどの支柱も同じであるといえる。



(a)　　(b)

定義 2.21 C を $m \times n$ 格子に入るすべての支柱の集合として、上記のように $B \subset C$ に対して、$\hat{B} \subset K_{m,n}$ を考える。
$x, y \in V$ に対して x と y をつなぐ道が $\hat{B}$ の中で存在するとき、$x \sim y$ とする。
このとき、$x \sim y$ は同値関係となり、この同値関係によるグラフ $K_{m,n}$ の頂点の分割 $V/\sim$ を

$$\pi = \pi(B)$$

とかいて、B による**頂点の分割**という。また、この分類によって分けた頂点の組のことをそれぞれ、π の **partition** と呼ぶこともある。 □

このことを使うと、定理 1.41 は次のようにいいかえることができる。

定理 2.22 C を $m\times n$ 格子に入るすべての支柱の集合として、$B\subset C$ に対して、$\hat{B}\subset K_{m,n}$ とおき、$\pi=\pi(B)$ とする。

このとき、$\left\{s\in S\;\middle|\;\hat{\varphi}_c(s)=0,\quad c\in B\right\}$ は π だけで決まり、これを S^π とおくと、

$$\begin{aligned}\dim S^\pi &= |\pi|\\ r(B) &= m+n-|\pi|\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 定理 2.18 で見たように、hall A_i と B_j の交わる正方形に入る支柱を c とすると、$e=\{A_i,B_j\}\in E(K_{m,n})$ として、$s_c=\hat{e}\in\mathbb{R}^{m+n}$ であった。よって、

$$\begin{aligned}S^\pi &= \left\{s\in S\;\middle|\;\hat{\varphi}_c(s)=0,\quad c\in B\right\}\\ &= \left\{s\in S\;\middle|\;\langle s_c,s\rangle=0,\quad c\in B\right\}\\ &= \left\{s\in\mathbb{R}^{m+n}\;\middle|\;\langle\hat{e},s\rangle=0,\quad e\in E(\bar{B})\right\}\\ &= \left\langle\hat{e}\;\middle|\;e\in E(\bar{B})\right\rangle^\perp\end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、右辺は、定理 1.41 の証明で見たように、$\hat{B}$ の各連結成分の頂点で同じ成分を持つベクトル集合であった。よって、

$$S^\pi=\left\{s\in S\;\middle|\;s\text{ は同じ partition に含まれる hall }\alpha,\beta\text{ について、}s(\alpha)=s(\beta)\right\}$$

これより、

$$\dim S^\pi=|\pi|$$

及び、

$$\begin{aligned}r(B) &= \dim S-\langle s_c\in S|c\in B\rangle^\perp\\ &= m+n-|\pi|\end{aligned}$$

を得る。 ∎

以上より、$r(B)$ は π だけで決まるので、$r(B)$ のことを $r(\pi)$ と書くこともある。

定理 2.23 C を $m\times n$ 格子のすべての支柱の集合とし、$B\subset C$ とする。また、$\pi=\pi(B)$ とする。

このとき、$m\times n$ 格子に支柱の集合 B をいれたフレームの motion space は $\sigma^{-1}\big(S^\pi\big)$ で、その motion はすべて mechanism である。

証明 定理 2.14 より、$M(B)=\sigma^{-1}\big(S^\pi\big)$ がいえる。

次に、任意の $\mu\in M(B)$ に対して、μ を初速とする運動を考える。ここで、平行運動を考慮すれば $\mu^{(0,0)}=\overrightarrow{0}$ と仮定しても一般性を失わない。$\mu\in\sigma^{-1}(S^\pi)$ なので、$\sigma(\mu)=s=(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n)\in S^\pi$ かつ、$\mu^{(0,0)}=\overrightarrow{0}$ とする。つまり、

$$\mu=\tau_{(0,0)}(s)=\left(0,X_1,\dots,\sum_{k=1}^m X_k,0,Y_1,\dots,\sum_{l=1}^n Y_l\right)$$

である。

これに対して、実数上で定義された複素数値関数を

$$\begin{cases} f_k(t) &= e^{iX_k t} \\ g_l(t) &= ie^{iY_{(n-l+1)}t} \\ f_0(t) &= 0 \\ g_0(t) &= 0 \end{cases} \qquad (k=1,\ldots,m, \quad l=1,\ldots,n)$$

とおく。ただし、i は虚数である。このとき、$f_k(0)=1, g_l(0)=i \quad (k=1,\ldots,m, \quad l=1,\ldots,n)$ となる。

以下、ガウス平面を xy 平面と考えて、$m\times n$格子の各頂点に実際に運動を与えることを考える。頂点 (k,l) に対して、次のような写像 $c_{(k,l)}:(-\varepsilon,+\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{C}$ を与える ($\mathbb{C}$ は複素数全体の集合)。

$$c_{(k,l)}(t)=\sum_{u=0}^{k} f_u(t)+\sum_{v=0}^{l} g_v(t)$$

これは、微分可能な写像で、かつ、運動の条件を満たし、$\left(c_{(k,l)}|k=0,\ldots,m, \quad l=0,\ldots,n\right)$ は梁の長さを変えない。この運動の初速 $\mu=\left(\mu^{(k,l)}\right)$ を考えると

$$\mu^{(k,l)}=\frac{d}{dt}c_{(k,l)}(t)\Big|_{t=0}=\sum_{u=1}^{k} iX_u+\sum_{v=1}^{l}(-Y_{(n-v+1)})$$

となる。頂点 (k,l) の初速ベクトルを縦方向の line に射影すると、$\displaystyle\sum_{u=1}^{k} iX_u$ が得られ、横方向の line に射影すると $\displaystyle\sum_{v=1}^{l}(-Y_v)$ が得られる。すなわち、$M(B)$ の基底として line motion を使って、motion μ を成分表示すると、

$$\mu=\left(0,X_1,\ldots,\sum_{k=1}^{m} X_k,0,Y_1,\ldots,\sum_{l=1}^{n} Y_l\right)$$

となっている。

次に、π の同じ partition 内の頂点を結ぶ $\hat{B}\subset K_{m,n}$ の辺 $\{A_k,B_l\}$ に対応する支柱の長さが変わらないことを示す。

hall A_k と B_l は同じ partition 内なので、$X_k=Y_l$ となる。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c_{(k-1,l-1)}(t)c_{(k,l)}(t)} &= f_k(t)+g_l(t) \\ &= e^{i(X_k t)}+ie^{i(Y_l t)} \\ &= e^{i(X_k t)}(1+i) \end{aligned}$$

なので、$\left\|\overrightarrow{c_{(k-1,l-1)}(t)c_{(k,l)}(t)}\right\|^2$ を計算すると、

$$\left\|\overrightarrow{c_{(k-1,l-1)}(t)c_{(k,l)}(t)}\right\|^2=2$$

となり、支柱の長さが変わらない。よって、$\sigma^{-1}(s)$ は mechanism であることが分かった。 ∎

この定理より S^π を考えれば $m\times n$ 格子の動かし方すべてを考えることができる。最後に、以下の系から、$m\times n$ 格子の固定は、対応するグラフ $K_{m,n}$ の部分グラフで完全に決定されることが分かる。

系 2.24 $m \times n$格子に支柱の集合 B を加えたフレームについては、rigid であることと、strictly rigid であることは同値である。

証明　strictly rigid ならば rigid であることは、定理 1.25 よりいえる。

一方で、$m \times n$格子に支柱の集合 B を加えたフレームが rigid であると仮定する。もし、strictly rigid ではないとすると、

$$\dim M(B) > \dim E$$

となるが、定理 2.23 より、すべての motion が mechanism なので、これより、B を加えた$m \times n$格子は E の元以外の motion を初速に持つ運動が存在する。つまり、格子は rigid ではないことが分かる。これは仮定と矛盾するので、rigid であるならば strictly rigid である。 ∎

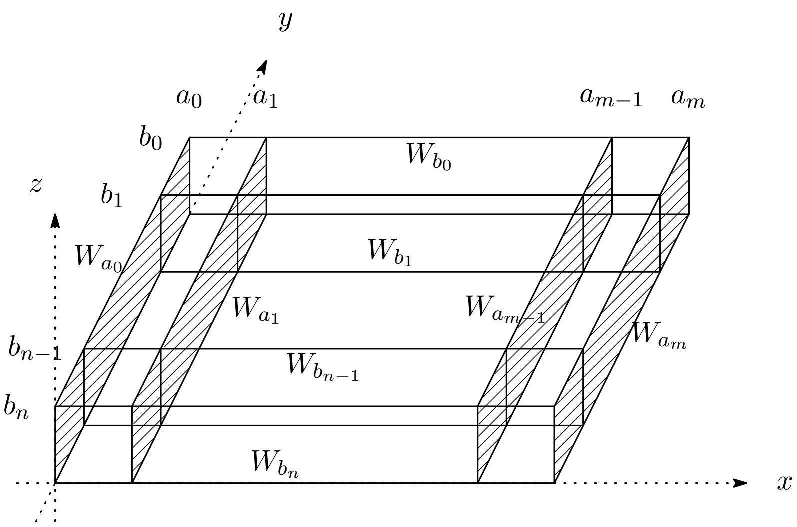
3 章　一階建の建物

空間内で固定された平面上の格子点を端点とする長さが 1 の垂直な棒によって支えられている単位正方形の $m \times n$ 格子を一階建の建物という。つまり、単位立方体が$m \times n$個並んだ $m \times n \times 1$ の格子である。ただし、底面は固定されている。これまでは、平面で格子の固定を考えてきたが、この章では、この地面に固定された一階建の建物の固定について考える。

