

平成11年度 学位論文

# ワインガルテン写像による曲線と曲面の考察

兵庫教育大学大学院 学校教育研究科  
教科・領域教育専攻 自然系コース  
M 9 8 5 5 9 H 西村 信一

# 序

平成3年度数学教育研究沖縄大会にて「2次曲線と2次曲面の微分幾何学的考察」というテーマの研究報告を行った[14]．ここでは、 $R^2$ の曲線  $f(x, y) = 0$  の曲率  $\kappa$  や  $R^3$  の曲面  $f(x, y, z) = 0$  のガウスの全曲率  $K$  について主として論じた．その中で、曲面  $f(x, y, z) = 0$  の全曲率  $K$  は、 $f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ 、 $f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) とし、

$$M = (f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2)f_x^2 + (f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2)f_y^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)f_z^2 \\ - 2(f_{xy}f_{zz} - f_{xz}f_{yz})f_xf_y + 2(f_{xy}f_{yz} - f_{xz}f_{yy})f_xf_z - 2(f_{xx}f_{yz} - f_{xy}f_{xz})f_yf_z$$

とおくと

$$K = \frac{M}{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^2}$$

と表されるということと、特に2次曲面  $f(x, y, z) = 0$  については、 $M$  が定数になるということを報告した．

このことに関して、当時鹿児島大学教授であった橋口正夫先生より、

$$M = - \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}$$

であること、特に

$$2f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lxy + 2mzx + 2nyz + 2px + 2qy + 2rz + d$$

であるとき、

$$M = - \begin{vmatrix} a & l & m & p \\ l & b & n & q \\ m & n & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

となることを教えて頂いた．後に、橋口先生がこれらの内容を  $n$  次元ユークリッド空間やフィンスラー (Finsler) 空間におけるガウス曲率 (Gaussian curvature) にまで

拡張された論文 [3] を私との共著という形で鹿児島大学の紀要に投稿して頂いたことは、恐縮する限りであった。その論文に書かれたガウス曲率 (本論文ではガウス・クロネッカー曲率) について、さらに研究したいと考えていた。その願いが叶い、ここ兵庫教育大学にて研究する機会を得て、橋口先生から教えて頂いたソープ (Thorpe) の本 [5] に書かれているワインガルテン (Weingarten) 写像を柱に、曲線や曲面の曲率について研究することを本論文の主目的とした。

本論文の構成を以下に述べる。

1章では、この論文で扱う曲線と曲面について述べた。媒介変数および等位面による曲線と曲面の表示を行い、これらの接空間について述べた。

2章では、ガウス・クロネッカー曲率、平均曲率及び曲面の第2基本量を定義する上で必要なワインガルテン写像について述べた。

3章では、ワインガルテン写像を用いて平面曲線の曲率を定義し、平面曲線のフルネ・セレー (Frenet-Serret) の公式を導いた。さらにフルネ・セレーの公式を微分方程式とみて、 $s$  の関数  $\kappa(s)$  が与えられたとき、 $s$  を曲線の弧長、 $\kappa(s)$  を曲率とするような平面曲線が存在することを証明した。また単位速度空間曲線には曲率と捩率があり、これらは弧長  $s$  の関数であるが、空間曲線のフルネ・セレーの公式も微分方程式とみて、同様な問題を扱った。このように、単位速度平面曲線は曲率により、単位速度空間曲線は曲率と捩率により曲線が決定するという事実を「曲線論の基本定理」という。この定理から単位速度平面曲線は、曲率  $\kappa(s)$  により決定されるという意味で

$$\kappa = \kappa(s)$$

は、単位速度平面曲線の方程式であり、これを「単位速度平面曲線の自然方程式」という。同様に、単位速度空間曲線は、曲率  $\kappa(s)$  と捩率  $\tau(s)$  によって決定されるという意味で

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s)$$

は、単位速度空間曲線の方程式であり、これを「単位速度空間曲線の自然方程式」という。本論文では、単位速度曲線以外についても、その自然方程式を考え、弧長関数  $\ell(t)$  を導入することにより平面曲線の自然方程式を

$$\kappa = \kappa(t), \quad \ell = \ell(t)$$

とし、空間曲線の自然方程式を

$$\kappa = \kappa(t), \quad \tau = \tau(t), \quad \ell = \ell(t)$$

とにおいて、曲線の方程式を導くことができた。これらの証明において、指数行列とそのスペクトル分解を用いた。

4章では、多くの事項を扱っている。まず、 $R^{n+1}$  内の  $n$  次元曲面に対して、ワインガルテン写像を用いて曲面の法曲率、主曲率を定義し、主曲率を用いて超曲面の形状を定義した。また、それらとガウス・クロネッカー曲率や平均曲率との関連を述べた。特に、ガウス・クロネッカー曲率や平均曲率は、基底の取り方に依存しない不変量であることを示した。特に、 $n$  が偶数のとき、ガウス・クロネッカー曲率は、単位法ベクトル場  $N$  の代わりに  $-N$  を取っても不変であり、さらに等長変換による不変量でもあるという著しい性質を持っていることがわかった。特に、 $R^3$  内の2次元曲面のガウス・クロネッカー曲率をガウスの全曲率 (Gaussian curvature) といい、ガウス自身このような事実を発見して驚き、「驚きの定理 (Theorema Egregium)」と呼んだといわれている。

次に、等長変換による不変量を扱った。  $f: R^{n+1} \rightarrow R$  を  $C^2$  級関数とし、 $f^{-1}(0) \neq \emptyset$  でない超曲面のガウス・クロネッカー曲率と平均曲率を求め、その式の中に表れる

$$1) \|\nabla f\| \quad 2) \begin{vmatrix} \text{Hesse} f & \nabla f \\ \nabla f & 0 \end{vmatrix} \quad 3) \langle \nabla f, \text{Hesse} f \nabla f \rangle \quad 4) \text{tr}(\text{Hesse} f)$$

が等長変換による不変量であること、ガウス・クロネッカー曲率と平均曲率の絶対値は、等長変換による不変量であることを示した。

また、上の曲率に関する結果や等長変換による不変量に関する結果を2次超曲面

$$2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_k + c = 0$$

に適用した。

5章では、 $R^3$  の曲面の第1基本量と第2基本量を用いてガウスの全曲率、平均曲率を表せることを述べた。ガウスの全曲率と平均曲率の符号により  $R^3$  の曲面の形状を説明することができた。具体的に2次曲面の例を挙げて、曲面の形状と分類について述べた。また、ある具体例に対してガウス及びワインガルテンの公式を偏微分方程式とみることで行列のスペクトル分解を用いて、曲面の存在に関するボンネの定理が成り立つことを確認した。

6章では、微分幾何学の金字塔ともいえるガウス・ボンネの定理について、パラメータ表示ができる  $R^3$  の曲面  $x = x(u^1, u^2)$  の場合について述べた。この定理の証明には、測地線を考えて証明する方法や単位法ベクトル場を考えて証明する方法などがあるが、本論文においては、後者の方法に、5章で述べた第1基本量と第2基本量を用いてガウスの全曲率が表されることと、ワインガルテン写像を用いて証明を行った。測地的三角形  $ABC$  の内角とガウスの全曲率  $K$  との関係式 (ガウスの定理)

$$\iint_D K dA = A + B + C - \pi$$

( $D$  は測地的三角形の領域) と5章で述べたガウスの全曲率と曲面の形状に関する定理 (60ページの定理 5.1.2) から、

I) 楕円面のときは,  $A + B + C - \pi > 0$

II) 双曲面のときは,  $A + B + C - \pi < 0$

III) 放物面, 平面のときは,  $A + B + C - \pi = 0$

となることを述べた。ガウス自身「球面三角形の内角の和は  $\pi$  より大きい」ということを念頭におき、地球上の3地点をとることにより、それらを頂点とする三角形(測地的三角形)の内角を測定したといわれているが、当時の測量技術では、残念ながらこの事実を確認することはできなかったというエピソードもある。

7章では、「2次超曲面の中心であるための必要十分条件はその定義関数の特異点である」ことを証明した。このことから、中心をもつ有心2次超曲面と中心を持たない無心2次超曲面との分類に局所的な理論を導入することが可能となった。2次曲面を標準形にする主軸問題は、有心2次曲面の中心を原点にとることであり、無心の2次曲面上において  $\|\nabla f\|$  を最小にする点を原点にとることであることがわかった。

本論文では、ゼミ等を通じて勉強した文献に書かれた結果の証明の紹介は、原則として行っていない。ここでは、以下のものについて、証明を与え、詳しく述べている。

- 1) 2章の補題のように証明が計算のみという理由で、また、2次曲面の分類のように特殊な場合のみ証明が与えられていて、その一般化の証明が読者に任されているもの。
- 2) 3章の「与えられた曲率を持つ曲線の存在性」のように、参考文献にもその証明が述べられているが、それとは異なる証明を与えたもの。
- 3) 7章の2次超曲面の中心と特異点の関係のように、新たに得た結果であるもの。ただし、重要な結果であっても、新たに別証明が与えられなかったものについては、その結果と文献を紹介することに留めた。

## 謝辞

本論文の作成にあたり、小池敏司先生には終始惜しみないご指導ご助言を賜り、厚くお礼申し上げます。

渡辺金治先生には、研究を進める上で貴重なご指導を頂き、感謝申し上げます。

ここでの研究の機会を与えて頂きました熊本県教育委員会をはじめ、その間お世話になりました先生方にお礼申し上げます。

最後に、橋口正夫先生には、平成3年度数学教育研究沖縄大会以来、貴重なご助言とご指導を賜り、深く感謝いたします。

1999年12月 西村 信一

# 目次

序	i
<b>第1章 準備</b>	<b>1</b>
1.1 多様体	1
1.2 媒介変数曲線	4
1.3 曲面の定義	6
1.4 接空間	7
<b>第2章 ワインガルテン写像</b>	<b>10</b>
2.1 関数の微分	10
2.2 ベクトル場の微分	11
2.3 ワインガルテン写像	13
<b>第3章 曲線の曲率</b>	<b>17</b>
3.1 曲率	17
3.2 フルネ・セレー (Frenet-Serret) の公式	19
3.3 与えられた曲率を持つ曲線の存在性	24
<b>第4章 曲面の曲率</b>	<b>35</b>
4.1 主曲率	35
4.2 ガウス・クロネッカー曲率	39
4.3 平均曲率	44
4.4 等長変換による不変量	48
4.5 曲面の基本量	56
<b>第5章 <math>R^3</math> の曲面</b>	<b>59</b>
5.1 曲面の形状	59
5.2 曲面に関する諸公式	64
5.3 ボンネの定理	65
<b>第6章 ガウス・ボンネの定理</b>	<b>70</b>
6.1 測地的曲率	70

6.2	外微分形式 . . . . .	71
6.3	ガウス・ボンネの定理 . . . . .	71
第7章	2次超曲面の中心と特異点	76
第8章	今後の問題	82
8.1	$R^3$ の閉曲面のガウスの全曲率 . . . . .	82
8.2	2次超曲面の中心と特異点の一般化 . . . . .	83
参考文献		84

# 第1章 準備

本章で扱う曲線と曲面の定義について述べる．それらは，ある意味での多様体 (manifold) である．従って，最初に多様体の定義を述べ，その後この論文で扱う曲線と曲面の定義を与える．

## 1.1 多様体

$m$  を自然数とする． $m$  個の実数を並べた組  $(x_1, \dots, x_m)$  の全体からなる集合を  $m$  次元数空間といい，記号  $R^m$  で表す．

**定義 1.1.1**  $m$ 次元位相多様体  $M$ とは， $R^m$ の開集合と同相な可算個の開近傍で覆えるハウスドルフ空間のことである．

**定義 1.1.2** ハウスドルフ空間  $M$  に対して，次の条件 (1) ~ (3) を満たす可算族  $\mathcal{D}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  を  $M$  の  $C^\infty$  級座標近傍系という．

(1)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  は  $M$  の開被覆である；すなわち， $\{U_\alpha\}$  は  $M$  の開集合で， $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  .

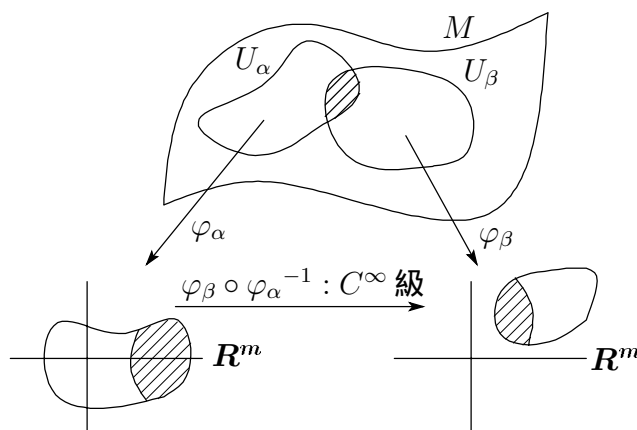
(2)  $\varphi_\alpha$  は  $U_\alpha$  から  $R^m$  のある開集合の上への同相写像である．

(3)  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$  なる任意の  $\alpha, \beta \in A$  に対して，  
 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

は  $C^\infty$  級同相写像である．

ハウスドルフ空間  $M$  が  $C^\infty$  級座標近傍系  $\mathcal{D}_M$  をもつとき，組  $(M, \mathcal{D}_M)$  (または単に  $M$ ) を  $C^\infty$  級多様体という． $\mathcal{D}_M$  の元  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  を  $C^\infty$  級多様体  $(M, \mathcal{D}_M)$  の座標近傍という．



図 1.1:  $C^\infty$  級同相写像

上の条件 (3) によって次のことを保証する：すなわち， $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  とする．ある関数  $f : W \rightarrow R$  ( $W$  は  $M$  の開集合) に対し， $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  が  $\varphi_\alpha(p)$  で  $C^\infty$  級であれば， $f \circ \varphi_\beta^{-1}$  もまた， $C^\infty$  級になる (証明は，参考文献 [15, p. 35] を参照)．

上に述べたことから，関数の微分可能性が次のように定義できる．

**定義 1.1.3**  $(M, \mathcal{D}) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  を  $C^\infty$  級多様体とする． $M$  の開集合  $W$  上で定義された関数  $f : W \rightarrow R$  が  $W$  の点  $p$  において  $C^\infty$  級であるとは， $p \in U_\alpha$  なるある  $\alpha$  に対して (従って全ての  $\alpha \in A$  に対して)

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W) \rightarrow R$$

が，点  $\varphi_\alpha(p)$  において  $C^\infty$  級であるときにいう．

**定義 1.1.4**  $(M, \mathcal{D})$  を  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体とする． $M$  の開集合  $U$  上で定義された  $m$  個の  $C^\infty$  級関数の組  $f = (f_1, \dots, f_m)$  を  $\mathcal{D}$  に付け加えた  $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{(U, f)\}$  が，再び  $M$  の  $C^\infty$  級座標近傍系となるときの， $(f_1, \dots, f_m)$  (または  $(U, f)$ ) を  $M$  の  $C^\infty$  級局所座標系という．さらに，点  $p \in U$  に対して， $f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0$  となるとき， $(f_1, \dots, f_m)$  は点  $p$  を中心とする局所座標系であるという．今後，座標系に関しては，記号として， $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)$  などを用いることが多い．

定義 1.1.5  $f$  を  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体  $M$  から  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする．点  $p \in M$  における  $f$  の階数が  $k$  であるとは， $p \in U_\alpha$ ， $f(p) \in V_i$  を満たすそれぞれ  $M$  および  $N$  のある座標近傍系  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  および  $(V_i, \psi_i)$  に対して，

$$\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_i)) \rightarrow \psi_i(V_i) \subset \mathbf{R}^n$$

の  $\varphi_\alpha(p)$  におけるヤコビ行列 (Jacobian Matrix)  $J_{\psi_i \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}}(\varphi_\alpha(p))$  の階数が  $k$  であるときにいう． $f$  の  $p$  における階数を  $\text{rank}_p(f)$  と書く．

注意 1.1.6 この定義 1.1.5 が座標近傍の選び方によって変わらない．証明は，参考文献 [15, p. 37] を参照．

定義 1.1.7  $m$  次元多様体  $M$  から  $n$  次元多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像  $f$  が  $M$  のすべての点  $p$  において， $\text{rank}_p(f) = m$  なる性質をもつとき， $f$  を  $M$  から  $N$  への挿入とよぶ． $f$  が挿入でさらに 1 対 1 の写像であるならば， $f$  を  $M$  の  $N$  への埋込みとよぶ．

定義 1.1.8  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体  $M$  の部分集合  $S$  が次の 2 条件を満たすとき， $S$  を  $M$  の余次元  $k$  の部分多様体という．

- 1)  $S$  は  $(m - k)$  次元の  $C^\infty$  級多様体である．
- 2) 包含写像  $\iota : S \rightarrow M$  は埋め込みである．

多様体  $M$  の部分多様体  $S$  は，位相空間としては，必ずしも  $M$  の部分空間ではないことに注意する (参考文献 [15, p. 39] を参照)．

定義 1.1.9 多様体  $M$  の部分多様体  $S$  が， $M$  の部分空間にもなっているとき， $S$  を  $M$  の正則部分多様体という．

定理 1.1.10  $m$ 次元  $C^\infty$ 級多様体  $M$ の部分集合  $S$ に対して, 次の3条件は同値である.

- 1)  $S$ は  $M$ の余次元  $k$ の正則部分多様体である.
- 2)  $S$ の各点  $p$ に対して,  $p$ の  $M$ の中における近傍  $U(p)$ と,  $U(p)$ から  $\mathbf{R}^k$ への  $C^\infty$ 級写像  $f$ で, 次の条件を満たすものがある.

a)  $f$ の  $p$ における階数は  $k$ である.

b)  $S \cap U(p) = f^{-1}(0)$

- 3)  $S$ の各点  $p$ に対して,  $p$ の  $M$ の中における近傍  $U(p)$ と  $U(p)$ から  $\mathbf{R}^m$ のある開集合  $V$ への  $C^\infty$ 級同相写像  $h: U(p) \rightarrow V$ が存在して,

$$h(U(p) \cap S) = V \cap \mathbf{R}^{m-k}$$

が成り立つ. ただし,

$$\mathbf{R}^{m-k} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid x_{m-k+1} = \dots = x_m = 0\}$$

とする.

[証明] 証明は, 参考文献 [15, pp. 40-41] を参照.

## 1.2 媒介変数曲線

定義 1.2.1  $I$ は  $\mathbf{R}$ の開集合とする。関数  $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

と定義するとき,  $t$ を媒介変数(パラメータ),  $\gamma$ を  $\mathbf{R}^n$ における媒介変数曲線という.

定義 1.2.1で述べた  $\gamma_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n$ )は  $C^\infty$ 級とする. また,  $\gamma'_1(t) = \gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$ となるような  $t \in I$ が存在しないとき,  $\gamma$ は正則であるとよぶ. 以後, 特に断らない限り, 曲線は正則であると仮定する. ベクトル  $(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ を  $\gamma'(t)$ とかき, これを  $t$ における  $\gamma$ の速度ベクトルという.

$R^n$ における  $\gamma(t)$  の点の集合, すなわち  $C = \gamma(I)$  の表す像が幾何学的にいう曲線のことである. 本論文で扱う曲線とは, 正則な媒介変数曲線  $\gamma: I \rightarrow R^n$  で,  $\gamma$  が 1:1 になっているものである. この時, 像  $C$  は, 前節の意味で  $R^n$  の部分多様体になっている.

速度ベクトル  $\gamma'(t)$  の幾何学的な意味について述べる.  $v = \gamma(t+h) - \gamma(t)$  は,  $\gamma(t)$  から  $\gamma(t+h)$  へ至るベクトルである.  $h$  が 0 に近づくとき,

$$(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)) = \gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

の方向が,  $v$  の極限の方向になっている. すなわち,  $\gamma(t)$  での接ベクトルである.