3.1　建物

$V = \{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \mid p = 0, \ldots, m, \quad q = 0, \ldots, n, \quad r = 0, 1\}$ とし、$E = \{\{v, v'\} \subset V \mid v$ と v' の間の長さは $1\}$ として、$G = (V, E)$ とする。また、写像 p を V から $\mathbb{R}^3$ への包含写像とすると、(G, p) はフレームとなる。このフレームのことを$m \times n$**の一階建の建物**といい、サイズが明らかなときは**建物**と呼ぶ。

$z = 1$ の平面と建物との共通部分の$m \times n$格子を**屋根**という。また、xy 平面と垂直に交わり x 軸もしくは y 軸に平行で建物の梁を含む平面と、建物との共通部分を**壁**と呼ぶ。屋根の上の line を 2 章と同様に、a_i, b_j $(i = 0, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, n)$ と名前を付け、line a_i の下にある壁を W_{a_i}、line b_j の下にある壁を W_{b_j} と呼ぶ。具体的には次の図のようになる。



このとき、V の部分集合として、$V_0 = \{(p, q, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid p = 0, \ldots, m, \quad q = 0, \ldots, n\}$、$V_1 = \{(p, q, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid p = 0, \ldots, m, \quad q = 0, \ldots, n\}$ とおき、建物の頂点の集合 $V_0 \subset V$ は固定されていると考えて、動かすことができないものとする。つまり、建物の運動も V_0 を動かさない運動だけを考える。このことから、建物の運動の中で自明でない合同運動は存在しないことが分かり、建物が rigid であることの定義も「建物の運動が合同運動に限る」から「自明な運動 (静止) 以外の建物の運動が

存在しない」に変えて考える。また、この建物に支柱を入れることを考えるが、梁によって作られる単位正方形の対角線のうちで、xy 平面上にない単位正方形の対角線のみを支柱とする。

これから、建物の motion を考える。ここで、motion とは、mechanical principle を満たすように各頂点に初速ベクトルを定めたもののうちで、固定されている頂点では初速ベクトルが 0 となるものである。motion μ が頂点 (p,q,r) に定める初速ベクトルを $\mu^{(p,q,r)}$ と表し、任意の $\mu \in M$ を、$\mu = \left(\mu^{(p,q,r)} \;\middle|\; p=0,\ldots,m,\quad q=0,\ldots,n,\quad r=0,1\right)$ と表示する。このとき、頂点 $(p,q,0) \in V_0$ は動かすことができないので、$\mu^{(p,q,0)} = 0$ となる。また、xy 平面に垂直な梁についての mechanical principle より、頂点 $(p,q,1) \in V_1$ での motion $\mu^{(p,q,1)}$ は xy 平面と平行な方向にしか値を取ることができないことが分かる。したがって、μ は 屋根を作る $m \times n$ 格子の motion となる。これより、次の定理がいえる。

定理 3.1 建物の motion space を M、屋根の作る $m \times n$ 格子の motion space を M' とすると、

$$M \cong M'$$

となる。

この定理より、建物の motion space M の標準的な基底として、屋根を作っている$m \times n$格子の line motion を使う。よって、建物の自由度は$m \times n$格子の自由度に等しく $m+n+2$ であることが分かるが、建物は xy 平面に固定されているので、建物には $m+n+2$ の内部自由度があることに注意する。

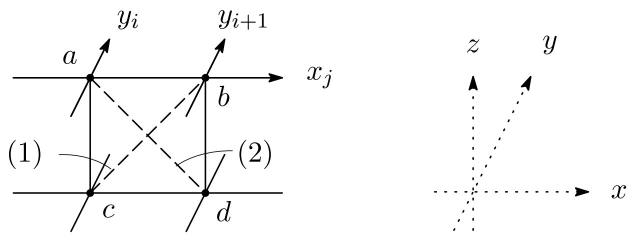
次に、支柱を加えて建物を固定することを考える。

定義 3.2 建物の壁に入れる支柱を**壁の支柱**と、建物の屋根に入れる支柱を**屋根の支柱**という。 □

屋根の支柱は正方形の対角線であったが、これについては 2 章で見たように、どちらの向きも motion space M に与える制約は同じであった。

また、壁の支柱は正方形の対角線だったので、一つの正方形に入る支柱は二種類存在する。今から、この二種類の支柱の mechanical principle を比較してみる。

今、任意の motion μ を考え、次の図のように、建物の壁 W_{b_j} の一部である正方形とその頂点 a,b,c,d を考える。正方形の上部を通る line と頂点 a,b でこの line と直交する xy 平面に平行な二本の line での μ の成分をそれぞれ x_j, y_i, y_{i+1} と定めて、壁の支柱を置く。



ここで、頂点 a,b の初速ベクトル μ^a, μ^b を成分表示すると、$\mu^a = (x_j, y_i, 0), \mu^b = (x_j, y_{i+1}, 0)$ となる。また、頂点 c,d は固定されているので頂点 c,d の初速ベクトル μ^c, μ^d は、$\mu^c = \mu^d = 0$ となる。

支柱が (1) のとき、これらのベクトルは対角線上に同じ射影を持つという条件が mechanical principle だったので、$\mu^b \cdot (\overrightarrow{bc}) = \mu^c \cdot (\overrightarrow{bc})$ より

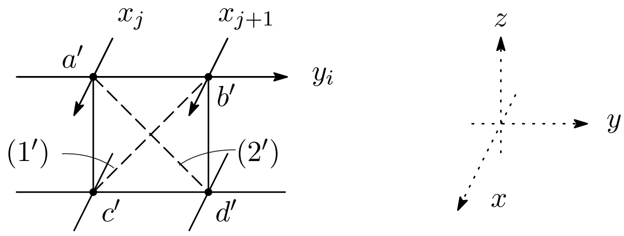
$$-x_j = 0$$

を得る。また、支柱が (2) のとき、これらのベクトルは対角線上に同じ射影を持つことは、$\mu^a \cdot (\overrightarrow{ad}) = \mu^d \cdot (\overrightarrow{ad})$ より

$$x_j = 0$$

と同値で、これは支柱が (1) のときの条件と同値である。よって、どちらの対角線を支柱と考えても mechanical principle は同じで、どちらの支柱も、motion space M 上では同じ制約を与えることが分かる。

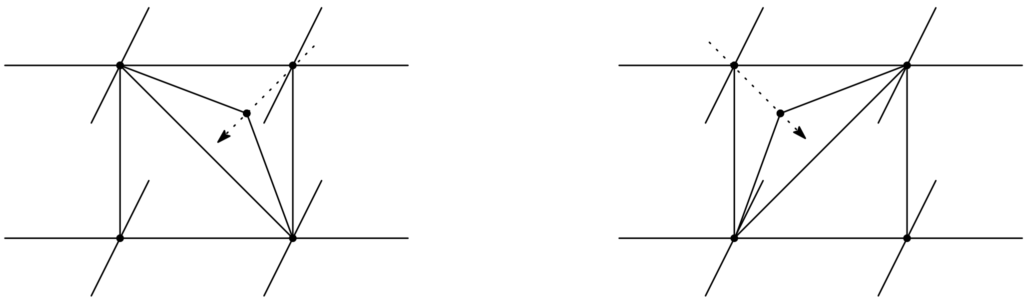
これまでで、壁 W_{b_j} について支柱を加えることを考えたが、これは、次の図のように壁 W_{a_i} に支柱を加えると、壁 W_{a_i} についても同様のことがいえる。