任意のベクトル  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  に対し,  $x$  のノルムを,

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

とする.  $\gamma$  が正則曲線より,  $\|\gamma'(t)\|$  が 0 にならないことに注意する.

**定義 1.2.2** ベクトル  $T(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$  は,  $t$  における  $\gamma$  の単位接ベクトルという.

$\|\gamma'(t)\|$  は,  $t$  における  $\gamma$  の速さといい, すべての  $t$  において  $\|\gamma'(t)\| = 1$  であるとき,  $\gamma$  を単位速度曲線という.

**注意 1.2.3**  $\gamma: I \rightarrow R^2$  を平面曲線とする. このとき, 単位接ベクトル  $T(t)$  を反時計回りに  $\pi/2$  だけ回転させた  $N(t)$  を  $t$  における  $\gamma$  の単位法ベクトルとよぶ.

これは, 平面曲線を扱う上で, 単位接ベクトル, 曲率と並んで重要な概念である.

**定義 1.2.4**  $t_0 \in I$  とする.  $\gamma: I \rightarrow R^n$  上の点  $\gamma(t_0)$  からの弧長  $\ell(t)$  を

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \quad (t \in I)$$

と定義する.

特に,  $\gamma$  が任意の  $t$  に対し,  $\|\gamma'(t)\| = 1$  を満たす単位速度曲線であるとき,  $\ell(t) = t - t_0$  が成り立つ.

定義 1.2.4 から,  $I$  の任意の  $t$  に対し,  $\ell'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$  がいえるので,  $I = (a, b)$ ,  $J = (\ell(a), \ell(b))$  とおくと,  $\ell: I \rightarrow J$  は, 全単射である. 公式  $\|\gamma'(t)\|' = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle / \|\gamma'(t)\|$  などから,  $\ell(t)$  が  $C^\infty$  級であることが分かる. また,  $\ell$  の逆写像も  $C^\infty$  級であることが容易に確かめられる.  $\ell: I \rightarrow J$  は,  $C^\infty$  級微分同相写像である.

定理 1.2.5 弧長  $l$  の逆写像を  $l^{-1}$  とすると,

$$\alpha = \gamma \circ l^{-1} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$$

は, 単位速度曲線である.

[証明] 証明は, 容易である. 例えば, 参考文献 [1, p. 28] を参照.

### 1.3 曲面の定義

定義 1.3.1  $U$  を  $\mathbf{R}^{n+1}$  の開集合とし, 写像  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられているとする. このとき, 任意の実数  $c \in \mathbf{R}$  に対する等位集合  $f^{-1}(c)$  を

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in U : f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c\}$$

と定義する.

注意 1.3.2 上で定義した等位集合  $f^{-1}(c)$  を, 一般に,  $n > 1$  のとき, 曲面とよび,  $n = 1$  のとき, 曲線とよぶ.

例 1.3.3  $f(x, y) = x^2 + y^2$  とする. 実数  $c$  に対する等位集合  $f^{-1}(c)$  は, 方程式

$$x^2 + y^2 = c$$

の実数解全体の集合で,  $f^{-1}(c)$  は  $c \geq 0$  のときに限り解をもつ. 特に,  $c = 0$  のときは原点のみになる. 図 1.2 に  $c = 1$  および  $c = 4$  のときの等位集合を示した.

$U$  を  $\mathbf{R}^n$  の開集合とし, 写像  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  を  $U$  で定義された  $C^\infty$  級関数とする. 空でない  $f^{-1}(0)$  上の任意の点  $p$  に対する勾配ベクトル  $\nabla f(p)$  が 0-ベクトルでないとき,  $p$  を  $f^{-1}(0)$  の正則点という.

定義 1.3.4  $\mathbf{R}^{n+1}$  の部分集合  $S$  が  $n$  次元曲面であるとは,  $\mathbf{R}^{n+1}$  の開集合  $U$  上で定義された  $C^\infty$  級関数  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  の等位集合  $f^{-1}(c)$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) で,  $f^{-1}(c)$  のすべての元が  $f$  の正則点になっているときという.

本論文では, 特に断らない限り ( $n$  次元) 曲面といえば, 上で定義したものを表すことにする. 定理 1.1.9 より,  $\mathbf{R}^{n+1}$  中の余次元 1 の正則部分多様体である.

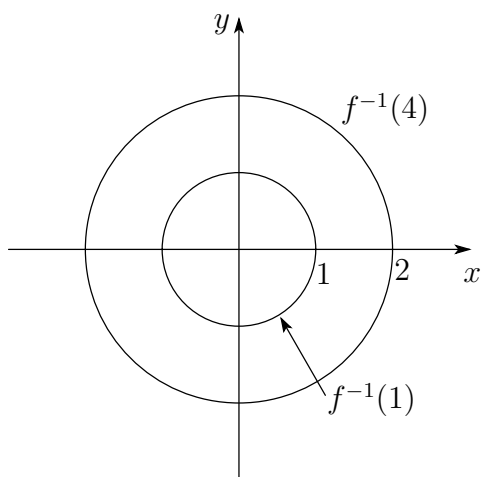
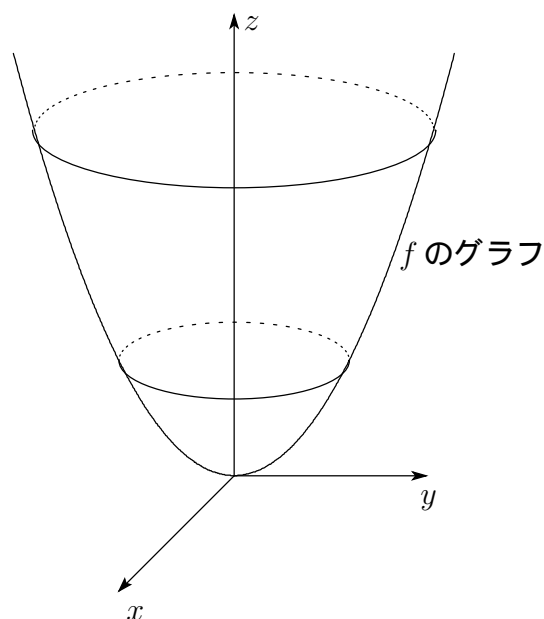


図 1.2: 等位集合の例

図 1.3:  $f$  のグラフ

**定義 1.3.5**  $U$  を  $R^{n+1}$  の開集合とし, 写像  $f: U \rightarrow R$  が与えられているとする. 関数  $f$  のグラフを,  $n+1$  次元数空間における

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

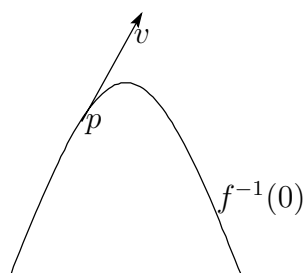
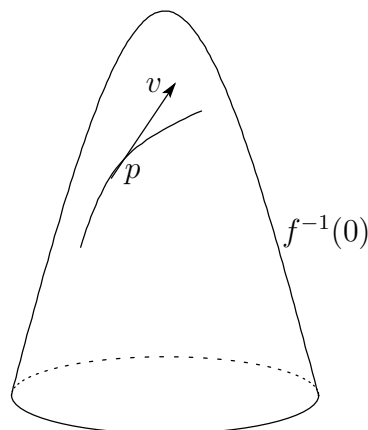
の点の集合として定義する.

例えば, 関数  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  のグラフは図 1.3 のとおりである.

関数  $f: U \rightarrow R$  のグラフは,  $g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と定義したときの  $g$  の等位集合  $g^{-1}(0)$  になっている. さらに,  $g^{-1}(0)$  の各点は,  $g$  の正則点である. したがって,  $f$  のグラフは, 上の意味での  $R^{n+1}$  における  $n$  次元曲面になっている. グラフの場合は,  $U$  上で大域的に  $n$  個のパラメータによって表示される. このため, 曲面の性質を扱うとき, 曲面がグラフで与えられているときの方が, 一般の等位集合で与えられているときよりも, 性質や公式が簡単になることが多い.

## 1.4 接空間

この節では, 前節で導入した  $n$  次元曲面の接空間の概念を導入する. ベクトル  $u$  と  $v$  の内積を  $\langle u, v \rangle$  で表すことにする. 以下, この記号を用いる.

図 1.4:  $n = 2$ 図 1.5:  $n = 3$ 

等位集合上の媒介変数曲線の接ベクトル  $v$  は等位集合に接するので (図 1.4, 図 1.5 参照), 次の定理が成り立つ.

**定理 1.4.1**  $p$  を曲面  $f^{-1}(0)$  の正則点とし,  $\alpha(t)$  ( $t \in I$ ) をこの曲面上の曲線で  $p$  を通るものとする. このとき,  $p$  における勾配ベクトル  $\nabla f(p)$  は,  $p$  における曲線の接ベクトルに垂直である.

[証明]  $\alpha(t)$  は  $f^{-1}(0)$  上の曲線なので,  $t \in I$  に対し  $f(\alpha(t)) = 0$  である. これを微分すると, 合成微分律から

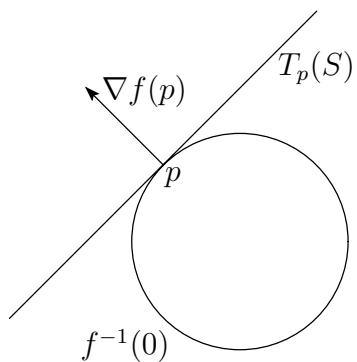
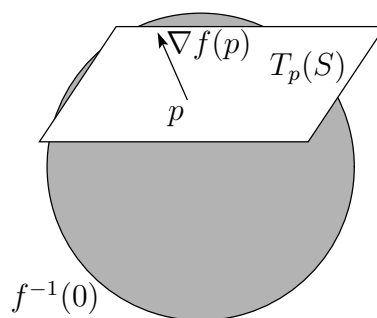
$$\langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

を得る.

今,  $\alpha(t_0) = p$  とすると

$$\langle \nabla f(p), \alpha'(t_0) \rangle = 0$$

が成り立つ. 従って,  $p$  における勾配ベクトル  $\nabla f(p)$  は,  $p$  における曲線の接ベクトルに垂直である. [ 証終 ]

図 1.6:  $n = 2$ 図 1.7:  $n = 3$ 

等位集合  $f^{-1}(0)$  を  $S$  とすると, 定理 1.4.1 より,  $\nabla f(p)$  は  $p$  を通る  $S$  上の任意の曲線 (の接ベクトル) に垂直である. この  $p$  を通り,  $f^{-1}(0)$  に垂直な空間を  $p$  における  $S$  の接空間といい,  $T_p(S)$  と表すことにする (図 1.6, 図 1.7 参照).



## 第2章 ワインガルテン写像

本章では，関数の微分およびベクトル場の微分について紹介し，単位法ベクトル場の微分により，ワインガルテン写像を定義し，その線形性と自己共役性について述べる．

### 2.1 関数の微分

$f$  を開集合  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  で定義された関数とし， $v \in T_p(\mathbb{R}^{n+1})$  ( $p \in U$ ) とする．

定義 2.1.1  $v$  に関する  $f$  の微分を

$$D_v f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

と定義する．ただし， $\alpha: I \rightarrow U$  は， $v = \alpha'(t_0)$  を満たす曲線とする．

このとき，次が成り立つ．

主張 2.1.2  $v$  に関する  $f$  の微分は

$$D_v f = \langle \nabla f(p), v \rangle \quad (2.1)$$

とかける．

[証明]  $(f \circ \alpha)'(t_0)$  は合成微分律により， $v = \alpha'(t_0)$  であれば， $\alpha$  の選び方に依らず，

$$D_v f = (f \circ \alpha)'(t_0) = \langle \nabla f(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

[ 証終 ]

この主張より，定理 2.1.1 が矛盾なく定義されていることがわかる．

注意 2.1.3 特に  $\|v\| = 1$  のとき，微分  $D_v f$  を  $p$  における  $v$  方向の微分という．

次に，関数の微分についての公式をまとめて述べておく．ここで， $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$  は， $\mathbb{R}^{n+1}$  の  $p$  における接空間を表しており， $p$  を始点とする  $\mathbb{R}^{n+1}$  のベクトル全体のこととする．

補題 2.1.4  $f, g$  を開集合  $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$  で定義された任意の関数とする．任意のベクトル  $v, w \in T_p(\mathbf{R}^{n+1})$  及び任意の定数  $c \in \mathbf{R}$  に対し，

1.  $D_{v+w}f = D_vf + D_wf$
2.  $D_{fv}g = f(p)D_vg$
3.  $D_v(f+g) = D_vf + D_vg$
4.  $D_vcf = cD_vf$
5.  $D_vfg = (D_vf)g(p) + f(p)D_vg$

が成り立つ．

[証明] これらは，(2.1) を用いて証明される．

1.  $D_{v+w}f = \langle \nabla f(p), v+w \rangle = \langle \nabla f(p), v \rangle + \langle \nabla f(p), w \rangle = D_vf + D_wf$
2.  $D_{fv}g = \langle \nabla g(p), fv \rangle = f(p)\langle \nabla g(p), v \rangle = f(p)D_vg$
3.  $D_v(f+g) = \langle \nabla(f+g)(p), v \rangle = \langle \nabla f(p), v \rangle + \langle \nabla g(p), v \rangle = D_vf + D_vg$
4.  $D_vcf = \langle \nabla(cf)(p), v \rangle = c\langle \nabla f(p), v \rangle = cD_vf$
5.  $D_vfg = \langle \nabla(fg), v \rangle = \langle g(p)\nabla f(p) + f(p)\nabla g(p), v \rangle$   
 $= \langle \nabla f(p), v \rangle g(p) + f(p)\langle \nabla g(p), v \rangle = (D_vf)g(p) + f(p)D_vg$  [ 証終 ]

## 2.2 ベクトル場の微分

$X = (X_1, \dots, X_{n+1})$  を開集合  $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$  で定義された滑らかなベクトル場  $X$  とし， $v \in T_p(\mathbf{R}^{n+1})$  ( $p \in U$ ) とする．

定義 2.2.1  $v$  に関する  $X$  の微分を

$$D_vX = (X \circ \alpha)'(t_0)$$

と定義する．ただし， $\alpha: I \rightarrow U$  は， $\alpha'(t_0) = v$  を満たす曲線とする．

このとき，次が成り立つ．

主張 2.2.2  $v$  に関する  $X$  の微分は,

$$D_v X = (p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}) \quad (2.2)$$

とかける.

[証明]  $X_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$  は  $X$  の成分なので,  $D_v X$  は関数の微分の定義から,

$$\begin{aligned} D_v X &= (\alpha(t_0); (X_1 \circ \alpha)'(t_0), \dots, (X_{n+1} \circ \alpha)'(t_0)) \\ &= (p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}). \end{aligned}$$

[証終]

先と同様に, ベクトル場の微分に関する公式をまとめておく.

補題 2.2.3 任意のベクトル  $v, w \in T_p(\mathbf{R}^{n+1})$  及び  $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$  で定義された滑らかな関数  $f$  に対し,

1.  $D_{v+w} X = D_v X + D_w X$
2.  $D_{fv} X = f(p) D_v X$
3.  $D_v(X + Y) = D_v X + D_v Y$
4.  $D_v f X = (D_v f) X(p) + f(p) D_v X$
5.  $D_v \langle X, Y \rangle = \langle D_v X, Y(p) \rangle + \langle X(p), D_v Y \rangle$

が成り立つ.

[証明] これらは (2.2) を用いて証明される.

$$\begin{aligned} 1. \quad D_{v+w} X &= (p; D_{v+w} X_1, \dots, D_{v+w} X_{n+1}) \\ &= (p; D_v X_1 + D_w X_1, \dots, D_v X_{n+1} + D_w X_{n+1}) \\ &= (p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}) + (p; D_w X_1, \dots, D_w X_{n+1}) \\ &= D_v X + D_w X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad D_{fv} X &= (p; D_{fv} X_1, \dots, D_{fv} X_{n+1}) \\ &= (p; f(p) D_v X_1, \dots, f(p) D_v X_{n+1}) \\ &= f(p) (p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}) \\ &= f(p) D_v X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad D_v(X + Y) &= (p; D_v(X_1 + Y_1), \dots, D_v(X_{n+1} + Y_{n+1})) \\
&= (p; D_v X_1 + D_v Y_1, \dots, D_v X_{n+1} + D_v Y_{n+1}) \\
&= (p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}) + (p; D_v Y_1, \dots, D_v Y_{n+1}) \\
&= D_v X + D_v Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad D_v f X &= (p; D_v f X_1, \dots, D_v f X_{n+1}) \\
&= (p; (D_v f) X_1(p) + f(p) D_v X_1, \dots, (D_v f) X_{n+1}(p) + f(p) D_v X_{n+1}) \\
&= (D_v f)(p; X_1(p), \dots, X_{n+1}(p)) + f(p)(p; D_v X_1, \dots, D_v X_{n+1}) \\
&= (D_v f) X(p) + f(p) D_v X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad D_v \langle X, Y \rangle &= D_v \left( \sum_{i=1}^{n+1} X_i Y_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} D_v X_i Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \{ (D_v X_i) Y_i(p) + X_i(p) D_v Y_i \} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (D_v X_i) Y_i(p) + \sum_{i=1}^{n+1} X_i(p) D_v Y_i \\
&= \langle D_v X, Y(p) \rangle + \langle X(p), D_v Y \rangle
\end{aligned}$$

[ 証終 ]

## 2.3 ワインガルテン写像

$\mathbf{R}^{n+1}$  における  $n$  次元曲面  $f^{-1}(0)$  の各点  $p$  における接空間  $T_p(S)$  は, 和とスカラー倍を定義することにより,  $n$  次元線形空間の構造を持つ. このとき, 空間  $T_p(S)$  の分解に対応する直和分解

$$(\mathbf{R}^{n+1} \approx) \quad T_p(\mathbf{R}^{n+1}) = T_p(S) \oplus T_p(S)^\perp \quad (2.3)$$

を考えると,  $T_p(S)$  の直交補空間  $T_p(S)^\perp$  の次元は 1 である. 従って, 向き付け可能な曲面であれば, 各点  $p \in S$  に単位法ベクトル  $N(p) \in T_p(S)^\perp$  を連続的に対応させることができる. このように  $N(p)$  を対応させる写像を単位法ベクトル場という.

**補題 2.3.1**  $R^{n+1}$  における向き付け可能な  $n$  次元曲面  $S$  の単位法ベクトル場を  $N$  とすると, 各点  $p \in S$ , ベクトル  $v \in T_p(S)$  に対して  $D_v N \in T_p(S)$  である. つまり,  $D_v N \perp N(p)$  である.

[証明]  $0 = D_v 1 = D_v \langle N, N \rangle = 2 \langle D_v N, N(p) \rangle$ . [証終]

**注意 2.3.2**  $n$  次元曲面  $S$  のベクトル場  $X$  の  $v \in T_p(S)$  に関する微分  $D_v X$  は, 一般に  $S$  の接空間に平行でない.  $D_v X$  の接ベクトル成分  $\nabla_v X$  は

$$\nabla_v X = D_v X - \langle D_v X, N(p) \rangle N(p)$$

である. 特に, 補題 2.3.1 から  $\nabla_v N = D_v N$  である. 以後,  $R^{n+1}$  における  $n$  次元曲面は, 向き付け可能とする.

次に, この章の主題であるワインガルテン写像を定義する.

**定義 2.3.3**  $R^{n+1}$  における  $n$  次元曲面  $S$  の各点  $p$  における接空間  $T_p(S)$  の線形写像  $L_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  を

$$L_p(v) = -D_v N$$

と定義する. これをワインガルテン写像 (Weingarten Map) という.

**注意 2.3.4** 媒介変数平面曲線に対しても, 注意 1.2.3 で定義した単位法ベクトルから導入される単位法ベクトル場を用いて, ワインガルテン写像を定義できる.

ワインガルテン写像は, 次の性質 (線形性) を持っている.

**補題 2.3.5** 任意の  $C^\infty$  級関数  $g$  と任意の  $v, w \in T_p(S)$  について

1.  $L_p(v + w) = L_p(v) + L_p(w)$
2.  $L_p(gv) = g(p)L_p(v)$

が成り立つ.

証明は, 定義 2.3.3 及び補題 2.1.4 の第 1 式と第 2 式より明らかである.

補題 2.3.6 接ベクトル  $X, Y \in T_p(S)$  に対して,  $C^\infty$  級関数を

$$H(X, Y) = \langle L_p(X), Y \rangle$$

と定義する.  $H$  は, ベクトル  $X, Y, Z \in T_p(S)$  と任意の  $C^\infty$  級関数  $g$  について, 次の性質を持っている.

1.  $H(X + Y, Z) = H(X, Z) + H(Y, Z)$
2.  $H(gX, Y) = g(p)H(X, Y)$
3.  $H(X, Y) = H(Y, X)$

[証明] 1, 2 は  $L_p$  の線形性および内積の性質より明らかである. 従って, 3 のみを示す. 単位法ベクトル場を  $N$  とする. この曲面  $S$  は, 定義から明らかなように,  $\mathbf{R}^{n+1}$  の余次元 1 の正則部分多様体になっている. 従って, 局所的には,  $n$  個のパラメータによって表示されるので,  $S$  での  $p$  を中心とする局所座標系を  $x = x(u^1, \dots, u^n)$  とする. ここで,

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}, \quad N_i = \frac{\partial N}{\partial u^i}, \quad x_{i,j} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

とにおいて,  $\langle N, x_i \rangle = 0$  の両辺を  $u^j$  で微分すると  $\langle N_j, x_i \rangle + \langle N, x_{i,j} \rangle = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \langle -N, x_{i,j} \rangle &= \langle N_j, x_i \rangle \\ &= \langle -D_{x_j} N, x_i \rangle \\ &= \langle L_p(x_j), x_i \rangle \\ &= H(x_j, x_i). \end{aligned}$$

このとき,  $x_{j,i} = x_{i,j}$  なので,  $H(x_j, x_i) = H(x_i, x_j)$  が成り立つ. さらに 1, 2 より, 3 が成り立つ. [証終]

補題 2.3.6 より, 次の定理 2.3.7 が成り立つ.

定理 2.3.7 ワインガルテン写像  $L_p$  は自己共役である. すなわち任意の  $X, Y \in T_p(S)$  に対し,

$$\langle L_p(X), Y \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle$$

が成り立つ.

ワインガルテン写像の線形性および自己共役と並び, 次もその重要な性質である.

定理 2.3.8  $S$  を  $R^{n+1}$  の  $n$  次元曲面で, 媒介変数曲線  $\alpha$  が  $v = \alpha'(t_0)$  を満たせば,

$$\langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = \langle L_p(v), v \rangle.$$

が成り立つ.

[証明]  $\langle \alpha'(t), (N \circ \alpha)(t) \rangle = 0$  を  $t$  について微分し,  $t = t_0$  を代入すると,

$$\langle \alpha''(t_0), (N \circ \alpha)(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t_0), (N \circ \alpha)'(t_0) \rangle = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle + \langle v, D_v N \rangle = 0$$

従って,

$$\langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = \langle v, -D_v N \rangle = \langle L_p(v), v \rangle.$$

[ 証終 ]

## 第3章 曲線の曲率

本章では，前章で定義したワインガルテン写像を用いて曲率を定義し，曲率を通して平面曲線を考察する．

本章では，平面曲線に対して前章で導入したワインガルテン写像を用いて曲率を定義し，フルネ・セレーの公式を示す．その考察を通して，空間曲線に対するフルネ・セレーの公式も示す．また，それらの逆問題も扱う．

### 3.1 曲率

平面曲線  $C$  の各点  $p$  に対し，ワインガルテン写像は 1 次元の接空間  $T_p(C)$  から  $T_p(C)$  への線形写像である．平面曲線  $C$  の曲率を次のように定義する．

**定義 3.1.1** 平面曲線  $C$  の各点  $p$  と，その接ベクトル  $v \in T_p(C)$  に対し，

$$L_p(v) = \kappa(p)v \quad (3.1)$$

を満たす  $\kappa(p) \in \mathbb{R}$  が存在し，これを  $p \in C$  における曲率と定義する．

(3.1) の両辺を  $v$  との内積をとることで

$$\kappa(p) = \frac{\langle L_p(v), v \rangle}{\|v\|^2} \quad (3.2)$$

と書くこともできる．

**注意 3.1.2**  $L_p$  の線形性から  $\kappa(p)$  は， $v$  の大きさには無関係で  $v$  の方向だけで決定する．

平面曲線の単位法ベクトル場の向きを接ベクトル  $\alpha'(t)$  を反時計回りに  $\pi/2$  だけ回転させたものとするとき，次の定理が得られる．



**定理 3.1.3**  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  で定義された正則曲線とする .  
このとき , 曲率  $\kappa(\alpha(t))$  は ,

$$\kappa(\alpha(t)) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\}^{3/2}}$$

である .

[証明]  $N(\alpha(t))$  を  $\alpha(t)$  における  $\alpha$  の法ベクトルとすると , (3.2) と定理 2.3.8 より

$$\kappa(\alpha(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}. \quad (3.3)$$

また , 接ベクトル  $\alpha'(t) = (\alpha(t), x'(t), y'(t))$  を反時計回りに  $\pi/2$  だけ回転させたベクトルを  $n(t)$  とおくと

$$n(t) = (\alpha(t), -y'(t), x'(t))$$

である . このとき , 単位法ベクトル場  $N(\alpha(t))$  は

$$\begin{aligned} N(\alpha(t)) &= \left( \alpha(t); -\frac{y'(t)}{\|n(t)\|}, \frac{x'(t)}{\|n(t)\|} \right) \\ &= \left( \alpha(t); -\frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

である . また ,

$$\alpha''(t) = (\alpha(t), x''(t), y''(t)) \quad (3.5)$$

であるので , (3.4) と (3.5) を (3.3) に代入することで定理 3.1.3 が示される . [ 証終 ]

**定理 3.1.4**  $\mathbf{R}^2$  内の曲線  $C = f^{-1}(0)$  上の点  $p$  における曲率  $\kappa(p)$  は単位法ベクトル場  $N$  の向き付けにより

$$N = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{のとき} \quad \kappa(p) = \frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad (3.6)$$

$$N = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{のとき} \quad \kappa(p) = -\frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}. \quad (3.7)$$

[証明] i)  $N = \nabla f / \|\nabla f\|$  のとき,  $L_p(v)$   $v \in T_p(C)$  は

$$\begin{aligned} L_p(v) &= -D_v N \\ &= -D_v \left( \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) \\ &= - \left( D_v \frac{1}{\|\nabla f\|} \right) \nabla f(p) - \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} (D_v \nabla f). \end{aligned}$$

このとき,  $\langle \nabla f(p), v \rangle = 0$  なので

$$\langle L_p(v), v \rangle = - \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \langle D_v \nabla f, v \rangle. \quad (3.8)$$

また,  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  とおくと,  $\nabla f = (p; f_x, f_y)$  であるので, 注意 3.1.2 より,  $p$  における接ベクトル  $v$  に

$$v = (p; f_y, -f_x)$$

を選ぶと

$$\langle D_v \nabla f, v \rangle = f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2 \quad (3.9)$$

となる.

よって,  $\|v\| = \|\nabla f(p)\|$  であることから, (3.2), (3.8), (3.9) より

$$\begin{aligned} \kappa(p) &= - \frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

を得る. ii)  $N = -\nabla f / \|\nabla f\|$  のときも同様に示される.

[証終]

### 3.2 フルネ・セレー (Frenet-Serret) の公式

平面曲線が媒介変数曲線  $\gamma : I \rightarrow R^2$  であるとき, (3.1) に  $p = \gamma(t)$ ,  $v = \gamma'(t)$  を代入すると

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma(t)) \gamma'(t) &= L_p(\gamma'(t)) \\ &= -D_{\gamma'(t)} N \\ &= -(N \circ \gamma)'(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

単位接ベクトルを  $T(t)$  とすると,  $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|T(t)$  であるから (3.10) より

$$(N \circ \gamma)'(t) = -\kappa(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|T(t) \quad (3.11)$$

となる. 次に  $\langle (N \circ \gamma)(t), T(t) \rangle = 0$  を  $t$  について微分すると,

$$\langle (N \circ \gamma)'(t), T(t) \rangle + \langle (N \circ \gamma)(t), T'(t) \rangle = 0$$

(3.11) を代入すると,

$$\langle (N \circ \gamma)(t), T'(t) \rangle = \kappa(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| \quad (3.12)$$

となる.

また,  $\langle T(t), T(t) \rangle = 1$  を  $t$  について微分することにより,

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0. \quad (3.13)$$

さらに, (3.12) 及び (3.13) より

$$T'(t) = \kappa(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|(N \circ \gamma)(t). \quad (3.14)$$

ここで曲線の弧長関数を  $\ell(t)$  とすると,  $\ell'(t) = \|\gamma'(t)\|$  なので, (3.11), (3.14) は,

$$\begin{cases} T'(t) = \kappa(\gamma(t))\ell'(t)(N \circ \gamma)(t) \\ (N \circ \gamma)'(t) = -\kappa(\gamma(t))\ell'(t)T(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

である.  $\kappa(\gamma(t))$ ,  $(N \circ \gamma)(t)$  を, それぞれ  $\kappa(t)$ ,  $N(t)$  と書き改めることにより, 次の媒介変数平面曲線のフルネ・セレーの公式が示された.

**定理 3.2.1 (平面曲線のフルネ・セレーの公式)** 媒介変数平面曲線  $\gamma(t)$  の曲率を  $\kappa(t)$  とし, 単位接ベクトル, 単位法ベクトルをそれぞれ  $T(t)$ ,  $N(t)$  とおくと,

$$\begin{cases} T'(t) = \kappa(t)\ell'(t)N(t) \\ N'(t) = -\kappa(t)\ell'(t)T(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

となる.

特に弧長  $s$  を媒介変数とする平面曲線であれば,  $\ell'(s) = 1$  であるので

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) \end{cases} \quad (3.17)$$

となる.

次に，単位速度空間曲線  $\alpha : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  のフルネ・セレーの公式について述べる．  
最初に， $T(s) = \alpha'(s)$  ( $\|T(s)\| = 1$ ) に対して，

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad (\kappa(s) \geq 0) \quad (3.18)$$

となる単位ベクトル  $N(s)$  を定める． $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$  を微分することにより， $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$  となり，(3.18) より， $N(s)$  は  $T(s)$  に垂直である．

さらに

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (3.19)$$

とおくと， $T(s)$ ， $N(s)$ ， $B(s)$  は互いに垂直な単位ベクトルで，それぞれ単位接ベクトル，単位主法ベクトル，単位従法ベクトルといい，右手系をなす．これをフルネ (Frenet) 標構という．

$\langle B(s), B(s) \rangle = 1$  を  $s$  で微分することにより，

$$\langle B(s), B'(s) \rangle = 0. \quad (3.20)$$

また， $B(s) = T(s) \times N(s)$  を  $s$  で微分すると，(3.18) より

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= \kappa(s)N(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= T(s) \times N'(s) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となるので，(3.20),(3.21) より

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \quad (3.22)$$

を満たす関数  $\tau(s)$  が存在する．

$N(s) = B(s) \times T(s)$  を  $s$  で微分すると，(3.18),(3.19) より

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s) \times T(s) + B(s) \times \kappa(s)N(s) \\ &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

よって， $\kappa(s)$  は (3.18) より

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| = \|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\| \quad (3.24)$$

である．また，

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= T(s) \\ \alpha''(s) &= T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ \alpha'''(s) &= \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 |\alpha'(s) \ \alpha''(s) \ \alpha'''(s)| &= |T(s) \ \kappa(s)N(s) \ \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s))| \\
 &= |T(s) \ \kappa(s)N(s) \ \kappa(s)\tau(s)B(s)| \\
 &= \{\kappa(s)\}^2\tau(s)|T(s) \ N(s) \ B(s)| \\
 &= \{\kappa(s)\}^2\tau(s)
 \end{aligned}$$

となる．従って,

$$\tau(s) = \frac{|\alpha'(s) \ \alpha''(s) \ \alpha'''(s)|}{\{\kappa(s)\}^2} \quad (3.25)$$

を得る．

以上のことから, 次の定理が成り立つことが示された．

**定理 3.2.2** (単位速度空間曲線のフルネ・セレーの公式)  $T'(s), N'(s), B'(s)$  は  $T(s), N(s), B(s)$  を用いて次のように表される．

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (3.26)$$

ただし,

$$\begin{cases} \kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\| \\ \tau(s) = \frac{|\alpha'(s) \ \alpha''(s) \ \alpha'''(s)|}{\{\kappa(s)\}^2} = \frac{|\alpha'(s) \ \alpha''(s) \ \alpha'''(s)|}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \end{cases} \quad (3.27)$$

とする．

上の定理の  $\kappa(s) (\geq 0)$ ,  $\tau(s)$  をそれぞれ単位速度空間曲線  $\alpha$  における曲率, 捩率とよぶ．

一般の空間曲線  $\gamma : I \rightarrow R^3$  についても弧長関数  $\ell(t)$  を用いて, 曲率を  $\kappa(\ell(t))$ , 捩率を  $\tau(\ell(t))$  と定義することができる．この時,  $\gamma$  に対するフルネ・セレーの公式を考えよう．

まず, 定理 1.2.5 より, 単位速度空間曲線  $\alpha = \gamma \circ \ell^{-1}$  を考える． $s = \ell(t)$  を代入すると

$$\gamma(t) = (\alpha \circ \ell)(t) \quad (3.28)$$

である．このとき

$$\begin{aligned}(T \circ \ell)'(t) &= \ell'(t)T'(s) \\ (N \circ \ell)'(t) &= \ell'(t)N'(s) \\ (B \circ \ell)'(t) &= \ell'(t)B'(s)\end{aligned}$$

なので，(3.26) より

$$\begin{cases} (T \circ \ell)'(t) = \kappa(\ell(t))\ell'(t)(N \circ \ell)(t) \\ (N \circ \ell)'(t) = -\kappa(\ell(t))\ell'(t)(T \circ \ell)(t) + \tau(\ell(t))\ell'(t)(B \circ \ell)(t) \\ (B \circ \ell)'(t) = -\tau(\ell(t))\ell'(t)(N \circ \ell)(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

となる．

(3.28) を  $t$  について微分すると

$$\gamma'(t) = \ell'(t)\alpha'(s), \quad (3.30)$$

$$\gamma''(t) = \{\ell'(t)\}^2\alpha''(s) + \ell''(t)\alpha'(s), \quad (3.31)$$

$$\gamma'''(t) = \{\ell'(t)\}^3\alpha'''(s) + 3\ell'(t)\ell''(t)\alpha''(s) + \ell'''(t)\alpha'(s) \quad (3.32)$$

なので， $\ell'(t) = \|\gamma'(t)\|$  であることに注意して，(3.30),(3.31),(3.32) から

$$\begin{cases} \|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = \|\gamma'(t)\|^3 \|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\| \\ |\gamma'(t) \ \gamma''(t) \ \gamma'''(t)| = \|\gamma'(t)\|^6 |\alpha'(s) \ \alpha''(s) \ \alpha'''(s)| \end{cases} \quad (3.33)$$

となる．さらに (3.27),(3.33) より

$$\begin{cases} \kappa(\ell(t)) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(\ell(t)) = \frac{|\gamma'(t) \ \gamma''(t) \ \gamma'''(t)|}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

とかける．

いま， $(T \circ \ell)(t)$ ， $(N \circ \ell)(t)$ ， $(B \circ \ell)(t)$ ， $\kappa(\ell(t))$ ， $\tau(\ell(t))$  は  $t$  の関数なので，それぞれ改めて， $T(t)$ ， $N(t)$ ， $B(t)$ ， $\kappa(t)$ ， $\tau(t)$  と書き直すことにより，(3.29) 及び (3.34) から次の公式を得る．

定理 3.2.3 (空間曲線のフルネ・セレーの公式) 空間曲線  $\gamma(t)$  の単位接ベクトル, 単位主法ベクトル, 単位従法ベクトルをそれぞれ  $T(t)$ ,  $N(t)$ ,  $B(t)$  とし, 曲率を  $\kappa(t) (\geq 0)$ , 撓率を  $\tau(t)$ , 弧長を  $\ell(t)$  とおくと, 次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} T'(t) = \kappa(t)\ell'(t)N(t) \\ N'(t) = -\kappa(t)\ell'(t)T(t) + \tau(t)\ell'(t)B(t) \\ B'(t) = -\tau(t)\ell'(t)N(t) \end{cases} \quad (3.35)$$

ただし,

$$\begin{cases} \kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(t) = \frac{|\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)|}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \end{cases} \quad (3.36)$$

とする.

### 3.3 与えられた曲率を持つ曲線の存在性

これまでに, 与えられた曲線によって曲率や撓率が決定されることを述べた. 逆に曲率などの関数はどこまで曲線を決定しうるかを考える. 以下, 補題 3.3.1 から定理 3.3.3 まで, そのための準備をする.

補題 3.3.1  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  が互いに異なる数であるとき, 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = d \\ \dots\dots\dots \\ \lambda^{n-1} x_1 + \lambda^{n-1} x_2 + \dots + \lambda^{n-1} x_n = d^{n-1} \end{cases} \quad (3.37)$$

の解は,

$$x_k = \frac{(d - \lambda_1) \dots (d - \lambda_{k-1})(d - \lambda_{k+1}) \dots (d - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (3.38)$$

である.

[証明] クラメル公式 (Cramer's formula) (参考文献 [13, p. 89]) 及びヴァンデル

モンドの行列式 (Vandermonde's determinant) (参考文献 [13, p. 82]) より

$$\begin{aligned}
 x_k &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & d & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & d^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_k^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\left(\prod_{i,j \neq k, i < j} (\lambda_j - \lambda_i)\right) \left(\prod_{k < j \leq n} (\lambda_j - d)\right) \left(\prod_{1 \leq i < k} (d - \lambda_i)\right)}{\left(\prod_{i,j \neq k, i < j} (\lambda_j - \lambda_i)\right) \left(\prod_{k < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_k)\right) \left(\prod_{1 \leq i < k} (\lambda_k - \lambda_i)\right)} \\
 &= \frac{(d - \lambda_1) \dots (d - \lambda_{k-1})(d - \lambda_{k+1}) \dots (d - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)}
 \end{aligned}$$

[ 証終 ]

$V$  を  $n$  次元ベクトル空間とすると、 $n$  次正方行列  $A$  の相異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である (参考文献 [13, p. 131] を参照)。特に  $A$  が  $n$  個の相異なる固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を持つとき、その固有値に対する固有空間をそれぞれ  $W_1, W_2, \dots, W_n$  とおくと、直和  $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$  は  $V$  全体に一致する。

ここで、 $V$  の任意の元  $x$  は、 $W_k$  の元  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) の線形結合として

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

と一意的に表される。

行列  $A - \lambda_k I$  は  $V$  から  $W_k^\perp$  への写像であるので、行列

$$(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \dots (A - \lambda_n I)$$

は  $V$  から  $W_k$  への写像となる。ここで行列  $P_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を

$$P_k = \frac{(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \dots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} \quad (3.39)$$

とおくと、 $P_k$  は  $x$  に  $x_k$  を対応させる写像であり、 $P_k$  を  $V$  の  $W_k$  への射影子という。このとき、次の定理が成り立つ。



定理 3.3.2  $V$  を  $n$  次元ベクトル空間とする .  $n$  次正方行列  $A$  が  $n$  個の相異なる固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を持つとき , 次の条件を満たす射影子  $P_1, P_2, \dots, P_n$  が一意的に定まる .