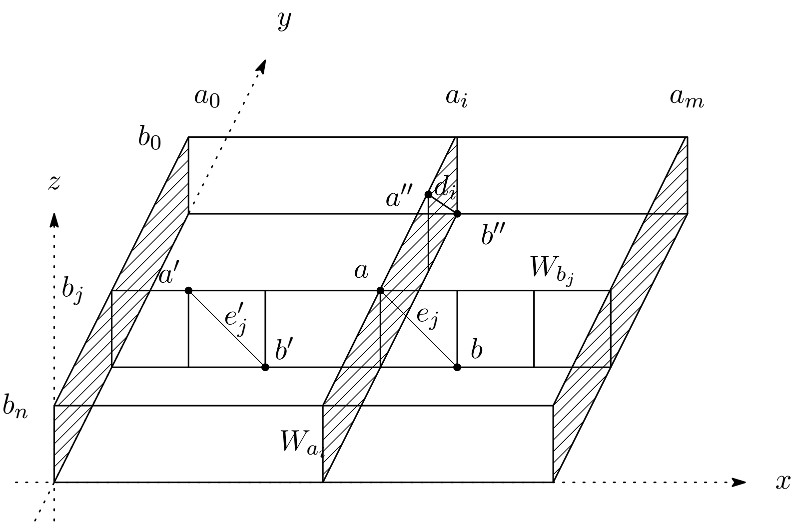
以下、屋根の支柱の向きは 2 章と同じ向きとし、壁の支柱の向きは (2), (2′) として、支柱を加えることで、建物を strictly rigid とすることを考える。このとき、2 章で見たように、屋根の支柱の集合 B でいくつかの支柱を逆の傾きの対角線に変えても、$r(B)$ は不変であった。また、ある壁の支柱の集合 A でいくつかの支柱を逆の傾きの対角線に変えても、$r(A)$ が不変であることに注意する。

このように、支柱を加えて建物を strictly rigid とするためには、支柱の向きはどちらでもよいことが分かるが、下に例のように、rigid を考える上では支柱の向きによる違いは自明とはいえない。

一階建の建物でも $m \times n$ 格子と同様に strictly rigid と rigid が同値であろうと予想されるが、明確な証明を与えることは断念した。



次に、図のように、壁 W_{a_i} に含まれる支柱 d_i と、壁 W_{b_j} に含まれる支柱 $e_j, e_j{}'$ を考える。この支柱 d_i, e_j, e'_j がそれぞれ、M にどのような制限を与えるかを考える。



１章と同様に支柱 c に対して、M から $\mathbb{R}$ への写像 φ_c を定義する。このとき、$\mu \in M$ を $\mu = (x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_n)$ と成分表示をして、壁の支柱 d_i, e_j, e'_j について $\varphi_c(\mu)$ を計算すると、

$$\varphi_{d_i}(\mu) = x_i = \begin{array}{ccccccc} (0, & \ldots,0, & 1, & 0,\ldots, & 0,0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & 0) \\ a_0 & & a_i & & a_m b_0 & & b_n \end{array} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \\ y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{e_j}(\mu) = y_j = \begin{array}{ccccccc} (0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & 0,0, & \ldots,0, & 1, & 0,\ldots, & 0) \\ a_0 & & a_m b_0 & & b_j & & b_n \end{array} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \\ y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{e'_j}(\mu) = y_j = \begin{array}{ccccccc} (0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & 0,0, & \ldots,0, & 1, & 0,\ldots, & 0) \\ a_0 & & a_m b_0 & & b_j & & b_n \end{array} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \\ y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる。これより、同じ壁に入る支柱は motion space M に同じ制限を与えることが分かり、異なる壁に入る支柱の集合は独立集合であることが分かる。

また、建物を固定するためには、x 軸に平行な壁と y 軸に平行な壁に少なくとも一本ずつ支柱が入っていなければならないので、以下、建物に支柱を加える際、常に、少なくとも x 軸に平行な壁と y 軸

に平行な壁に一本ずつ壁の支柱が入っているものとみなす。また、壁の支柱は一つの壁に対して、一本しか加えないとする。

3.2 shear space

これから、建物に支柱を加えて strictly rigid にすることを考える。A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とおく。A と B を加えた建物が strictly rigid であるかどうかを調べるためには、$\dim\bigl(M(A\cup B)\bigr)$ を考えればよかった。

２章では M を平行移動の motion space T で割った空間と同型である S を考え、考察するベクトル空間の次元を下げることでよい結果が得られた。前節では建物の motion space は平面格子と同じであることを調べたが、建物には合同運動が存在しなかったので、２章と同様に M の代わりに S を用いることができない。ところが、次のように考えると、S を用いることができる。

２章と同様に、屋根の hall に $A_i=\{a_{i-1},a_i\},B_j=\{b_{j-1},b_j\}$ $(i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,n)$ と名前を付ける。

定理 3.3 壁の支柱の集合を A、屋根の支柱の集合を B とする。

２章と同様に M から S への写像を σ とすると、このとき、

$$M(A\cup B)\cong\sigma\bigl(M(A\cup B)\bigr)$$

が成り立つ。

証明　A は x 軸に平行な壁の支柱 e_j と y 軸に平行な壁の支柱 d_i を含んでいるので、今、d_i,e_j のみを加えた一階建の建物の motion space を M^c とする。

まず、σ を M^c に制限したものを σ' とおき、$\sigma'(M^c)\cong S$ であることを示す。そのために、σ' が単射であることを示そう。

$\ker(\sigma')$ を考えると、

$$\begin{aligned}\ker(\sigma') &= \bigl\{\mu\in M^c \bigm| \sigma'(\mu)=0\bigr\}\\ &= \bigl\{\mu\in M^c \bigm| \sigma(\mu)=0\bigr\}\\ &= \bigl\{\mu\in M \bigm| \mu\in M^c,\ \sigma(\mu)=0\bigr\}\\ &= M^c\cap\ker(\sigma)\end{aligned}$$

ここで、$M^c\cap\ker(\sigma)$ を考えるためには、$\ker(\sigma)=T$ なので、M^c の元で平行運動の motion となるものを考えればよい。

$\mu\in M^c$ を成分表示すると

$$\mu=(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_m,y_0,\ldots,y_{j-1},0,y_{j+1},\ldots,y_n)$$

となる。また、平行運動の motion は $x_{i-1}=x_i,y_{j-1}=y_j\quad(i=1,\ldots,m\quad j=1,\ldots,n)$ となっているので、$\mu'\in M^c$ を平行運動の motion と仮定すると、$\mu'=0$ となり、$\ker(\sigma')=M^c\cap\ker(\sigma)=\{0\}$ がいえるので、σ' は単射である。

次に、σ' が全射であることを示す。建物には支柱 d_i,e_j が入っていると考えたので、任意の $s=(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)\in S$ に対して、

$$\mu=\left(-\sum_{k=1}^{i}X_k,\ldots,-X_i,0,X_{i+1},\ldots,\sum_{k=i+1}^{m}X_k,-\sum_{l=1}^{j}Y_l,\ldots,-Y_j,0,Y_{j+1},\ldots,\sum_{l=j+1}^{n}Y_l\right)$$

を持ってくると、$\sigma'(\mu) = s$ を満たす $\mu \in M^c$ が存在することが分かる。よって、σ' は全射である。以上により、σ' は全単射で、

$$\sigma'(M^c) \cong S$$

が成り立つ。

ここで、$M(A \cup B) \subset M^c$ なので、σ' を $M(A \cup B)$ に制限すれば、

$$M(A \cup B) \cong \sigma'\bigl(M(A \cup B)\bigr)$$

となる。 ∎

この定理より、壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を加えて、建物を strictly rigid するためには $\sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr) \subset S$ を考えればよい。このとき、

$$\sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr) = \sigma\bigl(M(A) \cap M(B)\bigr) \subset \sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$$

は明らかであるが、実は次の定理が成り立つ。

定理 3.4 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とする。このとき、

$$\sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr) = \sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$$

が成立する。

証明 これは、$\sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr) \supset \sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$ を示せばよい。

$s \in \sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$ とおくと、$s \in \sigma\bigl(M(A)\bigr)$ より、$\sigma(\mu_A) = s$ となる $\mu_A \in M(A)$ が存在し、また、$s \in \sigma\bigl(M(B)\bigr)$ より、$\sigma(\mu_B) = s$ となる $\mu_B \in M(B)$ が存在する。これより、

$$\sigma(\mu_A - \mu_B) = 0$$

がいえるので、

$$\mu_A - \mu_B \in T$$

となる。ここで、$\mu_A - \mu_B = \mu_T \in T$ とおくと、

$$\mu_A = \mu_B + \mu_T$$

を得る。

今、$M(B)$ は屋根の平面上の格子に支柱の集合 B をいれた motion space なので、$T \subset M(B)$ がいえる。これより、$\mu_B + \mu_T \in M(B)$ となるので

$$\mu_A \in M(A) \cap M(B) = M(A \cup B)$$

を得る。つまり、$s = \sigma(\mu_A) \in \sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr)$ が成立する。

したがって、$\sigma\bigl(M(A \cup B)\bigr) = \sigma\bigl(M(A)\bigr) \cap \sigma\bigl(M(B)\bigr)$ となる。 ∎

この定理より、建物を strictly rigid にすることを考えるのに $\sigma\bigl(M(A)\bigr)$ と $\sigma\bigl(M(B)\bigr)$ を調べればよいことが分かるが、2 章の定理 2.14 より、

$$S^\pi = \sigma\bigl(M(B)\bigr)$$

であり、S^π については 2 章で考察したので、次節では $\sigma\bigl(M(A)\bigr) \subset S$ について考える。

3.3　壁の支柱

以下、この節では、壁に支柱を加えることを考える。$A = \{d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合とする。ただし、d_{α_i} は壁 W_{α_i} に e_{β_j} は壁 W_{β_j} に入る支柱として、$0 \le \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \le m, \quad 0 \le \beta_1 < \cdots < \beta_q \le n$ とする。