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + \dots + P_n &= I \\ P_i P_j &= O \quad (i \neq j) \\ \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n &= A \end{aligned}$$

これを , 行列  $A$  のスペクトル分解という .

[証明]  $A$  の相異なる  $n$  個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  に対する固有空間をそれぞれ  $W_1, W_2, \dots, W_n$  とおく .  $V$  の任意の元  $x$  は ,  $W_k$  の元  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) の線形結合として

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

と一意にかくことができる . このとき , 射影子の性質から

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ &= P_1 x + P_2 x + \dots + P_n x \\ &= (P_1 + P_2 + \dots + P_n)x \end{aligned}$$

であるので ,

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = I \tag{3.40}$$

が成り立つ . また ,  $i \neq j$  のとき  $P_i P_j x = P_i x_j = 0$  なので ,

$$P_i P_j = O \quad (i \neq j) \tag{3.41}$$

が成り立つ .

さらに ,

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \\ &= \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \dots + \lambda_n P_n x \\ &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n)x \end{aligned}$$

となる . よって ,

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n \tag{3.42}$$



[証明] (3.44) を利用する .

$$\begin{aligned}
 e^A &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^m P_k}{m!} \\
 &= \sum_{k=1}^n P_k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^m}{m!} \\
 &= \sum_{k=1}^n P_k e^{\lambda_k}.
 \end{aligned}$$

[ 証終 ]

平面曲線が与えられたとき，その曲率が決定したが，逆に与えられた曲率から曲線を決定する条件について，次の定理が成り立つ .

**定理 3.3.4**  $t$  の関数  $\kappa(t)$  と単調増加関数  $\ell(t)$  が与えられたとき， $\kappa(t)$  を曲率， $\ell(t)$  を弧長とする平面曲線  $\gamma(t)$  は初期値  $\gamma(t_0)$ ,  $\gamma'(t_0)$  により一意的に定まる .

[証明] フルネ・セレーの公式 (3.16) より

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t)\ell'(t) \\ \kappa(t)\ell'(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

ここで

$$K(t) = \int_{t_0}^t \kappa(u)\ell'(u) du \quad (3.46)$$

とし，行列  $F(t)$  を

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & -K(t) \\ K(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

とおくと，(3.45) より

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} F'(t).$$

両辺に  $e^{-F(t)}$  を掛けることにより

$$\left\{ \begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} e^{-F(t)} \right\}' = 0$$

が従う．積分して  $e^{F(t)}$  を掛けることにより

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} = C e^{F(t)} \quad (C \text{ は } 2 \times 2 \text{ の定数行列}). \quad (3.48)$$

$t = t_0$  のとき, (3.46), (3.47), (3.48) より

$$\begin{pmatrix} T(t_0) & N(t_0) \end{pmatrix} = C \quad (3.49)$$

となる．ここで

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

とおくと,

$$N(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

となるので, (3.49), (3.50), (3.51) より

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

となる．

次に, 行列  $F(t)$  のスペクトル分解は

$$F(t) = iK(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - iK(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{aligned} e^{F(t)} &= e^{iK(t)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^{-iK(t)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos K(t) & -\sin K(t) \\ \sin K(t) & \cos K(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

(3.48), (3.52), (3.53) から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos K(t) & -\sin K(t) \\ \sin K(t) & \cos K(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(K(t) + \theta_0) & -\sin(K(t) + \theta_0) \\ \sin(K(t) + \theta_0) & \cos(K(t) + \theta_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos(K(t) + \theta_0) \\ \sin(K(t) + \theta_0) \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

よって,  $T(t) = \gamma'(t)/\ell'(t)$  であることより,  $\gamma'(t)$  は,

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \ell'(t) \cos(K(t) + \theta_0) \\ \ell'(t) \sin(K(t) + \theta_0) \end{pmatrix}$$

を満たす. 初期値  $\gamma(t_0)$  を持つ, この微分方程式  $\gamma$  は, 一意的に

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \ell'(u) \cos(K(u) + \theta_0) du \\ \int_{t_0}^t \ell'(u) \sin(K(u) + \theta_0) du \end{pmatrix}$$

と定まる.

[ 証終 ]

**系 3.3.5**  $s$  の関数  $\kappa(s)$  が与えられたとき,  $s$  を弧長,  $\kappa(s)$  を曲率とする単位速度平面曲線  $\alpha(s)$  は, 初期値  $\alpha(s_0), \alpha'(s_0)$  により一意的に定まる.

[証明] 定理 3.3.4 の証明の最後の式に  $\ell'(u) = 1$  を代入し, 変数  $t$  を  $s$  に置き直すことにより

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \begin{pmatrix} \int_{s_0}^s \cos(K(u) + \theta_0) du \\ \int_{s_0}^s \sin(K(u) + \theta_0) du \end{pmatrix}$$

と定まる. ただし,

$$K(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du, \quad \alpha'(s_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

である.

[ 証終 ]

**例 3.3.6** 曲率  $\kappa$  が弧長  $s$  の一次関数となるクロソイド曲線 (clothoid) について考えてみる. 仮に,  $\kappa(s) = 2s, s_0 = 0$  とおいて,  $\alpha(s_0) = (0, 0), \alpha'(s_0) = (1, 0)$  とすれば, 系 (3.3.5) から,  $K(u) = u^2, \theta_0 = 0$  である. このとき,

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \int_0^s \cos u^2 du \\ \int_0^s \sin u^2 du \end{pmatrix}$$

となる.

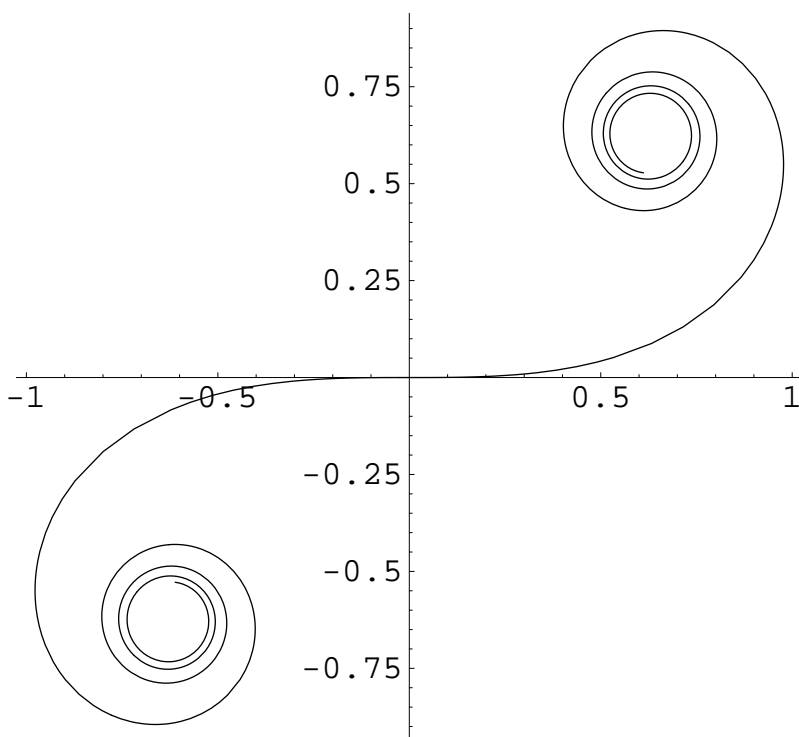


図 3.1:  $x = \int_0^s \cos u^2 du, \quad y = \int_0^s \sin u^2 du \quad (-5 \leq s \leq 5)$

次に，3次元空間曲線について同様な考察を行う．

**定理 3.3.7**  $t$  の関数  $\kappa(t) (\geq 0)$ ,  $\tau(t)$  と単調増加関数  $l(t)$  が与えられたとき， $\kappa(t)$  を曲率， $\tau(t)$  を捻率， $l(t)$  を弧長とする空間曲線  $\gamma(t)$  は，初期値  $\gamma(t_0), \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)$  により一意的に定まる．

[証明] (3.35) より

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t)l'(t) & 0 \\ \kappa(t)l'(t) & 0 & -\tau(t)l'(t) \\ 0 & \tau(t)l'(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

ここで

$$K_1(t) = \int_{t_0}^t \kappa(u)l'(u) du \quad (3.56)$$

$$K_2(t) = \int_{t_0}^t \tau(u)l'(u) du \quad (3.57)$$

とし, 行列  $F(t)$  を

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & -K_1(t) & 0 \\ K_1(t) & 0 & -K_2(t) \\ 0 & K_2(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

とおくと, (3.55) より

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix} F'(t).$$

両辺に  $e^{-F(t)}$  を掛けることにより

$$\left\{ \begin{pmatrix} T(t) & N(t) \end{pmatrix} e^{-F(t)} \right\}' = O$$

が従う. 積分して  $e^{F(t)}$  を掛けることにより

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix} = C e^{F(t)} \quad (C \text{ は } 3 \times 3 \text{ の定数行列}). \quad (3.59)$$

を得る.  $t = t_0$  のとき, (3.56), (3.57), (3.58), (3.59) より

$$\begin{pmatrix} T(t_0) & N(t_0) & B(t_0) \end{pmatrix} = C \quad (3.60)$$

となる. ここで

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \quad (3.61)$$

$$B(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \times \frac{\gamma''(t_0)}{\|\gamma''(t_0)\|} \quad (3.62)$$

である. ベクトル三重積  $(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$  を利用すると, (3.61), (3.62) より

$$\begin{aligned} N(t_0) &= B(t_0) \times T(t_0) \\ &= \left( \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \times \frac{\gamma''(t_0)}{\|\gamma''(t_0)\|} \right) \times \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \\ &= \frac{\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle \gamma''(t_0) - \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle \gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|^2 \|\gamma''(t_0)\|} \end{aligned} \quad (3.63)$$

となり,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(t_0) & N(t_0) & B(t_0) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

となる．

次に，行列  $F(t)$  の固有値を求めると， $\pm i\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}$ ， $0$  である．定理 3.3.3 より

$$\lambda_1 = i\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}, \quad \lambda_3 = 0$$

とおくと，射影子  $P_1, P_2, P_3$  は，

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{(F(t))^2 + i\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}F(t)}{2\{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2\}}, \\ P_2 &= -\frac{(F(t))^2 - i\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}F(t)}{2\{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2\}}, \\ P_3 &= \frac{(F(t))^2 + \{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2\}I}{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2} \end{aligned}$$

であるから，これらの式より

$$\begin{aligned} e^{F(t)} &= e^{\lambda_1} P_1 + e^{\lambda_2} P_2 + e^{\lambda_3} P_3 \\ &= \frac{1 - \cos \sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}}{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2} (F(t))^2 + \frac{\sin \sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}}{\sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2}} F(t) + I \end{aligned} \quad (3.65)$$

とかける．簡略のため，

$$\theta(t) = \sqrt{(K_1(t))^2 + (K_2(t))^2} \quad (3.66)$$

とにおいて媒介変数  $t$  を省略すると，(3.65) は

$$e^{F(t)} = \frac{1}{\theta^2} \begin{pmatrix} K_2^2 - K_1^2 \cos \theta & -K_1 \theta \sin \theta & K_1 K_2 (1 - \cos \theta) \\ K_1 \theta \sin \theta & (K_1^2 + K_2^2) \cos \theta & -K_2 \theta \sin \theta \\ K_1 K_2 (1 - \cos \theta) & K_2 \theta \sin \theta & K_1^2 + K_2^2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

となる．(3.66) で表した  $e^{F(t)}$  の成分を

$$e^{F(t)} = \begin{pmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{12}(t) & \xi_{13}(t) \\ \xi_{21}(t) & \xi_{22}(t) & \xi_{23}(t) \\ \xi_{31}(t) & \xi_{32}(t) & \xi_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

とおくと，(3.59),(3.64),(3.68) より

$$\begin{pmatrix} T(t) & N(t) & B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{12}(t) & \xi_{13}(t) \\ \xi_{21}(t) & \xi_{22}(t) & \xi_{23}(t) \\ \xi_{31}(t) & \xi_{32}(t) & \xi_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$



となるので，

$$T(t) = \begin{pmatrix} c_{11}\xi_{11}(t) + c_{12}\xi_{12}(t) + c_{13}\xi_{13}(t) \\ c_{21}\xi_{21}(t) + c_{22}\xi_{22}(t) + c_{23}\xi_{23}(t) \\ c_{31}\xi_{31}(t) + c_{32}\xi_{32}(t) + c_{33}\xi_{33}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

よって， $T(t) = \gamma'(t)/\ell'(t)$  であることより， $\gamma'(t)$  は，

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \ell'(t)(c_{11}\xi_{11}(t) + c_{12}\xi_{12}(t) + c_{13}\xi_{13}(t)) \\ \ell'(t)(c_{21}\xi_{21}(t) + c_{22}\xi_{22}(t) + c_{23}\xi_{23}(t)) \\ \ell'(t)(c_{31}\xi_{31}(t) + c_{32}\xi_{32}(t) + c_{33}\xi_{33}(t)) \end{pmatrix}$$

を満たす．初期値  $\gamma(t_0)$  を持つ，この微分方程式の解  $\gamma$  は，一意的に

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \ell'(u)(c_{11}\xi_{11}(u) + c_{12}\xi_{12}(u) + c_{13}\xi_{13}(u)) du \\ \int_{t_0}^t \ell'(u)(c_{21}\xi_{21}(u) + c_{22}\xi_{22}(u) + c_{23}\xi_{23}(u)) du \\ \int_{t_0}^t \ell'(u)(c_{31}\xi_{31}(u) + c_{32}\xi_{32}(u) + c_{33}\xi_{33}(u)) du \end{pmatrix}$$

と定まる．

[ 証終 ]

系 3.3.5 と同様に，次を得る．

**系 3.3.8**  $s$  の関数  $\kappa(s) (\geq 0)$ ,  $\tau(s)$  が与えられたとき， $s$  を弧長， $\kappa(s)$  を曲率， $\tau(s)$  を捩率とする単位速度空間曲線  $\alpha(s)$  は，初期値  $\alpha(s_0)$ ,  $\alpha'(s_0)$ ,  $\alpha''(s_0)$  により一意的に定まる．

## 第4章 曲面の曲率

本章では，曲面に対して，法曲率や主曲率の概念を導入する．さらに，ワインガルテン写像の表す行列を考えることで，ガウス・クロネッカー曲率や平均曲率を定義し，主曲率との関係を述べる．

### 4.1 主曲率

$S$  を  $R^{n+1}$  内の向き付け可能な  $n$  次元曲面とする．2章で定義したワインガルテン写像  $L_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  は， $v \in T_p(S)$  に関する単位法ベクトルの変化の割合を示している．特に， $\|v\| = 1$  とすれば， $L_p(v)$  の線形性から  $\langle L_p(v), v \rangle$  は， $v$  の方向だけで定まることに注意して，次を定義する．

定義 4.1.1  $\|v\| = 1$  のとき，

$$\kappa_p(v) = \langle L_p(v), v \rangle$$

を  $p$  における  $v$  方向の  $S$  の法曲率という．

注意 4.1.2  $\kappa_p(v)$  は，定理 2.3.8 より， $\kappa_p(v) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle$  なので，加速度ベクトル  $\alpha''(t_0)$  が  $N$  と同じ方を向いているとき， $\kappa_p(v) > 0$  であり， $\alpha''(t_0)$  が  $N$  と反対の方を向いているとき， $\kappa_p(v) < 0$  である (図 4.1) ．

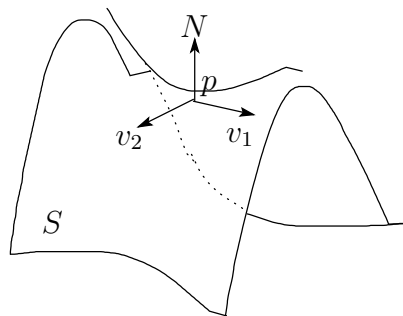


図 4.1:  $\kappa_p(v_1) > 0$ ,  $\kappa_p(v_2) < 0$

$S_p = \{v \in T_p(S) \mid \|v\| = 1\}$  とする． $v \in S_p$  に対し， $p$  における  $v$  方向の  $S$  の法曲率  $\kappa_p(v)$  を対応させることにより，関数  $\kappa_p : S_p \rightarrow R$  が定義される．このとき，次が成

り立つ.

**定理 4.1.3**  $v_0 \in S_p$  に対し,  $L_p(v_0) = \kappa_p(v_0)v_0$  であるための必要十分条件は,  $\kappa_p$  が  $v_0$  で極値をとることである.

**注意 4.1.4**  $L_p(v_0) = \kappa_p(v_0)v_0$  となるとき,  $\kappa_p(v_0)$  は, 線形写像  $L_p$  の固有値で,  $v_0$  は  $\kappa_p(v_0)$  に対する固有ベクトルである.

[証明]  $v_0 \in S_p$  とし,  $v: I \rightarrow S_p$  ( $I$  は开区間) を  $v(t_0) = v_0$  となる微分可能写像とする.  $\langle v(t), v(t) \rangle = 1$  を  $t$  で微分することにより  $\langle v(t), v'(t) \rangle = 0$  である. このとき,

$$v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

であるから,  $v'(t) \in T_p(S)$  であり,  $v'(t) \in v(t)^\perp$  となる. 特に,  $v(t_0) = v_0$  となる任意の微分可能写像  $v: I \rightarrow S_p$  に対し,  $v'(t_0) \in v_0^\perp$  である.

また,  $N(p) = (p, N_1(p), \dots, N_{n+1}(p))$  とすると, 定義 2.3.3 より

$$L_p(v(t)) = -D_{v(t)}N = (p, \langle -\nabla N_1(p), v(t) \rangle, \dots, \langle -\nabla N_{n+1}(p), v(t) \rangle)$$

であるから,  $\frac{d}{dt}L_p(v(t)) = L_p(v'(t))$  が成り立つ. これらの性質とワインガルテン写像の自己共役性を利用して証明する.

(必要条件)  $L_p(v_0) = \kappa_p(v_0)v_0$  であるとする.  $v(t_0) = v_0$  となる任意の微分可能写像  $v: I \rightarrow S_p$  に対し,

$$\begin{aligned} (\kappa_p \circ v)'(t_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \langle L_p(v(t)), v(t) \rangle \\ &= 2\langle L_p(v(t_0)), v'(t_0) \rangle = 2\langle \lambda v(t_0), v'(t_0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

従って,  $\kappa_p$  は,  $v_0$  で極値をとる.

(十分条件)  $\kappa_p$  が  $v_0 = v(t_0)$  で, 極値をとるとすると,

$$\begin{aligned} 0 &= (\kappa_p \circ v)'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \langle L_p(v(t)), v(t) \rangle \\ &= \langle L_p(v'(t_0)), v(t_0) \rangle + \langle L_p(v_0), v'(t_0) \rangle \\ &= 2\langle L_p(v(t_0)), v'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき,  $v'(t_0)$  は  $v_0^\perp$  のすべての方向をとり得るので,  $L_p(v(t_0)) \perp v_0^\perp$  である. 従って, 実数  $\lambda$  が存在し,  $L_p(v_0) = \lambda v_0$  がいえる.  $v_0$  は  $L_p$  の固有ベクトルであり, 固有値  $\lambda$  は,

$$\lambda = \langle \lambda v_0, v_0 \rangle = \langle L_p(v_0), v_0 \rangle = \kappa_p(v_0).$$

[ 証終 ]

定理 4.1.5  $L_p$  の固有ベクトルからなる  $T_p(S)$  の正規直交基底が存在する .