A を加えた建物の motion space は

$$M(A) = \left\{ \mu \in M \;\middle|\; \varphi_{d_{\alpha_i}}(\mu) = 0, \varphi_{e_{\beta_j}}(\mu) = 0 \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q \right\}$$

となるので、

$$M(A) = \left\{ \mu \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_{d_{\alpha_1}}(\mu) = 0,\ \varphi_{e_{\beta_1}}(\mu) = 0, \\ (\varphi_{d_{\alpha_{i+1}}} - \varphi_{d_{\alpha_i}})(\mu) = 0, \qquad i = 1, \dots, p-1, \quad j = 1, \dots, q-1 \\ (\varphi_{e_{\beta_{j+1}}} - \varphi_{e_{\beta_j}})(\mu) = 0 \end{array} \right\}$$

と表すことができる。このとき、$\psi_{\alpha_i}, \psi_{\beta_j} \in M^*$ を

$$\begin{array}{ll} \psi_{\alpha_i} = \varphi_{d_{\alpha_{i+1}}} - \varphi_{d_{\alpha_i}} & (i = 1, \dots, p-1) \\ \psi_{\beta_j} = \varphi_{e_{\beta_{j+1}}} - \varphi_{e_{\beta_j}} & (j = 1, \dots, q-1) \end{array}$$

とおき、$M(A)$ を書き直すと、

$$M(A) = \left\{ \mu \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_{d_{\alpha_1}}(\mu) = 0,\ \varphi_{e_{\beta_1}}(\mu) = 0, \\ \psi_{\alpha_i}(\mu) = 0,\ \psi_{\beta_j}(\mu) = 0 \end{array} \quad i = 1, \dots, p-1, \quad j = 1, \dots, q-1 \right\}$$

となる。

今、二つの支柱 $d_{\alpha_i}, d_{\alpha_{i+1}}$(resp. $e_{\beta_j}, e_{\beta_{j+1}}$) で決まる M から $\mathbb{R}$ への写像 ψ_{α_i}(resp. ψ_{β_j}) に対して S から $\mathbb{R}$ への写像 $\hat{\psi}_{\alpha_i}$(resp. $\hat{\psi}_{\beta_j}$) を以下のように定める。すなわち、$s \in S$ に対して $s = \sigma(\mu)$ となる $\mu \in M$ を取ってきて、

$$\hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = \psi_{\alpha_i}(\mu) \quad \left(\text{resp. } \hat{\psi}_{\beta_j}(s) = \psi_{\beta_j}(\mu)\right)$$

と定義する。

このとき、$\mu \in M$ の選び方に $\hat{\psi}_{\alpha_i}(s)$ $\left(\text{resp. } \hat{\psi}_{\beta_j}(s)\right)$ が影響されないことを示す。$s \in S$ に対して、$s = \sigma(\mu) = \sigma(\mu')$ とする。つまり、line motion を使った成分表示でいえば、$s = (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) \in S$ に対して、$\mu = (x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n)$、$\mu' = (x'_0, \dots, x'_m, y'_0, \dots, y'_n)$ を

$$\begin{array}{rcl} (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) & = & (x_1 - x_0, \dots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \dots, y_n - y_{n-1}) \\ & = & (x'_1 - x'_0, \dots, x'_m - x'_{m-1}, y'_1 - y'_0, \dots, y'_n - y'_{n-1}) \end{array}$$

を満たすものとすると、

$$\begin{array}{rcl} \psi_{\alpha_i}(\mu) & = & \varphi_{\alpha_{i+1}}(\mu) - \varphi_{\alpha_i}(\mu) \\ & = & x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_i} \\ & = & (x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_{i+1}-1}) + (x_{\alpha_{i+1}-1} - x_{\alpha_{i+1}-2}) + \cdots + (x_{\alpha_i+1} - x_{\alpha_i}) \\ & = & X_{\alpha_{i+1}} + X_{\alpha_{i+1}-1} + \cdots + X_{\alpha_i+1} \end{array}$$

となる。一方で、

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_i}(\mu') &= \varphi_{\alpha_{i+1}}(\mu') - \varphi_{\alpha_i}(\mu') \\ &= x'_{\alpha_{i+1}} - x'_{\alpha_i} \\ &= (x'_{\alpha_{i+1}} - x'_{\alpha_{i+1}-1}) + (x'_{\alpha_{i+1}-1} - x'_{\alpha_{i+1}-2}) + \cdots + (x'_{\alpha_i+1} - x'_{\alpha_i}) \\ &= X_{\alpha_{i+1}} + X_{\alpha_{i+1}-1} + \cdots + X_{\alpha_i+1}\end{aligned}$$

が成立するので、

$$\psi_{\alpha_i}(\mu) = \psi_{\alpha_i}(\mu')$$

がいえる。

よって、$\mu \in M$ の代表元の選び方に $\hat{\psi}_{\alpha_i}(s)$ は影響されないことが分かる。また、$\hat{\psi}_{\beta_j}(s)$ も同様である。

この $\hat{\psi}_{\alpha_i}, \hat{\psi}_{\beta_j}$ を使うと、次のことがいえる。

定理 3.5 $A = \{d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合とし、上記のように $\hat{\psi}_{\alpha_i}, \hat{\psi}_{\beta_j}$ を定義すると、

$$\sigma\bigl(M(A)\bigr) = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = 0 & i = 1, \ldots, p-1 \\ \hat{\psi}_{\beta_j}(s) = 0 & j = 1, \ldots, q-1 \end{array} \right\}$$

と表すことができる。

証明

$$M(A) = \left\{ \mu \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_{d_{\alpha_1}}(\mu) = 0,\ \varphi_{e_{\beta_1}}(\mu) = 0, \\ \psi_{\alpha_i}(\mu) = 0,\ \psi_{\beta_j}(\mu) = 0 \end{array} \quad i = 1, \ldots, p-1, \quad j = 1, \ldots, q-1 \right\}$$

と表せる。ここで、M^c を考える。M^c は、x 軸に平行な壁と y 軸に平行な壁に一本ずつ壁の支柱が入っている建物の motion space なので、これらの壁の支柱を $d_{\alpha_1}, e_{\beta_1} \in A$ とすると、

$$M^c = \bigl\{ \mu \in M \bigm| \varphi_{d_{\alpha_1}}(\mu) = 0,\ \varphi_{e_{\beta_1}}(\mu) = 0 \bigr\}$$

となる。これより、

$$M(A) = \bigl\{ \mu \in M^c \bigm| \psi_{\alpha_i}(\mu) = 0,\ \psi_{\beta_j}(\mu) = 0 \qquad i = 1, \ldots, p-1, \quad j = 1, \ldots, q-1 \bigr\}$$

と書くことができるので、

$$\sigma\bigl(M(A)\bigr) = \left\{ \sigma(\mu) \in \sigma(M^c) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_i}\bigl(\sigma(\mu)\bigr) = 0 & i = 1, \ldots, p-1 \\ \hat{\psi}_{\beta_j}\bigl(\sigma(\mu)\bigr) = 0 & j = 1, \ldots, q-1 \end{array} \right\}$$

となるが、$\sigma(M^c) \cong S$ だったので、

$$\sigma\bigl(M(A)\bigr) = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = 0 & i = 1, \ldots, p-1 \\ \hat{\psi}_{\beta_j}(s) = 0 & j = 1, \ldots, q-1 \end{array} \right\}$$

が成り立つ。 ∎

次に、A による hall の分割を考える。

定義 3.6 $H = \{$ 屋根の hall 全体の集合 $\}$、$A = \{d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合として、$H' \subset H$ として、

$$H' = \{\text{ 壁 } W_{a_{\alpha_1}} \text{ と壁 } W_{a_{\alpha_p}} \text{ の間に入っている hall}\} \cup \{\text{ 壁 } W_{b_{\beta_1}} \text{ と壁 } W_{b_{\beta_q}} \text{ の間に入っている hall }\}$$

とする。
今から H' に同値関係を導入する。hall $X, Y \in H'$ に対して、$d_{\alpha_i}, d_{\alpha_{i+1}} \in A$ が入っている壁 $W_{a_{\alpha_i}}$ と $W_{a_{\alpha_{i+1}}}$ との間に hall $X, Y \in H'$ が入っているとき、もしくは、$e_{\beta_j}, e_{\beta_{j+1}} \in A$ が入っている壁 $W_{b_{\beta_j}}$ と $W_{b_{\beta_{j+1}}}$ との間に hall $X, Y \in H'$ が入っているとき、$X \sim Y$ とする。
このとき、$X \sim Y$ は同値関係となり、この同値関係による hall の分割 $H'/\sim$ を

$$\tau = \tau(A)$$

と書いて、A による **hall の分割**という。このとき、A による hall の分割は hall 全体を分類したものではないことに注意する。また、この分類によって分けた hall の組をそれぞれ、τ の **partition** と呼ぶこともある。 $\square$