[証明]  $n = \dim T_p(S)$  より  $W_n = T_p(S)$  とおく . ここでは ,  $T_p(S)$  の正規直交基底をなす  $L_p$  の固有ベクトルを帰納的に構成する .

$v_1 \in S_p$  について , 定理 4.1.3 より ,  $L_p(v_1) = \kappa_p(v_1)v_1$  が成り立つ . このとき , 基底  $\{v_1\}$  とする  $W_n$  の線形部分空間を  $W_1$  とすると ,  $L_p|_{W_1}$  は ,  $W_1$  から  $W_1$  への写像である .

次に ,  $W_k$  を  $W_n$  の線形部分空間とし ,  $W_k$  の正規直交基底  $\{v_1, \dots, v_k\}$  は ,  $L_p$  の固有ベクトルからなり ,  $L_p|_{W_k}$  は  $W_k$  から  $W_k$  への写像であると仮定する .

任意の  $w \in W_k^\perp$  に対し ( $1 \leq j \leq k$ ) ,

$$\langle L_p(w), v_j \rangle = \langle L_p(v_j), w \rangle = \kappa_p(v_j) \langle v_j, w \rangle = 0$$

が成り立つので ,  $L_p|_{W_k^\perp}$  は ,  $W_k^\perp$  から  $W_k^\perp$  への写像である .  $\kappa_p|_{W_k^\perp}(v)$  の極値をとるある  $v_{k+1} \in W_k^\perp$  について , 定理 4.1.3 より ,  $L_p(v_{k+1}) = \kappa_p(v_{k+1})v_{k+1}$  が成り立つ . ここで ,  $W_{k+1} = W_k \oplus \langle v_{k+1} \rangle$  とおくと ,  $W_{k+1}$  は ,  $L_p$  の固有ベクトルからなる  $W_{k+1}$  の正規直交基底である . また ,  $L_p|_{W_{k+1}}$  は ,  $W_{k+1}$  から  $W_{k+1}$  への写像である . 従って , 題意を満たす正規直交基底が帰納的に構成できる . [証終]

定理 4.1.5 より次のことが定義される .

定義 4.1.6  $S$  を  $R^{n+1}$  における向き付け可能な  $n$  次元曲面とする . このとき , ワインガルテン写像  $L_p : S_p \rightarrow S_p$  の固有ベクトル  $v_i$  ( $\|v_i\| = 1$ ) に対して ,  $\kappa_p(v_i)$  を  $S$  の  $p$  における主曲率といい ,  $v_i$  の方向を主曲率方向という ( $i = 1, \dots, n$ ) .

ここで , 曲面の形状について , 主曲率を用いて定義しておく .

定義 4.1.7  $S$  を  $R^{n+1}$  における向き付け可能な  $n$  次元曲面とする .  $p$  における主曲率を  $\kappa_p(v_1) \geq \kappa_p(v_2) \geq \dots \geq \kappa_p(v_n)$  とするとき ,

- i)  $\kappa_p(v_1) < 0$  または  $\kappa_p(v_n) > 0$  のとき ,  $p$  は楕円点
- ii)  $\kappa_p(v_1) > 0$  かつ  $\kappa_p(v_n) < 0$  (ただし ,  $\kappa_p(v_i) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ )) のとき ,  $p$  は双曲点
- iii) ある  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) に対し ,  $\kappa_p(v_m) = 0$  となるとき ,  $p$  は放物点
- iv) すべての  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) に対し ,  $\kappa_p(v_m) = 0$  となるとき ,  $p$  は平坦点

と定義する . 曲面上のすべての点において , 楕円点 , 双曲点 , 放物点 , 平坦点であるとき , それぞれ楕円面 , 双曲面 , 放物面 , 平面という .

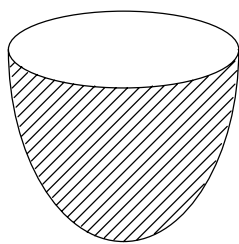


図 4.2: 楕円面

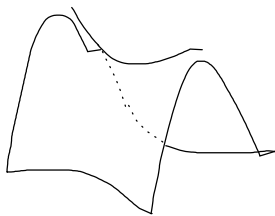


図 4.3: 双曲面

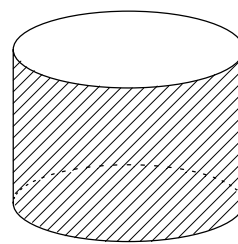


図 4.4: 放物面

$R^{n+1}$  における向き付け可能な  $n$  次元曲面  $S$  に対し,  $p$  におけるワインガルテン写像  $L_p$  の表す行列を  $A$  とするとき,  $K(p) = \det A$  をガウス・クロネッカー曲率といい,  $H(p) = \text{tr}A/n$  を  $S$  の  $p$  における平均曲率という. このとき, 次が成り立つ.

定理 4.1.8

$$K(p) = \prod_{i=1}^n \kappa_p(v_i), \quad H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_p(v_i)$$

[証明]  $L_p$  の  $S_p$  における任意の基底  $\{w_1, \dots, w_n\}$  に関する行列を  $A$  すると,

$$(w_1 \cdots w_n)A = (L_p(w_1) \cdots L_p(w_n))$$

である. ここで定理 4.1.5 より,  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $S_p$  の正規直交基底をなす  $L_p$  の固有ベクトルとする. これを用いて  $w_i = c_{1i}v_1 + \cdots + c_{ni}v_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と一意的にかける. 簡単のため,  $C = (c_{ij})$  とおくと

$$\begin{aligned} (v_1 \cdots v_n)CA &= (L_p(v_1) \cdots L_p(v_n))C \\ &= (\kappa_p(v_1)v_1 \cdots \kappa_p(v_n)v_n)C \end{aligned}$$

となり, 両辺に左側から行列  ${}^t(v_1 \cdots v_n)$  をかけると

$$CA = \begin{pmatrix} \kappa_p(v_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_p(v_n) \end{pmatrix} C$$

となる. 上式に対角行列を  $X$  とおくと,  $C$  は正則であるから  $A = C^{-1}XC$  が成り立つ.

$K(p)$  の式は  $\det C^{-1}XC = \det X$  より, また,  $H(p)$  の式は  $\text{tr}C^{-1}XC = \text{tr}X$  より従う. [証終]

注意 4.1.9 定理 4.1.8 の証明より, ガウス・クロネッカー曲率および平均曲率は, 基底の取り方に依存しない不変量である.

注意 4.1.10 前章の定義 3.1.1 で述べた曲線の曲率  $\kappa(p)$  を一般化したものが，定義 4.1.1 で述べた法曲率  $\kappa_p(v)$  である．曲線の接方向  $v$  は， $p$  によって決定し，その方向が主曲率方向でもある． $\kappa(p)$  は，このことから，主曲率でもある．さらに，曲線の曲率  $\kappa(p)$  は，定理 4.1.8 より  $n = 1$  のときのガウス・クロネッカー曲率でもあり，平均曲率でもある．

## 4.2 ガウス・クロネッカー曲率

ここでは，前節で定義したガウス・クロネッカー曲率  $K(p)$  について述べる．

定理 4.2.1  $S$  を  $R^{n+1}$  内の向き付け可能な  $n$  次元曲面とし， $p$  を  $S$  上の点とする． $N$  を  $S$  上の単位法ベクトル場， $\{w_1, \dots, w_n\}$  を  $T_p(S)$  の任意の基底とする．このとき

$$K(p) = (-1)^n \frac{\det(D_{w_1}N \cdots D_{w_n}N \ N(p))}{\det(w_1 \cdots w_n \ N(p))}$$

である．

[証明]  $(D_{w_1}N \cdots D_{w_n}N \ N(p)) = (-L_p(w_1) \cdots -L_p(w_n) \ N(p))$  より，ワインガルテン写像  $L_p$  の表す行列を  $A$  とすると

$$\begin{aligned} \det(D_{w_1}N \cdots D_{w_n}N \ N(p)) &= \det(-L_p(w_1) \cdots -L_p(w_n) \ N(p)) \\ &= (-1)^n \det(L_p(w_1) \cdots L_p(w_n) \ N(p)) \\ &= (-1)^n \det \left[ (w_1 \cdots w_n \ N(p)) \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-1)^n \det(w_1 \cdots w_n \ N(p)) \det A \end{aligned}$$

となる．行列  $(w_1 \cdots w_n \ N(p))$  は正則であるので， $K(p) = \det A$  より，題意は満たされた．

[ 証終 ]

**定理 4.2.2**  $S$  を  $R^{n+1}$  内の向き付け可能な  $n$  次元曲面とし,  $p$  を  $S$  上の点とする.  $Z$  を  $S$  上の 0 でない法ベクトル場,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  を  $T_p(S)$  の任意の基底とすると,

$$N = Z/\|Z\| \text{ のとき } K(p) = (-1)^n \frac{\det(D_{w_1}Z \cdots D_{w_n}Z Z(p))}{\|Z(p)\|^n \det(w_1 \cdots w_n Z(p))},$$

$$N = -Z/\|Z\| \text{ のとき } K(p) = \frac{\det(D_{w_1}Z \cdots D_{w_n}Z Z(p))}{\|Z(p)\|^n \det(w_1 \cdots w_n Z(p))}$$

である.

[証明] i)  $N = Z/\|Z\|$  のとき,  $D_{w_i}N = D_{w_i} \frac{Z}{\|Z\|} = \left( D_{w_i} \frac{1}{\|Z\|} \right) Z + \frac{1}{\|Z\|} D_{w_i}Z$  ( $i = 1, \dots, n$ ) なので,

$$\det(D_{w_1}N \cdots D_{w_n}N N) = \frac{1}{\|Z\|^{n+1}} \det(D_{w_1}Z \cdots D_{w_n}Z Z)$$

$$\det(w_1 \cdots w_n N) = \frac{1}{\|Z\|} \det(w_1 \cdots w_n Z(p))$$

となる. よって, 定理 4.2.1 より題意を満たす.

ii)  $N = -Z/\|Z\|$  のとき, i) の場合と同様の考察により示される. [証終]

$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  で与えられる  $R^{n+1}$  内の曲面の単位法ベクトル場は, 容易に求めることができる. 次に, この場合のガウス・クロネッカー曲率を計算する.

**定理 4.2.3**  $R^{n+1}$  内で方向付けられた  $n$  次元曲面  $S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$  のガウス・クロネッカー曲率  $K(p)$  は, 単位法ベクトル場を  $N$  とすると

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき } K(p) = -(-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \text{Hesse}f(p) & \nabla f(p) \\ {}^t\nabla f(p) & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f(p)\|^{n+2}},$$

$$N = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき } K(p) = -\frac{\begin{vmatrix} \text{Hesse}f(p) & \nabla f(p) \\ {}^t\nabla f(p) & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f(p)\|^{n+2}}$$

である. ただし,  $\text{Hesse}f(p)$  は,  $p$  での  $f$  のヘッセ行列 (Hessian)

$$\text{Hesse}f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{n+1}}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n+1} \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n+1}^2}(p) \end{pmatrix}$$

のことである.

[証明] i)  $N = \nabla f / \|\nabla f\|$  のとき,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  を  $T_p(S)$  の任意の基底,  $X$  を  $n+1$  次正方行列  $(w_1 \cdots w_n N(p))$  とする. 基底  $\{w_1, \dots, w_n\}$  に関する  $L_p$  を表現する行列を  $A$  とすれば,

$$(L_p(w_1) \cdots L_p(w_n) N(p)) = X \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

両辺に左側から  ${}^tX$  を掛けると

$$\begin{pmatrix} \langle w_1, L_p(w_1) \rangle & \cdots & \langle w_1, L_p(w_n) \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle w_n, L_p(w_1) \rangle & \cdots & \langle w_n, L_p(w_n) \rangle & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^tX X \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

ここで,

$$B = \begin{pmatrix} \langle w_1, L_p(w_1) \rangle & \cdots & \langle w_1, L_p(w_n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_n, L_p(w_1) \rangle & \cdots & \langle w_n, L_p(w_n) \rangle \end{pmatrix}$$

とおくと, (4.1) より

$$\det B = (\det X)^2 \det A \quad (4.2)$$

となる. 次に,

$$\begin{aligned} D_{w_i} \nabla f &= D_{w_i} \|\nabla f\| N \\ &= (D_{w_i} \|\nabla f\|) N + \|\nabla f\| D_{w_i} N \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ) である.  $p$  において上式に  $L_p(w_i) = -(D_{w_i} N)(p)$  と  $(D_{w_i} \nabla f)(p) = \text{Hesse}f(p) w_i$  を代入すると

$$\text{Hesse}f(p) w_i = ((D_{w_i} \|\nabla f\|)(p)) N(p) - \|\nabla f(p)\| L_p(w_i)$$

であるので,  $i, j = 1, \dots, n$  に対し,

$${}^t w_j \text{Hesse}f(p) w_i = -\|\nabla f(p)\| \langle w_j, L_p(w_i) \rangle \quad (4.3)$$

がいえる.



次に, (4.3) を利用して

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c|c} {}^tX & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \text{Hesse}f(p) & \nabla f(p) \\ \hline {}^t\nabla f(p) & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} X & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{cccc|c} {}^tw_1 \text{Hesse}f(p) w_1 & \cdots & {}^tw_1 \text{Hesse}f(p) w_n & {}^tw_1 \text{Hesse}f(p) N(p) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tw_n \text{Hesse}f(p) w_n & \cdots & {}^tw_n \text{Hesse}f(p) w_n & {}^tw_n \text{Hesse}f(p) N(p) & 0 \\ \hline {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) w_n & \cdots & {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) w_n & {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) N(p) & \|\nabla f(p)\| \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \|\nabla f(p)\| & 0 \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{ccc|cc} -\|\nabla f(p)\| \langle w_1, L_p(w_1) \rangle & \cdots & -\|\nabla f(p)\| \langle w_1, L_p(w_n) \rangle & {}^tw_1 \text{Hesse}f(p) N(p) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\|\nabla f(p)\| \langle w_n, L_p(w_1) \rangle & \cdots & -\|\nabla f(p)\| \langle w_n, L_p(w_n) \rangle & {}^tw_n \text{Hesse}f(p) N(p) & 0 \\ \hline {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) w_n & \cdots & {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) w_n & {}^tN(p) \text{Hesse}f(p) N(p) & \|\nabla f(p)\| \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \|\nabla f(p)\| & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

となる. 上式より

$$F = \begin{pmatrix} \text{Hesse}f(p) & \nabla f(p) \\ {}^t\nabla f(p) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

とおくと

$$\det F (\det X)^2 = -(-1)^n \|\nabla f(p)\|^{n+2} \det B \tag{4.5}$$

である. (4.2), (4.5) より,  $\det X \neq 0$  なので,

$$\det F = -(-1)^n \|\nabla f(p)\|^{n+2} \det A$$

である. よって,  $K(p) = \det A$  より i) は示された.

ii)  $N = -\nabla f / \|\nabla f\|$  のとき, i) の場合と同様の考察により示される. [証終]

今度は, グラフ  $x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n)$  のなす曲面の  $K(p)$  について, 定理 4.2.3 から次の系が成り立つことがわかる.

系 4.2.4  $g: R^n \rightarrow R$  を  $C^2$  級関数とする.  $g$  のグラフの  $K(p)$  は,  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}$  とおき,  $N$  を単位法ベクトル場とすると

$$N = \nabla f / \|\nabla f\| \text{ のとき } K(p) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(p) \end{vmatrix}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right)^2\right)^{n/2+1}},$$

$$N = -\nabla f / \|\nabla f\| \text{ のとき } K(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(p) \end{vmatrix}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right)^2\right)^{n/2+1}}$$

である.

注意 4.2.5 単位法ベクトル場の向きを  $x_{n+1}$  軸の正の向きと同じ方にとったものが後者の公式である.

[証明] i)  $N = \nabla f / \|\nabla f\|$  のとき, 定理 4.2.3 を利用する.

$$K(p) = -(-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(p) & 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(p) & 0 & \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right)^2\right)^{n/2+1}}$$

$$= (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(p) \end{vmatrix}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right)^2\right)^{n/2+1}}$$

ii)  $N = -\nabla f / \|\nabla f\|$  のとき, i) の場合と同様の考察により示される. [証終]

注意 4.2.6 定理 4.2.2 から,  $R^{n+1}$  内の  $n$  次元曲面のガウス・クロネッカー曲率は,  $n$  が偶数のとき, 単位法ベクトル場の向き付けに関係しないことが分かる. また, 定理 4.2.3, 系 4.2.4 は, この結果を裏付けている.

### 4.3 平均曲率

前節のガウス・クロネッカー曲率と同様に，平均曲率  $H(p)$  について述べる．

**定理 4.3.1**  $S$  を  $R^{n+1}$  内の向き付け可能な  $n$  次元曲面とし， $p$  を  $S$  上の点とする． $N$  を  $S$  上の単位法ベクトル場とし， $\{w_1, \dots, w_n\}$  を  $T_p(S)$  の任意の基底とする．このとき， $n+1$  次正則行列  $(w_1 \dots w_n \ N(p))$  の逆行列を  ${}^t(w^1 \dots w^n \ N(p))$  とおくと

$$H(p) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} N)(p) \rangle$$

である．

[証明]  $((D_{w_1} N)(p) \cdots (D_{w_n} N)(p)) = -(L_p(w_1) \cdots L_p(w_n))$  より，ワインガルテン写像  $L_p$  の表す行列を  $A$  とすると

$$\begin{aligned} ((D_{w_1} N)(p) \cdots (D_{w_n} N)(p) \ N(p)) &= -(L_p(w_1) \cdots L_p(w_n) \ -N(p)) \\ &= -(w_1 \cdots w_n \ N(p)) \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり，両辺に左側から行列  ${}^t(w^1 \cdots w^n \ N(p))$  をかけると

$${}^t(w^1 \cdots w^n \ N(p))(D_{w_1} N \cdots D_{w_n} N \ N(p)) = - \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，上式の固有和をとると

$$\sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} N)(p) \rangle + 1 = -(\operatorname{tr} A - 1)$$

となり，

$$\sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} N)(p) \rangle = -\operatorname{tr} A$$

が得られる．よって，

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A = -\frac{1}{n} \langle w^k, (D_{w_k} N)(p) \rangle.$$

[ 証終 ]

定理 4.3.2  $S$  を  $R^{n+1}$  内の向き付け可能な  $n$  次元曲面とし,  $p$  を  $S$  上の点とする.  $Z$  を  $S$  上の 0 でない法ベクトル場とし,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  を  $T_p(S)$  の任意の基底とする. このとき,  $n+1$  次正則行列  $(w_1 \dots w_n \ N(p))$  の逆行列を  ${}^t(w^1 \dots w^n \ N(p))$  とおくと, 単位法ベクトル場  $N$  に対し,

$$N = \frac{Z}{\|Z\|} \text{ のとき } H(p) = -\frac{1}{n\|Z(p)\|} \sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} Z)(p) \rangle,$$

$$N = -\frac{Z}{\|Z\|} \text{ のとき } H(p) = \frac{1}{n\|Z(p)\|} \sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} Z)(p) \rangle$$

である.

[証明] i)  $N = Z/\|Z\|$  のとき,

$$\begin{aligned} D_{w_i} Z &= D_{w_i} (\|Z\| N) \\ &= (D_{w_i} \|Z\|) N + \|Z\| D_{w_i} N \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ) である.  $p$  において上式に  $D_{w_i} N = -L_p(w_i)$  を代入すると,

$$(D_{w_i} Z)(p) - (D_{w_i} \|Z\|) N(p) = -\|Z(p)\| L_p(w_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

となる. ここで,

$$\mu_i = (D_{w_i} Z)(p) - (D_{w_i} \|Z\|) N(p) \quad (4.6)$$

( $i = 1, \dots, n$ ) とおき,  $L_p$  の表す行列を  $A$  とすると,

$$\begin{aligned} (\mu_1 \dots \mu_n \ N(p)) &= -\|Z(p)\| (L_p(w_1) \dots L_p(w_n) - N(p)/\|Z(p)\|) \\ &= -\|Z(p)\| (w_1 \dots w_n \ N(p)) \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & -1/\|Z(p)\| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, 両辺に左側から行列  ${}^t(w^1 \dots w^n \ N(p))$  をかけると

$${}^t(w^1 \dots w^n \ N(p)) (\mu_1 \dots \mu_n \ N(p)) = -\|Z(p)\| \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & -1/\|Z(p)\| \end{pmatrix}$$

となる. ここで, (4.6) に注意して, 上式の固有和をとると

$$\sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w_k} Z)(p) \rangle + 1 = -\|Z(p)\| (\text{tr} A - 1/\|Z(p)\|)$$

となり,

$$\sum_{k=1}^n \langle w^k, (D_{w^k} Z)(p) \rangle = -\|Z(p)\| \operatorname{tr} A.$$

が得られる. よって,

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A = -\frac{1}{n \|Z(p)\|} \langle w^k, (D_{w^k} Z)(p) \rangle$$

となり, i) は示された.

ii)  $N = -Z/\|Z\|$  のとき, i) の場合と同様の考察により示される. [証終]

$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  で与えられる  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の曲面の単位法ベクトル場は, 容易に求めることができる. 次に, この場合の平均曲率を計算する.

**定理 4.3.3**  $\mathbf{R}^{n+1}$  内で方向付けられた  $n$  次元曲面  $S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$  の平均曲率  $H(p)$  は, 単位法ベクトル場を  $N$  とすると

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき } H(p) = \frac{1}{n} \left[ \frac{\langle \nabla f(p), \operatorname{Hesse} f(p) \nabla f(p) \rangle}{\|\nabla f(p)\|^3} - \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{Hesse} f(p))}{\|\nabla f(p)\|} \right],$$

$$N = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき } H(p) = -\frac{1}{n} \left[ \frac{\langle \nabla f(p), \operatorname{Hesse} f(p) \nabla f(p) \rangle}{\|\nabla f(p)\|^3} - \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{Hesse} f(p))}{\|\nabla f(p)\|} \right]$$

である.

[証明] 定理 4.3.2 を利用して証明する.  $n+1$  項単位ベクトルを

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書き,  $f$  の導関数を

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n+1)$$

と書くことにする.

i)  $N = \nabla f / \|\nabla f\|$  のとき, 定理 4.3.2 の第 1 式に  $Z(p) = \nabla f(p)$  及び  $(D_{w^k} Z)(p) = \operatorname{Hesse} f(p) w_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) を代入すると

$$H(p) = -\frac{1}{n \|\nabla f(p)\|} \sum_{k=1}^n \langle w^k, \operatorname{Hesse} f(p) w_k \rangle \quad (4.7)$$

となる．また， $\nabla f$  の成分の少なくとも1つは0でないので， $f_{n+1}(p) \neq 0$  と仮定することにする． $T_p(S)$  の基底を (以後  $p$  を省略)

$$w_k = f_{n+1}e_k - f_k e_{n+1} \quad (k = 1, \dots, n+1) \quad (4.8)$$

とすると，行列  $(w_1 \cdots w_n \nabla f / \|\nabla f\|)$  の逆行列  ${}^t(w^1 \dots w^n N(p))$  は，

$$\frac{1}{f_{n+1}\|\nabla f\|^2} \begin{pmatrix} \|\nabla f\|^2 - f_1^2 & -f_1 f_2 & \cdots & -f_1 f_n & -f_1 f_{n+1} \\ -f_2 f_1 & \|\nabla f\|^2 - f_2^2 & \cdots & -f_2 f_n & -f_2 f_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -f_n f_1 & -f_n f_2 & \cdots & \|\nabla f\|^2 - f_n^2 & -f_n f_{n+1} \\ \|\nabla f\| f_1 & \|\nabla f\| f_2 & \cdots & \|\nabla f\| f_n & \|\nabla f\| f_{n+1}^2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$w^k = \frac{1}{f_{n+1}} e_k - \sum_{j=1}^n \frac{f_k f_j}{f_{n+1} \|\nabla f\|^2} e_j - \frac{f_k}{\|\nabla f\|^2} e_{n+1} \quad (4.9)$$

となる．また，(4.8) より

$$\text{Hesse } f w_k = \sum_{i=1}^n f_{n+1} f_{i,k} e_i - \sum_{i=1}^n f_k f_{i,n+1} e_i + f_{n+1} f_{n+1,k} e_{n+1} - f_k f_{n+1,n+1} e_{n+1} \quad (4.10)$$

である．

ここで， $i$  や  $j$  についての総和記号  $\sum$  を省略して，(4.9)，(4.10) を次のように書く．

$$w^k = \frac{1}{f_{n+1}} e_k - \frac{f_k f_j}{f_{n+1} \|\nabla f\|^2} e_j - \frac{f_k}{\|\nabla f\|^2} e_{n+1} \quad (4.11)$$

$$\text{Hesse } f w_k = f_{n+1} f_{i,k} e_i - f_k f_{i,n+1} e_i + f_{n+1} f_{n+1,k} e_{n+1} - f_k f_{n+1,n+1} e_{n+1} \quad (4.12)$$

この約束をアインシュタイン (Einstein) の規約という．上式において， $i$  や  $j$  は左辺にない指標で，これらを指標を自由指標といい，ここでは， $i$  と  $j$  について1から  $n$  まで加えたものである．この規約を用いれば，(4.7) は

$$H(p) = -\frac{1}{n\|\nabla f\|} \langle w^k, \text{Hesse } f w_k \rangle \quad (4.13)$$

と書ける．以後，記号  $\sum$  を省略する．

(4.11)，(4.12)，(4.13) より

$$\begin{aligned} -n\|\nabla f\|H(p) &= f_{k,k} - \frac{f_k f_{k,n+1}}{f_{n+1}} - \frac{f_k f_j f_{j,k}}{\|\nabla f\|^2} + \frac{f_k^2 f_j f_{j,n+1}}{f_{n+1} \|\nabla f\|^2} \\ &\quad - \frac{f_k f_{n+1} f_{n+1,k}}{\|\nabla f\|^2} + \frac{f_k^2 f_{n+1,n+1}}{\|\nabla f\|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f_{k,k} - \frac{f_k f_{k,n+1}}{f_{n+1}} - \frac{f_k f_j f_{j,k}}{\|\nabla f\|^2} + \frac{(\|\nabla f\|^2 - f_{n+1}^2) f_j f_{j,n+1}}{f_{n+1} \|\nabla f\|^2} \\
 &\quad - \frac{f_k f_{n+1} f_{n+1,k}}{\|\nabla f\|^2} + \frac{(\|\nabla f\|^2 - f_{n+1}^2) f_{n+1,n+1}}{\|\nabla f\|^2} \\
 &= -\frac{1}{\|\nabla f\|^2} (f_{j,k} f_j f_k + 2f_{n+1,j} f_j f_{n+1} + f_{n+1,n+1} f_{n+1}^2) + f_{k,k} + f_{n+1,n+1} \\
 &= -\frac{1}{\|\nabla f\|^2} \langle \nabla f, \text{Hesse} f \nabla f \rangle + \text{tr}(\text{Hesse} f)
 \end{aligned}$$

となる．従って，求める公式が得られる．この公式は， $T_p(S)$ の基底の取り方に関係なく成り立つことに注意しておく．

ii)  $N = -\nabla f / \|\nabla f\|$  のとき，i) の場合と同様の考察により示される． [ 証終 ]

### 4.4 等長変換による不変量

ガウス・クロネッカー曲率および平均曲率は，基底の取り方に依存しない不変量であることを述べた．ここでは，等長変換により， $R^{n+1}$ 内の等位集合  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  のガウス・クロネッカー曲率および平均曲率はどのようになるかを考察する．

補題 4.4.1  $n + 1$  変数関数  $f(x_1, \dots, x_{n+1})$  に対し，

$$1) \|\nabla f\| \quad 2) \begin{vmatrix} \text{Hesse} f & \nabla f \\ {}^t \nabla f & 0 \end{vmatrix} \quad 3) \langle \nabla f, \text{Hesse} f \nabla f \rangle \quad 4) \text{tr}(\text{Hesse} f)$$

は，等長変換による不変量である．

[証明] 等長変換  $\sigma : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$ ,  $(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sigma(y_1, \dots, y_{n+1})$  は，直交行列  $U$  及び  $n + 1$  項縦ベクトル  $d$  を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & d \\ {}^t \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される．ここで，

$$U = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+11} & \cdots & m_{n+1n+1} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{pmatrix}$$

とする． $g = f \circ \sigma$  とおくと

$$g(y_1, \dots, y_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n+1})$$

となる．この両辺を  $y_j$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ) で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} m_{1j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} m_{n+1j} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right) \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{n+1j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

( $j = 1, \dots, n$ ) であるので，上式より

$${}^t \nabla g = {}^t \nabla f U \quad (4.14)$$

が成り立ち，この転置行列は

$$\nabla g = {}^t U \nabla f \quad (4.15)$$

である．この両辺を  $y_k$  ( $k = 1, \dots, n+1$ ) で偏微分すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y_{n+1} \partial y_k} \end{pmatrix} = {}^t U \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

である．ここで，

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{n+1}} \right) \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{n+1k} \end{pmatrix}$$

( $i, k = 1, \dots, n+1$ ) なので，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right) \end{pmatrix} = \text{Hesse } f \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{n+1k} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

となる．(4.16)，(4.17) より

$$\text{Hesse } g = {}^t U \text{Hesse } f U \quad (4.18)$$



が成り立つ．

以上のことを用いて，1)～4) が等長変換によって不変量であることを示す．まず，(4.14)，(4.15) より

$$\|\nabla g\|^2 = {}^t\nabla g \nabla g = {}^t\nabla f U {}^tU \nabla f = {}^t\nabla f \nabla f = \|\nabla f\|^2$$

となり，1) が示せた．

次に，(4.14)，(4.15)，(4.18) より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \text{Hesse } g & \nabla g \\ {}^t\nabla g & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^tU \text{Hesse } f U & {}^tU \nabla f \\ {}^t\nabla f U & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} {}^tU & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{Hesse } f & \nabla f \\ {}^t\nabla f & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \text{Hesse } f & \nabla f \\ {}^t\nabla f & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となり，2) が示せた．また，

$$\begin{aligned} \langle \nabla g, \text{Hesse } g \nabla g \rangle &= {}^t\nabla g \text{Hesse } g \nabla g \\ &= {}^t\nabla f U {}^tU \text{Hesse } f U {}^tU \nabla f \\ &= {}^t\nabla f \text{Hesse } f \nabla f \\ &= \langle \nabla f, \text{Hesse } f \nabla f \rangle \end{aligned}$$

となり，3) が示され， $\text{tr}({}^tU \text{Hesse } f U) = \text{tr}(\text{Hesse } f)$  なので，(4.18) より，4) が示される． [ 証終 ]

補題 4.4.1 の結果より，次がいえる．

**定理 4.4.2** 定理 4.2.3 で述べた等位集合のガウス・クロネッカー曲率は， $n$  が偶数のときは，単位法ベクトル場の向き付けに依存しない不変量であり，等長変換による不変量でもある．

定理 4.2.3，定理 4.3.3 で述べた等位集合について， $n$  が奇数のときのガウス・クロネッカー曲率，平均曲率は，単位法ベクトル場の向きを変えることにより符号が変わった．しかし， $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  と  $-f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  は，幾何学的に等しいものであるので，等位集合の単位法ベクトル場の向き付けを行うことは，幾何学的に無意味である．そこで，補題 4.4.1 の結果より，次のようにまとめることができる．

**定理 4.4.3** (等長変換による不変量) 等位集合のガウス・クロネッカー曲率の絶対値と平均曲率の絶対値は，等長変換による不変量である．

ここで,  $R^{n+1}$  内の2次超曲面

$$2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_k + c = 0 \quad (4.19)$$

( $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $a_{ik}$  のうち一つは0でない) について, 補題 4.4.1 の2) の不変量を計算すると

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \text{Hesse } f & \nabla f \\ {}^t \nabla f & 0 \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} & \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}x_k + b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} & \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1k}x_k + b_{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1}x_i + b_1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n+1} a_{in+1}x_i + b_{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} & b_{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1}x_i + b_1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n+1} a_{in+1}x_i + b_{n+1} & -\sum_{k=1}^{n+1} x_k (\sum_{i=1}^{n+1} a_{ik}x_i + b_k) \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} & b_{n+1} \\ b_1 & \cdots & b_{n+1} & -\sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}x_i x_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_k \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} & b_{n+1} \\ b_1 & \cdots & b_{n+1} & c \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

注意 4.4.4 従って, (4.4) にならい, (4.20) を  $\det F$  とおくと,  $\det F$  は, (4.19) の不変量であり, また,  $\det F \neq 0$  のとき, 非退化2次超曲面といい,  $\det F = 0$  のとき, 退化2次超曲面という.

次に, 2次超曲面

$$2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_k + c = 0$$

( $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $a_{ik}$  のうち一つは0でない) の分類を考えよう.  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

とおくと,  $A$  は,  $n+1$  次対称行列である. 直交行列  $U$  及び  $n+1$  項縦ベクトル  $d$ ,

$$U = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+11} & \cdots & m_{n+1n+1} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{pmatrix}$$

に対して, 等長変換  $\sigma_{U,d}: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}, (x_1, \dots, x_{n+1}) = \sigma_{U,d}(x'_1, \dots, x'_{n+1})$  を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & d \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき, 2次超曲面は次のような標準形に分類される.

**定理 4.4.5** 2次超曲面  $2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  に対し, 等長変換  $\sigma_{U,d}$  が存在して, 次が成り立つ.

$$\text{I) } 2(f \circ \sigma_{U,d})(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 = 0$$

$$\text{II) } 2(f \circ \sigma_{U,d})(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + c' = 0 \quad (c' \neq 0)$$

$$\text{III) } 2(f \circ \sigma_{U,d})(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + 2\mu x'_{r+1} = 0 \quad (\mu \neq 0)$$

ただし,  $r = \text{rank} A$ ,  $\lambda_i (1 \leq i \leq r)$  は,  $A$  の 0 でない固有値とする.

**注意 4.4.6** 上の  $n+2$  次正方行列  $\tilde{U} = \begin{pmatrix} U & d \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$  は, 積に関して群をなす. 単位

元は  $I_{n+2}$  であり,  $\tilde{U}$  の逆元は,  $\begin{pmatrix} {}^tU & -{}^tUd \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$  である. また,  $\det \tilde{U} \det {}^t\tilde{U} = 1$  が成り立つ.

[証明] 簡略のため,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{に対し} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書き,  $n+2$  次正方形行列  $M$  と  $n+2$  項列ベクトル  $\tilde{x}$  に対して,  ${}^t\tilde{x}M\tilde{x}$  を  $M[\tilde{x}]$  と書くことにする.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$2f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} [\tilde{x}] \quad (4.21)$$

と表記できる.  $U$  を  $A$  の固有ベクトルからなる直交行列とし, 直交変換  $\sigma_1: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ,  $x = \sigma_1(y)$  を

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tilde{y} \quad (4.22)$$

とし, (4.21) に (4.22) を代入すると,

$$2(f \circ \sigma_1)(y_1, \dots, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} {}^tUAU & {}^tUb \\ {}^tbU & c \end{pmatrix} [\tilde{y}]$$

である.

$${}^tUb = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n+1} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$2(f \circ \sigma_1)(y_1, \dots, y_{n+1}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & & & & & & b'_1 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_r & & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \vdots \\ & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ \hline b'_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b'_{n+1} & c \end{array} \right) [\tilde{y}] \quad (4.23)$$

となる．次に，平行移動  $\sigma_2: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}, y = \sigma_2(z)$  を

$$\tilde{y} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & -b'_1/\lambda_1 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & -b'_r/\lambda_r \\ & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \tilde{z} \quad (4.24)$$

とし，(4.23)に(4.24)を代入すると，

$$2(f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2)(z_1, \dots, z_{n+1}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_r & & & & 0 \\ & & & 0 & & & b'_{r+1} \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & b'_{n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} & \cdots & b'_{n+1} & c' \end{array} \right) [\tilde{z}] \quad (4.25)$$

となる．ただし， $c' = c - \sum_{i=1}^r b_i'^2/\lambda_i$  である．特に， $b'_{r+1} = \cdots = b'_{n+1} = 0$  のとき，(4.25)から  $c' = 0$  であれば I) に， $c' \neq 0$  であれば II) に分類される．

次に， $b'_{r+1}, \dots, b'_{n+1}$  の少なくとも一つは0でないとし，

$$\mu = (b'_{r+1}{}^2 + \cdots + b'_{n+1}{}^2)^{1/2}$$

とおき，さらに，

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e'_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e'_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+1}/\mu \\ \vdots \\ b'_{n+1}/\mu \end{pmatrix}$$

に対し， $\{e'_1, \dots, e'_{n+1}\}$  が  $\mathbf{R}^{n+1}$  の正規直交基底となるように， $e'_{r+2}, \dots, e'_{n+1}$  を定め， $n+1$  次直交行列  $U'$  を

$$U' = (e'_1 \cdots e'_{n+1})$$



注意 4.4.7 定理 4.4.5 の分類 I) は, 2 次錐という. 分類 II) は,  $\lambda_i (1 \leq i \leq r)$  が同符号であるとき楕円型, それ以外を双曲型という. 分類 III) を放物型という.

非退化 2 次超曲面であるためには, 分類 II) で  $r = n + 1$  であるか, 分類 III) で  $r = n$  でなければならない.

また, 非退化 2 次超曲面上  $f^{-1}(0)$  において, I), II) の分類により  $\|\nabla f\| \neq 0$  である. (4.20) の不変量は 0 でないので, 次の定理は明らかである.

定理 4.4.8 非退化 2 次超曲面のガウス・クロネッカー曲率は定値である.

## 4.5 曲面の基本量

$S$  を  $R^{n+1}$  の中の  $n$  次元曲面とする. このとき,  $S$  の各点の囲りで,  $S$  は  $(u^1, \dots, u^n)$  でパラメータ付けられる. 即ち, その点の囲りで  $S$  は,  $R^n$  の開集合  $(U : u^1, \dots, u^n)$  の  $C^2$  級埋め込み  $x : U \rightarrow R^{n+1}$  の像として考えられる. 曲面  $S$  上の点  $x(u^1, \dots, u^n)$  は,  $u^i$  以外を固定し  $u^i$  を変数とするとき,  $u^i$  だけの関数で,  $S$  上のある一つの曲線を表すので, この曲線を  $u^i$  曲線 ( $i = 1, \dots, n$ ) という.

曲面上の 1 点  $x(u^1, \dots, u^n)$  において,  $\frac{\partial x}{\partial u^i}$  は,  $u^i$  曲線の接線である. ここで,

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおき,  $S$  上のすべての点において,  $x_1, \dots, x_n$  は線形独立となる正則な曲面である. つまり,  $(n+1) \times n$  行列

$$(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \tag{4.30}$$

の階数は  $n$  である. ここに表れた行列をヤコビ行列 (Jacobian matrix) という.

また,  $S$  上の点  $p$  において  $x_1, \dots, x_n$  の張る接空間  $T_p(S)$  の次元は  $n$  であるので,  $T_p(S)$  の直交補空間である法ベクトル場の次元は 1 である. このことから, 単位法ベクトル場は, 向きを無視すれば, 一意的に定まる.