定義 3.7 $A = \{d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合とする。ここで、

$$\sigma\bigl(M(A)\bigr) = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = 0 & i = 1, \dots, p-1 \\ \hat{\psi}_{\beta_j}(s) = 0 & j = 1, \dots, q-1 \end{array} \right\}$$

は τ だけで決まるので、$S_\tau = \sigma\bigl(M(A)\bigr)$ とおく。また、

$$r(\tau) = \dim S - \dim S_\tau$$

とおく。 $\square$

$r(\tau)$ は以下の定理で決定される。

定理 3.8 $A = \{d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合として、$\tau = \tau(A)$ とする。
このとき、

$$r(\tau) = |\tau|$$

が成り立つ。

証明 2 章と同様に S に内積を定義して、$\hat{\psi}_{\alpha_i}$ に対し shear $s'_{\alpha_i} \in S$ を、また、$\hat{\psi}_{\beta_j}$ に対し shear $s'_{\beta_j} \in S$ を、それぞれ、$\hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = \langle s'_{\alpha_i}, s\rangle$, $\hat{\psi}_{\beta_j}(s) = \langle s'_{\beta_j}, s\rangle$ を満たす S の元とすると、

$$\begin{aligned} S_\tau &= \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_i}(s) = 0 & i = 1, \dots, p-1 \\ \hat{\psi}_{\beta_j}(s) = 0 & j = 1, \dots, q-1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \langle s'_{\alpha_i}, s\rangle = 0 & i = 1, \dots, p-1 \\ \langle s'_{\beta_j}, s\rangle = 0 & j = 1, \dots, q-1 \end{array} \right\} \\ &= \langle s'_{\alpha_1}, \dots, s'_{\alpha_{p-1}}, s'_{\beta_1}, \dots, s'_{\beta_{q-1}}\rangle^\perp \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\dim S_\tau + \dim\langle s'_{\alpha_1},\dots,s'_{\alpha_{p-1}},s'_{\beta_1},\dots,s'_{\beta_{q-1}}\rangle = \dim S$$

となり、

$$r(\tau) = \dim\langle s'_{\alpha_1},\dots,s'_{\alpha_{p-1}},s'_{\beta_1},\dots,s'_{\beta_{q-1}}\rangle$$

がいえる。ここで、$s'_{\alpha_i}, s'_{\beta_j} \in S$ の成分は

$$s'_{\alpha_i} = (\overbrace{\underset{A_1}{0},\dots,0}^{\text{すべて }0},\ \overbrace{\underset{A_{\alpha_i+1}}{1},\dots,\underset{A_{\alpha_{i+1}}}{1}}^{\text{すべて }1},\ \overbrace{0,\dots,\underset{A_m}{0}}^{\text{すべて }0},\quad \overbrace{\underset{B_1}{0},\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\underset{B_n}{0}}^{\text{すべて }0}) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

$$s'_{\beta_j} = (\overbrace{\underset{A_1}{0},\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\underset{A_m}{0}}^{\text{すべて }0},\quad \overbrace{\underset{B_1}{0},\dots,0}^{\text{すべて }0},\ \overbrace{\underset{B_{\beta_j+1}}{1},\dots,\underset{B_{\beta_{j+1}}}{1}}^{\text{すべて }1},\ \overbrace{0,\dots,\underset{B_n}{0}}^{\text{すべて }0}) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

と表せるので、$s'_{\alpha_1},\dots,s'_{\alpha_{p-1}},s'_{\beta_1},\dots,s'_{\beta_{q-1}}$ は S 上で一次独立で、

$$r(\tau) = \dim\langle s'_{\alpha_1},\dots,s'_{\alpha_{p-1}},s'_{\beta_1},\dots,s'_{\beta_{q-1}}\rangle = |\tau|$$

が成り立つ。 ∎

系 3.9 $A = \{d_{\alpha_1},\dots,d_{\alpha_p},e_{\beta_1},\dots,e_{\beta_q}\}$ を壁の支柱の集合として、$\tau = \tau(A)$ とする。

このとき、

$$|\tau| = |A| - 2$$

が成り立つ。

証明 定理 3.8 の証明より、

$$\begin{aligned} |\tau| &= \dim\langle s'_{\alpha_1},\dots,s'_{\alpha_{p-1}},s'_{\beta_1},\dots,s'_{\beta_{q-1}}\rangle \\ &= (p-1)+(q-1) \\ &= p+q-2 \\ &= |A|-2 \end{aligned}$$

を得る。 ∎

3.4 壁の支柱と屋根の支柱

定理 3.3、3.4 より、壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を加えた建物の内部自由度は

$$\dim M(A\cup B) = \dim\Big(\sigma\big(M(A)\big)\cap\sigma\big(M(B)\big)\Big) = \dim S_\tau \cap S^\pi \tag{3.1}$$

と表されることが分かった。

この節では、$S_\tau \cap S^\pi$ の S^π, S_τ での余次元について考察する。

定義 3.10 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、次のように定義する。

$$r^{\pi}(\tau) = \dim S^{\pi} - \dim S_{\tau} \cap S^{\pi}$$

$$r_{\tau}(\pi) = \dim S_{\tau} - \dim S_{\tau} \cap S^{\pi}$$

$$r(\pi, \tau) = \dim S - \dim S_{\tau} \cap S^{\pi}$$

□

ここで、

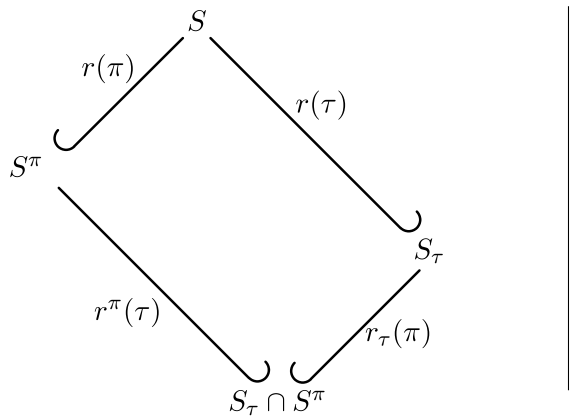
$$r(\pi, \tau) = \dim S - \dim S^{\pi} + \dim S^{\pi} - \dim S_{\tau} \cap S^{\pi} = r(\pi) + r^{\pi}(\tau) \tag{3.2}$$

がいえる。また、

$$r(\pi, \tau) = \dim S - \dim S_{\tau} + \dim S_{\tau} - \dim S_{\tau} \cap S^{\pi} = r(\tau) + r_{\tau}(\pi) \tag{3.3}$$

であることに注意する。

$S, S^{\pi}, S_{\tau}, S_{\tau} \cap S^{\pi}$ の包含関係と次元の差の関係は下の図で表されている。



定義 3.11 V をベクトル空間とし、V の部分ベクトル空間 W に対して、

$$W^{\mathrm{vert}} = \left\{ f \in V^* \;\middle|\; {}^{\forall} w \in W, \quad f(w) = 0 \right\} \subset V^*$$

とおく。 □

実は、V に内積があれば、V の直交補空間 $W^{\perp}$ と W^{vert} とは密接な関係がある。

定理 3.12 V を内積を持つ有限次元のベクトル空間とする。V の部分ベクトル空間 W に対して、

$$W^{\perp} \cong W^{\mathrm{vert}}$$

が成り立つ。

証明　$u \in W^{\perp}$ に対して、V から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(v) = \langle u, v \rangle$$

とおく。このとき、任意の $w \in W$ に対して、$f(w) = \langle u, w \rangle = 0$ となるので、$f \in W^{\mathrm{vert}}$ となる。

ここで、$u \in W^{\perp}$ に対して、$f(v) = \langle u, v \rangle$ を満たす $f \in W^{\mathrm{vert}}$ を対応させる $W^{\perp}$ から W^{vert} への写像を g とすると、g が全単射であることを示せばよい。

まず、g が単射であることを示そう。今、

$$\ker(g) = \left\{ u \in W^{\perp} \;\middle|\; g(u) = 0 \right\}$$

なので、$u' \in \ker(g)$ とすると、$g(u') = 0$、つまり、任意の $v \in V$ について、

$$\big(g(u')\big)(v) = \langle u', v \rangle = 0$$

となるが、ここで、自身を代入すると、$\langle u', u' \rangle = 0$ となる。これより、$u' = 0$ がいえるので、$\ker(g) = \{0\}$ を得る。よって、g は単射である。

次に、g が全射であることを示そう。そのためには、任意の $f \in W^{\mathrm{vert}}$ に対して、$f(v) = \langle u, v \rangle$ となる $u \in W^{\perp}$ が存在すればよい。

$\dim W^{\perp} = p$ とおき、$W^{\perp}$ の正規直交基底を $a_1, \ldots, a_p$ として、$u \in W^{\perp}$ を

$$u = f(a_1)a_1 + \cdots + f(a_p)a_p$$

とおく。このとき、任意の $v \in V$ は $a = k_1a_1 + \cdots + k_pa_p \in W^{\perp}$ $(k_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, p)$ と $b \in W$ を使って、

$$v = k_1a_1 + \cdots + k_pa_p + b$$

と書ける。

ここで、$f(v)$ を考えると、$f \in W^{\mathrm{vert}}$ なので、

$$\begin{aligned} f(v) &= f(k_1a_1 + \cdots + k_pa_p + b) \\ &= k_1f(a_1) + \cdots + k_pf(a_p) + f(b) \\ &= k_1f(a_1) + \cdots + k_pf(a_p) \end{aligned}$$

となる。一方で、$u \in W^{\perp}$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= k_1f(a_1) + \cdots + k_pf(a_p) + \langle u, b \rangle \\ &= k_1f(a_1) + \cdots + k_pf(a_p) \end{aligned}$$

が成り立ち、$f(v) = \langle u, v \rangle$ となる $u \in W^{\perp}$ が存在することが分かる。つまり、g は全射である。

したがって、

$$W^{\perp} \cong W^{\mathrm{vert}}$$

が成立する。 ∎

定理 3.12 より、次のことがいえる。

系 3.13 V を内積を持つ有限次元のベクトル空間とする。V の部分ベクトル空間 W に対して、

$$W = \left\{ v \in V \;\middle|\; {}^{\forall} f \in W^{\mathrm{vert}}, \quad f(v) = 0 \right\} \subset V$$

が成立。

証明　W は $W^{\perp}$ の直交補空間なので

$$W = \left\{ v \in V \;\middle|\; {}^{\forall} u \in W^{\perp}, \quad \langle u, v \rangle = 0 \right\} \subset V$$

と表すことができる。ここで、定理 3.12 の証明で使った $W^{\perp}$ から W^{vert} への同型写像 g を利用すれば、

$$\begin{aligned} W &= \left\{ v \in V \;\middle|\; {}^{\forall} u \in W^{\perp}, \quad \big(g(u)\big)(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in V \;\middle|\; {}^{\forall} f \in W^{\mathrm{vert}}, \quad f(v) = 0 \right\} \subset V \end{aligned}$$

となる。 ∎

以上のことを使って、次のように定義する。

定義 3.14 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、

$$Act\ (S_\tau, S^\pi) = \left\{ \hat{\psi}|_{S^\pi} \in S^{\pi *} \;\middle|\; \hat{\psi} \in S_\tau^{\mathrm{vert}} \right\} \subset S^{\pi *}$$

と定義する。 □

系 3.13 より、次のことがいえる。

定理 3.15 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、

$$r^\pi(\tau) = \dim(Act\ (S_\tau, S^\pi))$$

証明　系 3.13 より、S_τ は

$$S_\tau = \left\{ s \in S \;\middle|\; \hat{\psi}(s) = 0, \quad {}^{\forall} \hat{\psi} \in S_\tau^{\mathrm{vert}} \subset S^* \right\}$$

と表すことができる。また、$S_\tau \cap S^\pi$ は、

$$S_\tau \cap S^\pi = \left\{ s \in S^\pi \;\middle|\; \hat{\psi}(s) = 0, \quad {}^{\forall} \hat{\psi} \in S_\tau^{\mathrm{vert}} \subset S^* \right\}$$

となり、$S_\tau \cap S^\pi \subset S^\pi$ なので、

$$\begin{aligned} S_\tau \cap S^\pi &= \left\{ s \in S^\pi \;\middle|\; \hat{\psi}|_{S^\pi}(s) = 0, \quad {}^{\forall} \hat{\psi} \in S_\tau^{\mathrm{vert}} \subset S^* \right\} \\ &= \left\{ s \in S^\pi \;\middle|\; \hat{\psi}(s) = 0, \quad {}^{\forall} \hat{\psi} \in \big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big) \right\} \end{aligned}$$

が成立する。

ここで、$\hat{\psi} \in S^{\pi *}$ に対して、$\hat{\psi}(s) = \langle v, s \rangle$ を満たす $v \in S^\pi$ を対応させる写像を $\bar{g}$ とすると、$\bar{g}$ は $S^{\pi *}$ から S^π への同型写像となる。これより、

$$\begin{aligned} S_\tau \cap S^\pi &= \left\{ s \in S^\pi \;\middle|\; \langle v, s \rangle = 0, \quad v = \bar{g}(\hat{\psi}), \quad {}^{\forall} \hat{\psi} \in Act\ (S_\tau, S^\pi) \right\} \\ &= \left\{ s \in S^\pi \;\middle|\; \langle v, s \rangle = 0, \quad {}^{\forall} v \in \bar{g}\big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big) \right\} \end{aligned}$$

がいえるので、S^π における $S_\tau \cap S^\pi$ の直交補空間 $(S_\tau \cap S^\pi)^\perp$ は、$(S_\tau \cap S^\pi)^\perp = \bar{g}\big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big)$ となる。また、$\dim\big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big) = \dim\Big(\bar{g}\big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big)\Big)$ なので、

$$\dim\big(Act\ (S_\tau, S^\pi)\big) = \dim S^\pi - \dim S_\tau \cap S^\pi = r^\pi(\tau)$$

を得る。 ∎

3.5 The joint occupancy matrix

A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、定理 3.3、3.4 より、A と B を加えて建物を strictly rigid にするためには、$\dim S_\tau \cap S^\pi = 0$ となればよい。これは、

$$r(\pi, \tau) = m + n$$

と同値で、$r(\pi,\tau) = r(\pi) + r^\pi(\tau)$ と $r(\pi) = m + n - |\pi|$ より

$$r^\pi(\tau) = |\pi|$$

が導かれる。よって、A と B を加えて建物を strictly rigid にするためには、$r^\pi(\tau) = |\pi|$ となればよいことが分かる。

この節では、$r^\pi(\tau)$ の決定を行う。

まず、A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ として、π の partition と τ の partition に順番を付けて、ある行列を定義する。

定義 3.16 行列 $L = L(\pi, \tau)$ の成分を次のように定義する。

$$L_{ij} = (\pi \text{ の } i \text{ 番目の partition と } \tau \text{ の } j \text{ 番目の partition に入っている共通の hall の数})$$

このとき、行列 $L = L(\pi, \tau)$ を π, τ による **The joint occupancy matrix** という。L のサイズは、$|\pi|$ 行 $|\tau|$ 列である。 □

$r(L) = rank(L)$ とおくが、実は、$r(L)$ は partition の順番に寄らないことに注意する。この The joint occupancy matrix を使うと次のことがいえる。

定理 3.17 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、

$$r^\pi(\tau) = r(L)$$

が成立。

証明

$A = \{d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_p}, d_{\alpha_{p+1}}, e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_q}, e_{\beta_{q+1}}\}$ とおく。また、$|\pi| = k, |\tau| = l = p + q$ とする。まず、

$$S_\tau = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \hat{\psi}_{\alpha_u}(s) = 0 & u = 1, \ldots, p \\ \hat{\psi}_{\beta_v}(s) = 0 & v = 1, \ldots, q \end{array} \right\}$$

であるが、ここで、

$$\hat{\psi}_j = \begin{cases} \hat{\psi}_{\alpha_j} & (1 \leq j \leq p) \\ \hat{\psi}_{\beta_{j-p}} & (p+1 \leq j \leq p+q) \end{cases}$$

とおくと、

$$S_\tau = \left\{ s \in S \,\middle|\, \hat{\psi}_j(s) = 0, \quad j = 1, \ldots, l \right\}$$

と書きかえることができるので、これより、$S_\tau^{\text{vert}} = \langle \hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_l \rangle$ が成立。$\hat{\psi}_j \in S_\tau^{\text{vert}}$ を S^π に制限したものを $\hat{\psi}'_j \in S^{\pi *}$ とおくと、

$$r^\pi(\tau) = \dim\bigl(Act\ (S_\tau, S^\pi)\bigr) = rank\{\hat{\psi}'_1, \ldots, \hat{\psi}'_l\}$$