$x_1, \dots, x_n \in T_p(S)$  であるので, ワインガルテン写像  $L_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  の表す行列を  $A$  とすると,

$$\begin{pmatrix} L_p(x_1) & \cdots & L_p(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A$$

である. 両辺に左側から行列  ${}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$  をかけるとにより

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, L_p(x_1) \rangle & \cdots & \langle x_1, L_p(x_n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, L_p(x_1) \rangle & \cdots & \langle x_n, L_p(x_n) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} A \tag{4.31}$$

となる．ここで， $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ ， $H_{ij} = \langle x_i, L_p(x_j) \rangle$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) とおく．このとき，内積の性質より  $g_{ij} = g_{ji}$  が成り立ち，また，ワインガルテン写像の自己共役性から  $H_{ij} = H_{ji}$  が成り立つ． $g_{ij}$ ， $H_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) をそれぞれ， $S$  の第1基本量，第2基本量という．

上の第1基本量，第2基本量を用いて，4.1節で定義したガウス・クロネッカー曲率と平均曲率を表すことにする．

$\langle x_i, N \rangle = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $u^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) について微分すると

$$\langle x_{ij}, N \rangle + \langle x_i, \frac{\partial N}{\partial u^j} \rangle = 0$$

となり， $L_p(x_j) = -\frac{\partial N}{\partial u^j}$  であるので，

$$H_{ij} = \langle x_i, L_p(x_j) \rangle = \langle x_{ij}, N \rangle \quad (4.32)$$

である．ただし， $x_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^j \partial u^i}$  とする．ここで， $n+1$ 次正方形行列  $B$  を

$$B = (N \ x_1 \ \cdots \ x_n) \quad (4.33)$$

とおくと， $B$  は正則である． $B$  の成分を

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+11} & \cdots & b_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

とし， $B$  の余因子行列  $\tilde{B}$  の成分を

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{n+11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{1n+1} & \cdots & \tilde{b}_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

とすると

$$\tilde{B}B = (\det B)I_{n+1} \quad (4.34)$$

が成り立つ． $B$  は正則であるので，上式より

$$\det \tilde{B} = (\det B)^n \quad (4.35)$$

となる．

$$b = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n+11} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$



とおくと, (4.34) から  $b$  は,  $x_i (i = 1, \dots, n)$  に垂直である. また,  $b$  は 0 でないことは, (4.35) から容易にわかる. そこで, 単位法ベクトル場を

$$N = \frac{b}{\|b\|} \quad (4.37)$$

と定義すると, (4.32), (4.36), (4.37) より

$$H_{ij} = \frac{|x_{ij} x_1 \cdots x_n|}{\|b\|} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

とかける.

次に, (4.30) の行列を  $X$  とおくと

$${}^t X X = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

となる. このとき,  $\text{rank} X = \text{rank} {}^t X = n$  であるので, 右辺の行列  $(g_{ij})$  は正則行列である. (4.31) より

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} A \quad (4.38)$$

であるので, ガウス・クロネッカー曲率  $K(p)$  は,

$$K(p) = \frac{\det(H_{ij})}{\det(g_{ij})} \quad (4.39)$$

である. また,  $(g_{ij})$  の逆行列を  $(g^{ij})$  と書くことにすると, (4.38) より

$$A = \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix}$$

であるので, 平均曲率  $H(p)$  は

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} H_{ji} \quad (4.40)$$

と表される.

## 第5章 $R^3$ の曲面

前章では、一般の  $R^{n+1}$  の  $n$  次元超曲面について述べた。本章では、 $n = 2$  のときなのである  $R^3$  の曲面について述べることにする。

### 5.1 曲面の形状

ここでは、 $R^3$  の2次元曲面  $S$  の曲面の基本量  $g_{ij}$ ,  $H_{ij}$ , ガウス・クロネッカー曲率  $K(p)$ , 平均曲率  $H(p)$  について述べる。ただし、4.5節と同じ記号を用いる。

このとき、単位法ベクトル場  $N$  を

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} \quad (5.1)$$

と定義しておく、 $H_{ij} = \langle x_i, L_p(x_j) \rangle = \langle x_{ij}, N \rangle$  より

$$H_{ij} = \frac{|x_{ij} \cdot x_1 \times x_2|}{\|x_1 \times x_2\|} \quad (i, j = 1, 2)$$

と書くことができる。また、

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

である。

この  $n = 2$  のときのガウス・クロネッカー曲率は、ガウスの全曲率という。以上のことから、ガウスの全曲率  $K(p)$  および平均曲率  $H(p)$  は、(4.39), (4.40) より、次のとおりである。

定理 5.1.1 (ガウスの全曲率, 平均曲率)

$$K(p) = \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad H(p) = \frac{g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

定義 4.1.7 及び定理 4.1.8 から、ガウスの全曲率  $K(p)$  と平均曲率  $H(p)$  を用いて  $R^3$  の曲面の形状を分類できる。

定理 5.1.2 ( $R^3$  の曲面の形状)

- I)  $K(p) > 0$  である点は楕円点
- II)  $K(p) < 0$  である点は双曲点
- III)  $K(p) = 0, H(p) \neq 0$  である点は放物点
- IV)  $K(p) = H(p) = 0$  である点は平坦点

注意 5.1.3 定理 4.4.8 および定理 5.1.2 から, 非退化 2 次曲面 ( $R^3$  の非退化 2 次超曲面) は, 楕円面か双曲面のいずれかであることがわかる.

定理 5.1.2 から,  $R^3$  内で方向付けられた 2 次元曲面

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

の曲面の形状をみる上で, ガウスの全曲率と平均曲率は重要である. この曲面 (等位集合) のガウスの全曲率  $K(p)$  について, 定理 4.2.3 から次の定理は明らかである.

## 定理 5.1.4 (等位集合のガウスの全曲率)

$$K(p) = - \frac{\begin{vmatrix} \text{Hesse}f(p) & \nabla f(p) \\ {}^t\nabla f(p) & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f(p)\|^4}$$

注意 5.1.5 特に, 2 次曲面のガウスの全曲率は, 定理 5.1.4 及び (4.20) から次のように書ける. 2 次曲面

$$2f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x_k + c = 0$$

( $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $a_{ik}$  の少なくとも一つは 0 でない) のガウスの全曲率  $K(p)$  は,

$$K(p) = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^4}$$

である.

等位集合の平均曲率  $H(p)$  について，定理 4.3.3 から，次の定理は明らかである．

定理 5.1.6 (等位集合の平均曲率) 単位法ベクトル場を  $N$  とすると

$$N = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき}$$

$$H(p) = \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle \nabla f(p), \text{Hesse}f(p) \nabla f(p) \rangle}{\|\nabla f(p)\|^3} - \frac{\text{tr}(\text{Hesse}f(p))}{\|\nabla f(p)\|} \right]$$

である (複号同順) .

次に， $R^3$  の柱面

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | f(x_1, x_2) = 0\} \tag{5.2}$$

の形状について述べる．定理 5.1.4 から， $K(p) = 0$  である．また，定理 5.1.6 より，次がいえる．

定理 5.1.7 (柱面の平均曲率) 単位法ベクトル場を  $N$  とすると

$$N = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ のとき } H(p) = \pm \frac{\begin{vmatrix} f_{11}(p) & f_{12}(p) & f_1(p) \\ f_{21}(p) & f_{22}(p) & f_2(p) \\ f_1(p) & f_2(p) & 0 \end{vmatrix}}{2\|\nabla f(p)\|^3}$$

である (複号同順) . ただし， $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ， $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  ( $i, j = 1, 2$ ) .

注意 5.1.8 特に，(5.2) の柱面において

$$2f(x_1, x_2) = \sum_{i,k=1}^2 a'_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^2 b'_k x_k + c' \quad (a'_{ik} = a'_{ki})$$

であるとき，定理 5.1.7 及び (4.20) から

$$\begin{vmatrix} f_{11}(p) & f_{12}(p) & f_1(p) \\ f_{21}(p) & f_{22}(p) & f_2(p) \\ f_1(p) & f_2(p) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & b'_2 \\ b'_1 & b'_2 & c' \end{vmatrix} \tag{5.3}$$

となる．

注意 5.1.5 で， $A = (a_{ij})$  とおき， $r = \text{rank}A$  とするとき，定理 4.4.5 及び注意 4.4.7 により次のようになる．

## 主張 5.1.9 (2次曲面の分類)

分類 I) は,  $r = 3$  のとき楕円錐面または一点,  $r = 2$  のとき相交わる二平面または一直線,  $r = 1$  のとき平面となる.

分類 II) は,  $r = 3$  のとき楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面または空集合,  $r = 2$  のとき楕円柱面, 双曲柱面, または空集合,  $r = 1$  のとき平行二平面または空集合となる.

分類 III) は,  $r = 2$  のとき楕円放物面, 双曲放物面,  $r = 1$  のとき放物柱面となる.

次に, 平面, 直線, 一点, 空集合以外の2次曲面の形状を調べてみる. ガウスの全曲率  $K(p)$  は, 等長変換による不変量であるので, 曲面の形状をみるには, 標準形について調べるとよいので, 定理 4.4.5 と注意 5.1.5 より,

$K(p) > 0$  であるものは,

$$\begin{aligned} \text{楕円面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \text{二葉双曲面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \text{楕円放物面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 2\mu x_3 = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{aligned}$$

である.

$K(p) < 0$  であるものは,

$$\begin{aligned} \text{一葉双曲面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \text{双曲放物面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 2\mu x_3 = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{aligned}$$

である.

$K(p) = 0$  であるものは,

$$\begin{aligned} \text{楕円錐面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \\ \text{楕円柱面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0, \\ \text{双曲柱面} & \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0, \\ \text{放物柱面} & \quad x_1^2 - 2\mu x_2 = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{aligned}$$

である. ただし, 楕円錐面の頂点では,  $\|\nabla f\| = 0$  となるので, ガウスの全曲率は定義されない.

さらに, 注意 5.1.8 より楕円柱面, 双曲柱面, 放物柱面では,  $H(p) \neq 0$  となる.

楕円錐面  $2f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$  については,

$$\frac{\langle \nabla f, \text{Hesse} f \nabla f \rangle}{\|\nabla f\|^3} - \frac{\text{tr}(\text{Hesse} f)}{\|\nabla f\|} = \left[ -\frac{x_1^2}{a^2 b^2} \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{x_2^2}{a^2 b^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] / \|\nabla f\|^3$$

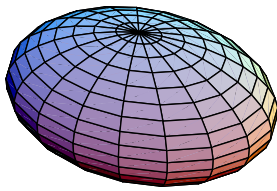


図 5.1: 楕円面

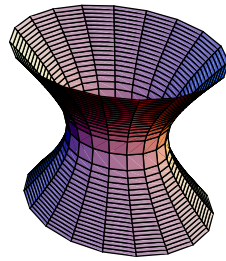


図 5.2: 一葉双曲面

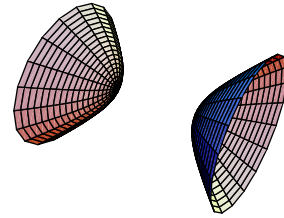


図 5.3: 二葉双曲面

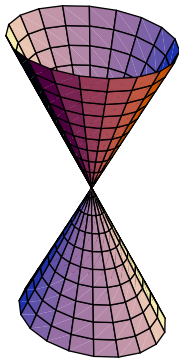


図 5.4: 楕円錐面

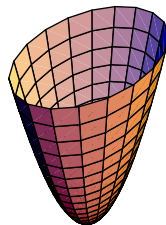


図 5.5: 楕円放物面

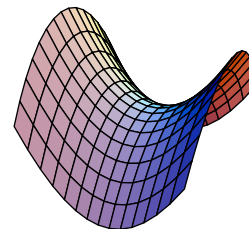


図 5.6: 双曲放物面

であるので，定理 5.1.6 より  $H(p)$  は定値である．ただし，楕円錐面の頂点では平均曲率は定義されない．以上のことより 2 次曲面の形状について以下のことがいえる．

主張 5.1.10 楕円面，二葉双曲面，楕円放物面は，楕円面である．一葉双曲面，双曲放物面は，双曲面である．楕円柱面，双曲柱面，放物柱面は，放物面である．楕円錐面の頂点以外の点は放物点である．

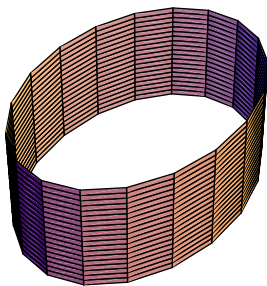


図 5.7: 楕円柱面

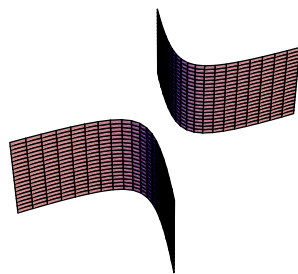


図 5.8: 双曲柱面

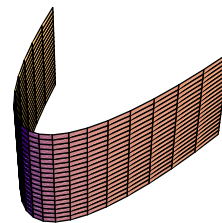


図 5.9: 放物柱面

## 5.2 曲面に関する諸公式

曲面の各点で  $x_1, x_2, N$  は線形独立であるから,  $x_{11}, x_{12}(=x_{21}), x_{22}$  もこの3つのベクトルの線形結合で表せる.

ここで,

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ia} \left\{ \frac{\partial g_{aj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ak}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^a} \right\} \quad (5.4)$$

とおき, これをクリストッフエル (Christoffel) の記号といい, 右辺は  $a$  について1から2まで加えている. これと第2基本量  $H_{jk}$  を用いて次式が成り立つ.

定理 5.2.1 (ガウスの公式)

$$x_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} x_i + H_{jk} N \quad (5.5)$$

証明は, 参考文献 [6, pp. 94-95] を参照.

$\langle N, N \rangle = 1$  を  $u^k$  について微分することにより  $\langle N, N_k \rangle = 0$  であるから  $N_k$  は  $N$  に垂直である. よって,  $N_k$  について  $x_i$  を用いて次式が成り立つ.

定理 5.2.2 (ワインガルテンの公式)

$$N_k = -H_k^i x_i \quad (5.6)$$

ただし,  $H_k^i = g^{ia} H_{ak}$  とする.

証明は, 参考文献 [6, p. 96] を参照.

曲面  $x = x(u^i)$  に対して, 次の2つの基本方程式が成り立つことが知られている.

定理 5.2.3 (1) ガウスの基本方程式

$$G_{ijkl} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}}{\partial u^\ell} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ell \end{matrix} \right\}}{\partial u^k} + \left\{ \begin{matrix} a \\ jk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ a\ell \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} a \\ j\ell \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ ak \end{matrix} \right\} - H_{jk} H_\ell^i + H_{j\ell} H_k^i = 0$$

(2) マイナルディ・コダッチ (Mainardi-Codazzi) の基本方程式

$$M_{jkl} = H_{jk,\ell} - H_{j\ell,k} + \left\{ \begin{matrix} a \\ jk \end{matrix} \right\} H_{a\ell} - \left\{ \begin{matrix} a \\ j\ell \end{matrix} \right\} H_{ak} = 0$$

ただし,  $H_{jk,\ell} = \frac{\partial H_{jk}}{\partial u^\ell}$  とする.

証明は，参考文献 [6, pp. 97-99] を参照．

### 5.3 ボンネの定理

59 ページの定理 5.1.1 および 60 ページの定理 5.1.2 より，平坦点であるとき，以下の 2 式を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} H_{11}H_{22} - H_{12}^2 &= 0, \\ g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11} &= 0. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &g_{11}H_{11}(g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11}) \\ &= (g_{11}H_{12} - g_{12}H_{11})^2 + H_{11}^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) + g_{11}^2(H_{11}H_{22} - H_{12}^2) \end{aligned}$$

( $g_{11} > 0$ ,  $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ ) であるので，平坦点においては  $H_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2$ ) であることがわかる．

次に，曲面上の各点が平坦点であるとき，ワインガルテンの公式に  $H_{ij} = 0$  を代入することで

$$N_k = 0$$

となるから， $N$  は定ベクトルである．よって

$$\langle N, x_j \rangle = 0$$

を偏微分方程式とみることで

$$\langle N, x \rangle = c$$

( $c$  は定数) を得る．このとき曲面は平面であることがわかる．

上では，第 2 基本量  $H_{ij} = 0$  である曲面は平面であることを示した．一般に，与えられた関数を曲面の基本量とする曲面は存在するだろうか．このことについて，曲面論の基本定理とも呼ばれる次の定理が知られている．

**定理 5.3.1 (ボンネの定理)**  $u^i$  の関数  $g_{ij} (= g_{ji})$ ,  $H_{ij} (= H_{ji})$  がガウスおよびマイナルディ・コダッチの基本方程式を満足するように与えられたとき，これらをそれぞれ第 1 基本量，第 2 基本量とする曲面は初期条件  $x(u_0^i)$ ,  $x_j(u_0^i)$  により一意的に定まる．

証明は，参考文献 [6, pp. 105-106] を参照．



3.3節でフルネ・セレーの公式を微分方程式とみて，与えられた関数を曲率とする曲線の存在の一意性を示した．ここでは，ガウスの公式とワインガルテンの公式を偏微分方程式とみることにする．即ち，

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^1}(x_1 \ x_2 \ N) = (x_1 \ x_2 \ N) \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} & -H_1^1 \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} & -H_1^2 \\ H_{11} & H_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial u^2}(x_1 \ x_2 \ N) = (x_1 \ x_2 \ N) \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} & -H_2^1 \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} & -H_2^2 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.7)$$

とかけることに注目する．(5.7)の右辺の行列もスペクトル分解を用いて計算でき，以下の具体例において定理5.3.1が成り立っていることを確認する．

**例 5.3.2**  $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = \cos^2 u$  を第1基本量， $H_{11} = 1, H_{12} = 0, H_{22} = \cos^2 u$  を第2基本量とする曲面  $x(u, v)$  で，初期条件

$$x(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満足するものを考える．

このとき，

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} &= 0, & \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} = 0, & \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} &= \sin u \cos u, \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} &= 0, & \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = -\tan u, & \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} &= 0, \\ H_1^1 &= 1, & H_1^2 &= 0, & H_2^1 &= 0, & H_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

であり，ガウスおよびマイナルディ・コダッチの基本方程式を満たしている．簡単のため，

$$X = (x_1 \ x_2 \ N), \quad A = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} & -H_1^1 \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} & -H_1^2 \\ H_{11} & H_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} & -H_2^1 \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} & -H_2^2 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\tan u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \sin u \cos u & 0 \\ -\tan u & 0 & -1 \\ 0 & \cos^2 u & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

であり

$$\frac{\partial X}{\partial u} = XA, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = XB \quad (5.12)$$

とかける．ここで,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & \log \cos u & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

とおくと,  $\frac{\partial S}{\partial u} = A$  なので, (5.11) より

$$X = C(v)e^S \quad (5.14)$$

( $C(v)$  は  $v$  を変数とする 3 次正方行列) が得られる．

$S$  のスペクトル分解は,

$$S = \log \cos u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + iu \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - iu \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned} e^S &= e^{\log \cos u} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{iu} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-iu} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & \cos u & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

となり, 上式を (5.14) に代入して

$$X = C(v) \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & \cos u & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

となる. この式と (5.10) を (5.12) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(v)}{\partial v} \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & \cos u & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{pmatrix} &= C(v) \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & \cos u & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \sin u \cos u & 0 \\ -\tan u & 0 & -1 \\ 0 & \cos^2 u & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

となり, 整理すると

$$\frac{\partial C(v)}{\partial v} = C(v) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

となる. ここで,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

とおく.  $T$  のスペクトル分解は

$$T = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + iv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} - iv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\begin{aligned} e^T &= e^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{iv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-iv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので, (5.18) の解は

$$C(v) = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

( $M$  は定数を成分とする 3 次正方行列) である. これを (5.16) に代入すると

$$(x_1 \ x_2 \ N) = M \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v & -\cos u \sin v \\ \sin u \cos v & \cos u \sin v & \cos u \cos v \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

を得る.  $(u, v) = (0, 0)$  のとき

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり, これらの初期値を (5.21) に代入することにより

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, これを (5.21) に代入すると

$$(x_1 \ x_2 \ N) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v & -\cos u \cos v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u & 0 & -\sin u \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

が得られる. 上式の  $x_1, x_2$  と初期値  $x(0, 0)$  に注意することにより, 求める曲面の方程式は唯一

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

であることがわかる.