がいえる。

ここで、$x_i \in S^\pi$ を、π の i 番目の partition に入る hall に対応する成分で値 1 をとり、その他の成分で値 0 を取るものとおくと、定理 2.22 の証明より、$x_1, \ldots, x_k$ は S^π の基底となる。今、12 ページで見たように、$f_1, \ldots, f_k$ を S^π の基底 $x_1, \ldots, x_k$ と双対な $S^{\pi *}$ の基底とすると、$\hat{\psi}'_j \in S^{\pi *}$ なので、

$$\hat{\psi}'_j = p_{1j} f_1 + \cdots + p_{kj} f_k \tag{3.4}$$

と表すことができる。また、$f_1, \ldots, f_k$ が $S^{\pi *}$ の基底なので、これを使って $\hat{\psi}'_j$ を成分表示して考えれば、

$$\begin{aligned} r^\pi(\tau) &= rank\{\hat{\psi}'_1, \ldots, \hat{\psi}'_l\} \\ &= rank \left\{ \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p_{1l} \\ \vdots \\ p_{kl} \end{pmatrix} \right\} \\ &= rank(p_{ij})_{(i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,l)} \end{aligned}$$

が成立する。

一方で、$f_1, \ldots, f_k$ は $x_1, \ldots, x_k$ の双対基底なので、等式 (3.4) において、両辺に x_i を代入すれば

$$\hat{\psi}'_j(x_i) = p_{1j} f_1(x_i) + \cdots + p_{kj} f_k(x_i) = p_{ij}$$

が得られ、

$$p_{ij} = \hat{\psi}'_j(x_i) = \hat{\psi}_j(x_i)$$

が成立する。

$\hat{\psi}_j$ に対応する $s_j{}' \in S$ を $\hat{\psi}_j(s) = \langle s_j{}', s \rangle$ 満たすものとすると、$p_{ij} = \langle s_j{}', x_i \rangle$ となる。このとき、$s_j{}'$ の成分は、定理 3.8 の証明で見たように、τ の j 番目の partition に入っている hall に対応する場所で値 1 を、その他の場所で値 0 を取る。また、x_i の成分は、π の i 番目の partition に入っている hall に対応する場所で値 1 を、その他の場所で値 0 を取るので、

$$p_{ij} = \Bigl| \{\pi \text{ の } i \text{ 番目の partition に入る hall}\} \cap \{\tau \text{ の } j \text{ 番目の partition に入る hall}\} \Bigr|$$

となり、$p_{ij} = L_{ij}$ がいえる。よって、$r^\pi(\tau) = r(L)$ が成り立つ。 ∎

支柱の集合 A, B を加えて建物を strictly rigid にするためには $r(\pi, \tau)$ が重要であったが、この値は、A と B を建物に加える順序によらない。つまり、等式 (3.2)、(3.3) より

$$r(\pi, \tau) = r(\tau) + r_\tau(\pi) = r(\pi) + r^\pi(\tau)$$

となる。一方で、定理 3.8、3.17 より、$r^\pi(\tau) = r(L)$、$r(\tau) = |\tau|$ より

$$r(\pi) - r_\tau(\pi) = |\tau| - r(L) \tag{3.5}$$

が成り立つ。

このとき、$|\tau| - r(L)$ のことを**行列 L の列の退化次数**といい、$Z_c(L)$ で表す。

補題 3.18 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。また、$|\pi| = k, |\tau| = l$ とする。このとき、

$$\dim(S_\tau \cap S^\pi) = |\pi| - r(L)$$

が成り立つ。

証明 $r^\pi(\tau) = \dim S^\pi - \dim(S_\tau \cap S^\pi)$ なので、定理 2.22 と等式 (3.5) より

$$\dim(S_\tau \cap S^\pi) = \dim S^\pi - r^\pi(\tau) = |\pi| - r(L)$$

となる。 ∎

$|\pi| - r(L)$ のことを**行列 L の行の退化次数**といい、$Z_r(L)$ で表す。

定理 3.19 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。このとき、The joint occupancy matrix L が

$$Z_r(L) = |\pi| - r(L) = 0$$

を満たすことと、A, B を加えると建物が strictly rigid になることは同値である。

証明 補題 3.18 より、$|\pi| - r(L) = 0$ と $\dim S_\tau \cap S^\pi = 0$ は同値である。これより、A, B を加えると建物が strictly rigid になることと同値であることがいえる。 ∎

定理 3.20 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。ただし、B は独立集合とする。

このとき、The joint occupancy matrix L が

$$Z_c(L) = |\tau| - r(L) = 0$$

であることと、$A \cup B$ が$m \times n$の一階建の建物の matroid で独立集合となることは同値である。

証明 定義より、

$$r(A \cup B) = \dim M - \dim\big(M(A \cup B)\big)$$

であるが、等式 (3.1) より、

$$r(A \cup B) = \dim M - \dim(S_\tau \cap S^\pi)$$

が成り立つ。ここで、補題 3.18 より

$$\begin{aligned} r(A \cup B) &= m + n + 2 - \big(|\pi| - r(L)\big) \\ &= m + n - |\pi| + r(L) + 2 \end{aligned}$$

を得る。また、B は独立集合と仮定しているので、定理 2.22 より、

$$|B| = r(B) = m + n - |\pi|$$

となる。よって、

$$r(A \cup B) = r(L) + 2 + |B| \tag{3.6}$$

がいえる。

これを使い定理を証明する。

$r(L) = |\tau|$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} r(A \cup B) &= r(L) + 2 + |B| \\ &= |\tau| + 2 + |B| \end{aligned}$$

となるので、系 3.9 より、

$$\begin{aligned} r(A \cup B) &= |A| + |B| \\ &= |A \cup B| \end{aligned}$$

がいえるので、$A \cup B$ が$m \times n$の一階建の建物の matroid で独立集合である。

一方で、$A \cup B$ が$m \times n$の一階建の建物の matroid で独立集合と仮定すると、

$$\begin{aligned} r(A \cup B) &= |A \cup B| \\ &= |A| + |B| \\ &= |\tau| + 2 + |B| \end{aligned}$$

となる。また、等式 (3.6) より

$$r(A \cup B) = r(L) + 2 + |B|$$

なので、

$$r(L) = |\tau|$$

を得る。 ∎

以上より、支柱の集合 $A \cup B$ を建物に加えると strictly rigid になるかどうかは、$Z_r(L)$ で決定できる。また、支柱の集合 $A \cup B$ が独立かどうかは、屋根の支柱の集合に対応する二部グラフと $Z_c(L)$ で決定できる。

定理 3.21 A を壁の支柱の集合、B を屋根の支柱の集合とし、$\tau = \tau(A)$、$\pi = \pi(B)$ とする。ただし、B は独立集合とする。

このとき、$A \cup B$ は加えると建物が strictly rigid となる極小の支柱の集合であることと、$L(\pi, \tau)$ が正則正方行列であることは同値である。

証明 $A \cup B$ が加えると建物が strictly rigid となる極小の支柱の集合であることと、$A \cup B$ が独立集合、かつ、建物に加えると strictly rigid になる集合であることは同値である。

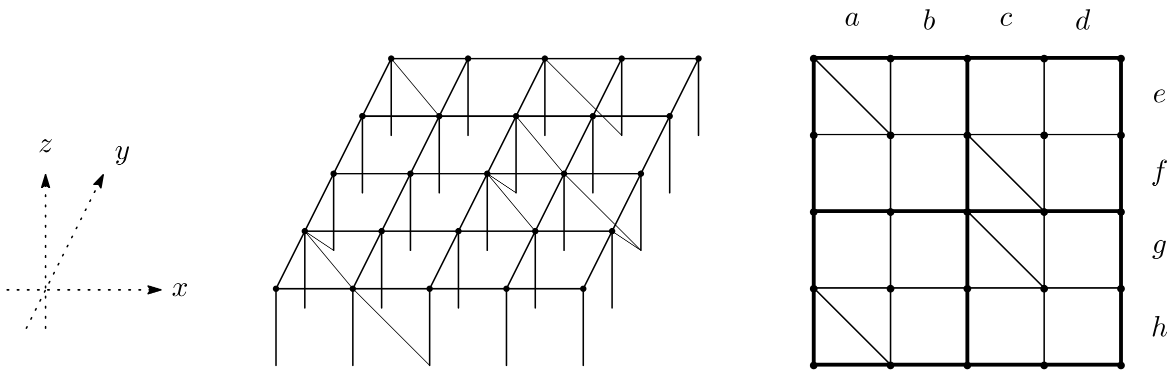
ここで、定理 3.19 より、$A \cup B$ が建物に加えると strictly rigid になる集合であることと $Z_r(L) = 0$ は同値である。また、B が独立集合であるという仮定と定理 3.20 より、$A \cup B$ が独立集合であることと $Z_c(L) = 0$ は同値である。

一方で、$L(\pi, \tau)$ が正則正方行列であることと、$Z_c(L) = Z_r(L) = 0$ であることは同値である。

よって、$A \cup B$ を加えると建物が strictly rigid となる極小の支柱の集合であることと、$L(\pi, \tau)$ が正則正方行列であることとは同値である。 ∎

最後に、具体例を使い前述のことを考える。

例 3.22 壁の支柱の集合 A と屋根の支柱の集合 B を下の図のように、一階建の建物に加える。



―― : 壁の支柱が入っている壁

このとき、hall の分割 π, τ は

$$\tau(A) = \{ab, cd, ef, gh\}, \pi(B) = \{aeh, b, cfg, d\}$$

となる。このとき、

$$L = L(\pi, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、$r(L) = 3$ となる。つまり、$Z_r(L) \neq 0$ なので、A, B を加えた建物は strictly rigid ではないことが分かる。

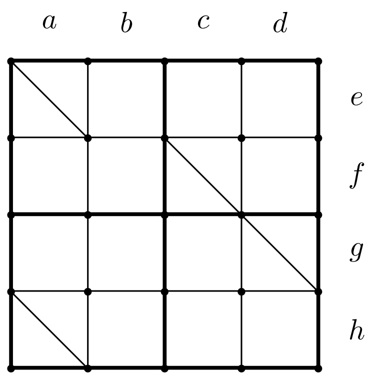
次に、hall c と g の交わる正方形に入っている屋根の支柱を hall d と g の交わる正方形に移し、このときの屋根の支柱の集合を B' とすると、

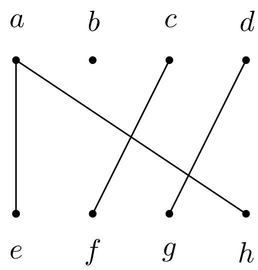
$$\pi(B') = \{aeh, b, cf, dg\}$$

となる。このときの The joint occupancy matrix を L' とすると、

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、$r(L') = 4$ となり、$Z_r(L') = 0$ なので、A, B' を加えた建物は strictly rigid であることが分かる。また、$Z_c(L') = 0$ であり、B' に対応する二部グラフは

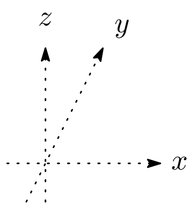


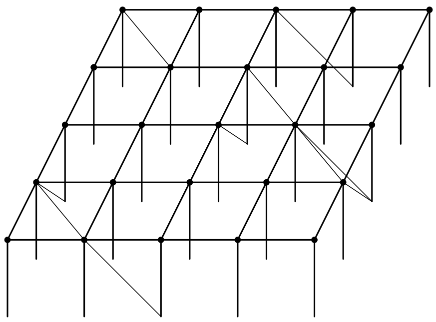


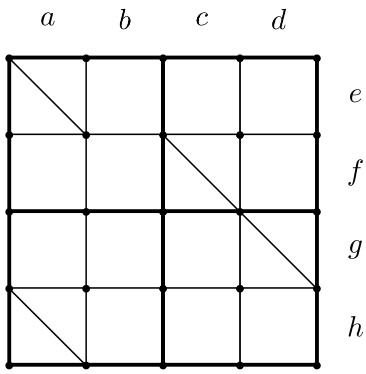
: 壁の支柱が入っている壁

となり、上図のように閉路を含まないので B' は独立集合となる。よって、定理 3.20 より $A \cup B'$ は独立集合となる。

したがって、定理 3.21 より、次図のように建物に支柱を入れたとき、$A \cup B'$ は建物を strictly rigid にする極小の支柱の集合となる。つまり、屋根の支柱が四本、壁の支柱が六本の計十本である。







: 壁の支柱が入っている壁

このように、The joint occupancy matrix を考えて支柱を加えていけば建物を strictly rigid にできる。

付録

ここでは、11 ページの定理 1.25 の証明の概略を述べる。

定理 1.25　(G,p) をフレームとする。(G,p) が strictly rigid ならば、(G,p) は rigid である。

証明　グラフ G を $V(G)=\{v_1,\ldots,v_a\}$、$E(G)=\{e_1,\ldots,e_m\}$ とする。また、写像 $p:V(G)\longrightarrow\mathbb{R}^N$ を

$$p(v_i)=p_i \quad (i=1,\ldots,a)$$

とおく。

ここで、グラフ G を用いるフレーム全体の集合と $\mathbb{R}^{Na}$ は自然に対応がつく。この対応は、フレーム (G,q) に対して $\big(q(v_1),\ldots,q(v_a)\big)\in\mathbb{R}^{Na}$ を対応させるものである。以後、$q(v_i)$ を q_i とも書く。

フレーム (G,p) と合同なフレーム全体を $[G,p]$ とおくと、この対応で、

$$[G,p]\subset\mathbb{R}^{Na}$$

がいえる。この時、$[G,p]$ は $\mathbb{R}^{Na}$ の $(\dim E)$ 次元多様体であることが知られている。ただし、E はフレーム (G,p) の合同運動の初速で与えられる motion space (8 ページ参照) である。

次に、辺 $e_i=\{v_k,v_l\}\in E(G)$ に対して写像 $f_{e_i}:\mathbb{R}^{Na}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$f_{e_i}(q_1,\ldots,q_a)=\| q_k-q_l \|^2 \quad \big(e_i\in E(G)\big)$$

と定義する。これを、辺 $e_i\in E(G)$ の辺関数と呼ぶ。また、写像 $f_G:\mathbb{R}^{Na}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ を

$$f_G(q_1,\ldots,q_a)=\big(f_{e_i}(q_1,\ldots,q_a)\big)_{e_i\in E(G)}$$

とおくと、f_G の q での微分は

$$df_G|_q=\big(df_{e_i}|_q\big)_{e_i\in E(G)}$$

と表される。

一方、mechanical principle の定義を考えると、$df_{e_i}|_q(\mu^{q_1},\ldots,\mu^{q_a})=0$ はフレーム (G,q) の辺 $e_i\in E(G)$ の mechanical principle そのものであることが分かる。つまり、

$$rank\big(df_G|_q\big)=Na-\dim M$$

が成り立つ。また、$E\subset M$ より $\dim E\leq\dim M$ なので、

$$rank\big(df_G|_q\big)\leq Na-\dim E$$

がいえる。ここで、等号が成立することと、フレーム (G,q) が strictly rigid となることが同値であることに注意する。

今、

$$f_G{}^{-1}\big(f_G(p_1,\dots,p_a)\big)=\big[[G,p]\big]$$

とおくと、$\big[[G,p]\big]$ はフレーム (G,p) のすべての梁の長さを変えていないフレーム全体なので、

$$[G,p]\subset\big[[G,p]\big]$$

が成り立つ。

以上のことを使えば、定理 1.25 を示すためには、“$rank(df_G|_p)=Na-\dim E$ であるならば、フレーム (G,p) の近傍で $[G,p]$ と $\big[[G,p]\big]$ が一致する” ということを示せばよい。

まず、

$$rank\big(df_G|_p\big)=rank\big(df_{e_i}|_p\big)_{e_i\in E(G)}=Na-\dim E$$

であったので、適当に辺を並び替えて、辺に名前を付け直して、

$$rank\big(df_{e_1}|_p,\dots,df_{e_{(Na-\dim E)}}|_p\big)=Na-\dim E$$

とする。

このとき、写像 $f_G{}':\mathbb{R}^{Na}\longrightarrow\mathbb{R}^{Na-\dim E}$ を

$$f_G{}'(q_1,\dots,q_a)=\big(f_{e_1}(q_1,\dots,q_a),\dots,f_{e_{(Na-\dim E)}}(q_1,\dots,q_a)\big)$$

と定義して、

$$\big[[G,p]\big]'=f_G{}'^{-1}\big(f_G{}'(p_1,\dots,p_a)\big)$$

とおくと、$(G,q)\in\big[[G,p]\big]$ は $f_G{}'(G,q)=f_G{}'(G,p)$ を満たすので、$(G,q)\in\big[[G,p]\big]'$、つまり、

$$\big[[G,p]\big]\subset\big[[G,p]\big]'$$

が成り立つ。

ここで、写像 $df_G{}'|_p:\mathbb{R}^{Na}\longrightarrow\mathbb{R}^{Na-\dim E}$ は全射なので、陰関数定理より $\big[[G,p]\big]'$ はフレーム (G,p) の近傍で $(\dim E)$ 次元多様体となり、$[G,p]$ と同次元である。

一方で、

$$[G,p]\subset\big[[G,p]\big]\subset\big[[G,p]\big]'$$

であったので、$\mathbb{R}^{Na}$ での (G,p) の近傍 U では $[G,p]$ と $\big[[G,p]\big]$ とが一致する。つまり、

$$U\cap[G,p]=U\cap\big[[G,p]\big]$$

となる。 ∎

参考文献

[1] L.Asimow and B.Roth. *The rigidity of graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol.245,279-289. 1978.

[2] E.D.Bolker and H.Crapo. *Bracing rectangular frameworks. 1.* SIAM J.APPL.MATH.Vol.36,473-490. 1979.

[3] Ethan.D.Bolker. *Bracing rectangular frameworks. 2.* SIAM J.APPL.MATH.Vol.36,491-508. 1979.

[4] Herman Gluck. *Almost all simply connected closed surfaces are rigid.* Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah),225-239. 1974.

[5] 前原 潤・根上 生也. 『幾何学的グラフ理論』. 入門 有限・離散の数学 3. 朝倉書店, 1992.