## 第6章 ガウス・ボンネの定理

ここで扱うガウス・ボンネの定理は， $R^3$  の2次元曲面  $S$  に対するものに留める．この場合，5.1節で見たようにガウスの全曲率は，第1基本量と第2基本量で表される．

### 6.1 測地的曲率

$(u^1, u^2)$  でパラメータ付けられる  $R^3$  の正則な曲面  $S$  の定義式を  $x = x(u^1, u^2)$  としよう．このとき，正則な関数  $u : I \rightarrow R^2$  を  $(u^1, u^2) = (u^1(t), u^2(t))$  で定義すると， $(x \circ u)(t)$  は正則曲線であるので，弧長  $s$  による媒介変数表示ができる．この単位速度曲線  $C$  を  $\alpha(s)$  と書くことにする． $p$  において， $S$  の単位法ベクトル  $N$  と  $C$  の単位接ベクトル  $v$  との外積を考え，

$$\eta = N \times v \quad (6.1)$$

とおく． $\alpha'' \perp v$  なので， $\alpha''$  は  $N$  と  $\eta$  の線形結合で書ける．定義 4.1.1 および定理 2.3.8 により  $\kappa_p(v) = \langle \alpha'', N \rangle$  であったことから， $\kappa_p(v)$  は曲線  $C$  の曲率ベクトル  $\alpha''$  の  $N$  への正射影の長さを表している．また，

$$\kappa_g = \langle \alpha'', \eta \rangle \quad (6.2)$$

とおくと， $\kappa_g$  は，曲率ベクトル  $\alpha''$  の  $\eta$  への正射影の長さを表し，これを  $C$  の測地的曲率という．

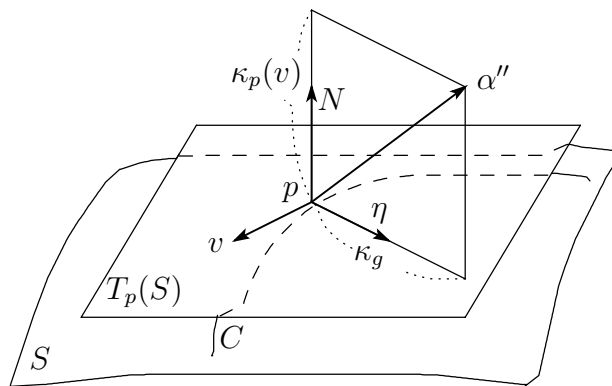


図 6.1: 測地的曲率

## 6.2 外微分形式

曲面  $S$  の単位接ベクトル場を  $e_1$  とし, 単位法ベクトル場  $N$  と  $e_1$  との外積を

$$e_2 = N \times e_1$$

とおき,  $e_3 = N$  とすれば  $e_1, e_2, e_3$  は正規直交系となる. このとき,  $de_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は, アインシュタインの規約を用いて

$$de_i = w_i^j e_j \quad (6.3)$$

と表せる. ただし,  $w_i^j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) は 1 次微分形式である. また,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$  なので, 両辺を微分すると

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0$$

となり, (6.3) を代入すると

$$w_i^j + w_j^i = 0 \quad (6.4)$$

となる. 特に,

$$w_i^i = 0 \quad (6.5)$$

( $i = 1, 2, 3$ ) が成り立つ. (6.3) を微分すると

$$dde_i = dw_i^j e_j - w_i^j \wedge de_j$$

となり, (6.3) より,

$$\begin{aligned} dde_i &= dw_i^j e_j - w_i^j \wedge w_j^k e_k \\ &= (dw_i^k - w_i^j \wedge w_j^k) e_k \end{aligned}$$

となる.  $dde_i = 0$  であるので, 上式から

$$dw_i^k = w_i^j \wedge w_j^k \quad (6.6)$$

( $i, k = 1, 2, 3$ ) である.

## 6.3 ガウス・ボンネの定理

曲面  $S$  の定義式  $x = x(u^1, u^2)$  に対し, 4.5 節のように,  $x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ ,  $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$  とおく. 6.2 節の単位接ベクトル場  $e_1$  を

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad (6.7)$$

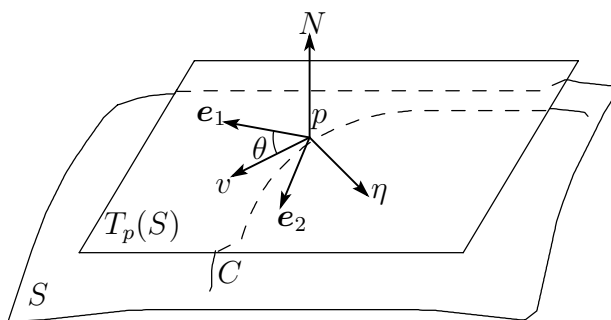


図 6.2: 単位接ベクトル場

とすると

$$\begin{aligned}
 e_2 &= N \times e_1 \\
 &= \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} \times \frac{x_1}{\|x_1\|} \\
 &= \frac{\|x_1\|^2 x_2 - \langle x_1, x_2 \rangle x_1}{\|x_1 \times x_2\| \|x_1\|}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

また,  $e_1$  から曲線  $C$  の単位接ベクトル  $v$  への角を  $\theta$  とすると

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \tag{6.9}$$

であり, (6.1) より

$$\eta = -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta \tag{6.10}$$

となる. また, (6.9) を  $s$  で微分すると

$$\alpha''(s) = \frac{de_1}{ds} \cos \theta - e_1 \frac{d\theta}{ds} \sin \theta + \frac{de_2}{ds} \sin \theta + e_2 \frac{d\theta}{ds} \cos \theta \tag{6.11}$$

となる. (6.3) より  $\langle de_i, e_k \rangle = w_i^k$  が成り立つことと (6.4) に注意して, (6.10) と (6.11) を (6.2) に代入すると

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{w_2^1}{ds} \tag{6.12}$$

を得る.

次に,  $dw_2^1$  について考えていく. (6.5) と (6.6) から

$$dw_2^1 = w_2^3 \wedge w_3^1 \tag{6.13}$$

と書ける．右辺の式において， $w_2^3 = -w_3^2 = -\langle de_3, e_2 \rangle$ ， $w_3^1 = \langle de_3, e_1 \rangle$  である．このとき，

$$\begin{aligned} de_3 &= \frac{\partial N}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial N}{\partial u^2} du^2 \\ &= -L_p(x_1) du^1 - L_p(x_2) du^2 \end{aligned}$$

であるので，(6.7)，(6.8)， $H_{ij} = \langle x_i, L_p(x_j) \rangle$  ( $i, j = 1, 2$ ) より，

$$w_2^3 = \frac{\|x_1\|^2 H_{12} - \langle x_1, x_2 \rangle H_{11}}{\|x_1 \times x_2\| \|x_1\|} du^1 + \frac{\|x_1\|^2 H_{22} - \langle x_1, x_2 \rangle H_{12}}{\|x_1 \times x_2\| \|x_1\|} du^2$$

及び

$$w_3^1 = -\frac{H_{11}}{\|x_1\|} du^1 - \frac{H_{12}}{\|x_1\|} du^2$$

となる．これらを (6.13) に代入すると

$$dw_2^1 = \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{\|x_1 \times x_2\|} du^1 \wedge du^2$$

となり， $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$  ( $i, j = 1, 2$ ) であることと定理 5.1.1 より，

$$dw_2^1 = K \|x_1 \times x_2\| du^1 \wedge du^2$$

を得る． $\|x_1 \times x_2\| du^1 \wedge du^2$  は，曲面の面積要素であり， $dA$  と表すことにすると上式から

$$dw_2^1 = K dA \tag{6.14}$$

となる．

区分的に微分可能な曲線  $C$  で囲まれた曲面上の領域  $D$  について考える．(6.12) より

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \int_C w_2^1 \tag{6.15}$$

である．次に，ストークス (Stokes) の定理より

$$\int_C w_2^1 = \iint_D dw_2^1 \tag{6.16}$$

であるので，(6.14)，(6.15)，(6.16) より

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_D K dA \tag{6.17}$$



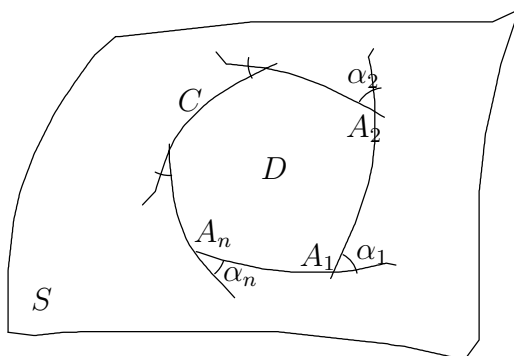


図 6.3: ガウス・ボンネの定理

を得る．これより，次のガウス・ボンネの定理 (Gauss-Bonnet) が得られる．

**定理 6.3.1** 曲面上の  $n$  個の曲線弧によって囲まれた曲線的多角形において，その内部の領域を  $D$ ，周囲の閉曲線を  $C$ ，外角を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  とすれば

$$2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i = \int_C \kappa_g ds + \iint_D K dA$$

が成り立つ．

曲面上の曲線の測地的曲率  $\kappa_g$  が至る所で 0 であるとき，この曲線を曲面の測地線という．また，測地線の弧で囲まれた領域を測地的多角形と呼ぶことにする．

曲面上の測地的多角形の内角を  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とすれば，定理 6.3.1 において  $\kappa_g = 0$  及び  $\alpha_i = \pi - A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を代入することにより次の系が導かれる．

**系 6.3.2** 曲面上の測地的多角形の内角を  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とすれば，

$$\sum_{i=1}^n A_i - (n-2)\pi = \iint_D K dA$$

が成り立つ．

**注意 6.3.3** 特に，測地的三角形  $ABC$  においては

$$A + B + C - \pi = \iint_D K dA$$

となる (ガウスの定理)．このとき，定理 5.1.2 から曲面の形状と測地的三角形  $ABC$  の内角の和について次のことがいえる．

I) 楕円面のときは,  $A + B + C - \pi > 0$

II) 双曲面のときは,  $A + B + C - \pi < 0$

III) 放物面, 平面のときは,  $A + B + C - \pi = 0$ .

球面は楕円面である. I) は, 球面幾何学における「球面三角形の内角の和は  $\pi$  より大きい」という事実の一般化になっている.

一般に「可微分多様体は三角形分割される」ことが知られている (参考文献 [2] を参照). 定理 6.3.1 より, 向き付け可能な閉曲面  $S$  のオイラー数 (Euler number) を  $\chi(S)$  とすれば, 三角形分割を用いることにより, 次の式が成り立つことが容易に示される.

定理 6.3.4 (閉曲面のガウス・ボンネの定理)

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

証明は, 参考文献 [12, pp. 141-142] を参照.

## 第7章 2次超曲面の中心と特異点

本章では、 $n$ 次元空間  $R^n$  の点が、その空間内の2次超曲面の中心であることと、その2次曲面を定義する2次関数の特異点になっていることが同値であることを証明する。

5章で見た  $R^3$  の2次曲面である楕円錐面は、その頂点に関して点対称である。この頂点のことを中心とも呼ばれる。まず、一般に  $R^n$  内の集合に対して中心の概念を導入する。

**定義 7.0.1 (中心)**  $K \subset R^n$  とする。点  $p \in R^n$  に対し、任意の点  $q \in K$  の  $p$  に関する対称な点  $q'$  が、 $q' \in K$  であるとき、 $p$  は集合  $K$  の中心という。

**注意 7.0.2**  $p \in R^n$  が  $R^n$  の部分集合  $K$  の中心であるという性質は、等長変換によって不変である。即ち、等長変換を  $\sigma$  とすると、 $\sigma(p)$  は、 $\sigma(K)$  の中心である。

ここで中心の例を挙げる。

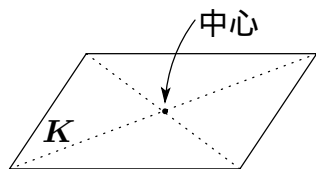


図 7.1: 平行四辺形の中心

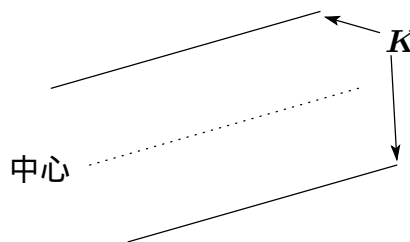


図 7.2: 平行二直線の中心

次に,  $R^n$  上の関数の特異点の概念を導入する.

定義 7.0.3 (特異点)  $C^1$  級関数  $f: R^n \rightarrow R$  において,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

となる点  $p \in R^n$  を  $f$  の特異点という.

例 7.0.4  $f: R^n \rightarrow R$  を

$$f(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_s^2 \quad (s \leq n)$$

とするとき,

- 1)  $s = n$  のとき,  $0 \in R^n$  は  $f$  の孤立した特異点であり, 非退化特異点と呼ばれる.
- 2)  $s < n$  のとき,  $0 \in R^n$  は  $f$  の非孤立特異点であり, 退化特異点と呼ばれる.

定理 4.4.5 で述べたように  $n$  次元 2 次超曲面

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0 \quad (7.1)$$

( $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $a_{ik}$  のうち一つは 0 でない) に対し,  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおくと,  $A$  は,  $n$  次対称行列である. 直交行列  $U$  及び  $n$  項縦ベクトル  $d$ ,

$$U = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

に対して, 等長変換  $\sigma_{U,d}: R^n \rightarrow R^n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) = \sigma_{U,d}(y_1, \dots, y_n)$  を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + d \quad (7.2)$$

と定義する. このとき  $f$  に対し, ある等長変換  $\sigma_{U,d}$  が存在して, 2 次超曲面は次のような標準形に分類される.

$$\text{I) } (f \circ \sigma_{U,d})(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2 = 0 \quad (\lambda_i \neq 0)$$

$$\text{II) } (f \circ \sigma_{U,d})(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2 + c' = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, c' \neq 0)$$

$$\text{III) } (f \circ \sigma_{U,d})(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2 + 2\mu y_{r+1} = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, \mu \neq 0)$$

ただし,  $1 \leq r \leq n$  である.

これらのことを利用して, 次の定理を証明する.

**定理 7.0.5** 2次超曲面  $f^{-1}(0) \neq \phi$  に対し,  $p \in \mathbf{R}^n$  が  $f$  の特異点であることは,  $p \in \mathbf{R}^n$  が  $f^{-1}(0)$  の中心であるための必要十分条件である.

[証明] 一般に, 等長変換  $\sigma_{U,d}$  に対し,  $g = f \circ \sigma_{U,d}$  とおくと, ヤコビ行列の合成微分律を用いることにより

$$J_g(y_1, \dots, y_n) = J_f(x_1, \dots, x_n) J_{\sigma_{U,d}}(y_1, \dots, y_n)$$

となる. (7.2) より

$${}^t \nabla g(y_1, \dots, y_n) = {}^t \nabla f(x_1, \dots, x_n) U$$

となるので, この転置行列をとることで

$$\nabla g = {}^t U \nabla f$$

であり, また  $U$  は直交行列なので,

$$\nabla f = U \nabla g \tag{7.3}$$

が成り立つ.

(十分条件)  $v \in \mathbf{R}^n$  を  $f$  の特異点とする.  $f$  の定義式 (7.1) に対し,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  を極としてテイラー展開を行うと,  $v$  が  $f$  の特異点より

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(v) + \sum_{i,k=1}^n a_{ik} (x_i - v_i)(x_k - v_k) = 0$$

となる.  $f^{-1}(0)$  上の任意の点

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

をとる． $q$  の  $v$  に関して対称な点

$$q' = (2v_1 - q_1, \dots, 2v_n - q_n)$$

について， $f(q') = f(q) = 0$  が成り立つので， $v$  は  $f^{-1}(0)$  の中心である．

(必要条件) 上で述べた2次超曲面の標準形に従い，場合分けを行って証明する． $v \in \mathbf{R}^n$  を  $f^{-1}(0)$  の中心とすると，注意7.0.2より， $p = \sigma_{U,d}^{-1}(v)$  は， $g^{-1}(0)$  の中心である． $p = (p_1, \dots, p_n)$  とする．

I) の場合： $O = (0, \dots, 0)$  は， $g^{-1}(0)$  の点であり，点  $O$  の  $p$  に関して対称な点は， $p' = (2p_1, \dots, 2p_n)$  である．このとき， $p'$  は， $g^{-1}(0)$  上の点であるので，

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \dots + \lambda_k(2p_k)^2 + \dots + \lambda_r(2p_r)^2 = 0$$

より

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \dots + \lambda_k(-2p_k)^2 + \dots + \lambda_r(2p_r)^2 = 0$$

と書ける． $q_k = (2p_1, \dots, -2p_k, \dots, 2p_n)$  ( $k = 1, \dots, r$ ) も  $g^{-1}(0)$  上にあるので， $q_k$  の  $p$  に関して対称な点を  $q'_k$  とすると

$$q'_k = (0, \dots, 0, 4p_k, 0, \dots, 0)$$

である．このとき， $q'_k$  も  $g^{-1}(0)$  上にあるので，

$$\lambda_k(4p_k)^2 = 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

であり， $\lambda_k \neq 0$  より，

$$p_k = 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

となる．このとき  $g^{-1}(0)$  の中心

$$p = (0, \dots, 0, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

は， $g$  の特異点であり，(7.3) から，

$$\nabla f(\sigma_{U,d}(p)) = \mathbf{0}$$

が成り立つので， $v = \sigma_{U,d}(p)$  は  $f$  の特異点である．

II) の場合： $g^{-1}(0) \neq \phi$  より， $c'$  と符号の異なる  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) が少なくとも1つ存在する．簡単のために， $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) は  $c'$  と異符号， $\lambda_i$  ( $s+1 \leq i \leq r$ ) は  $c'$  と同符号とする．

$$p_{m\pm} = (0, \dots, 0, \pm\sqrt{-c'/\lambda_m}, 0, \dots, 0) \quad (m = 1, \dots, s)$$

は,  $g^{-1}(0)$  上の点であり, 点  $p_{m\pm}$  の  $p$  に関して対称な点は

$$p'_{m\mp} = (2p_1, \dots, 2p_{m-1}, 2p_m \mp \sqrt{-c'/\lambda_m}, 2p_{m+1}, \dots, 2p_n)$$

である. このとき,  $p'_{m\pm}$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるので,

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \dots + \lambda_m(2p_m \mp \sqrt{-c'/\lambda_m})^2 + \dots + \lambda_r(2p_r)^2 + c' = 0 \quad (7.4)$$

となるが

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \dots + \lambda_m(-2p_m \pm \sqrt{-c'/\lambda_m})^2 + \dots + \lambda_r(2p_r)^2 + c' = 0$$

とも書けるので, 点

$$q_{m\pm} = (2p_1, \dots, 2p_{m-1}, -2p_m \pm \sqrt{-c'/\lambda_m}, 2p_{m+1}, \dots, 2p_n) \quad (m = 1, \dots, s)$$

も  $g^{-1}(0)$  上にある.  $q_{m\pm}$  の  $p$  に関して対称な点

$$q'_{m\mp} = (0, \dots, 0, 4p_m \mp \sqrt{-c'/\lambda_m}, 0, \dots, 0)$$

は,  $g^{-1}(0)$  にあるので,

$$\lambda_m(4p_m \mp \sqrt{-c'/\lambda_m})^2 + c' = 0 \quad (m = 1, \dots, s)$$

となる. これより,  $16\lambda_m(p_m)^2 = 0$  が従い,  $\lambda_m \neq 0$  より  $p_m = 0$  ( $m = 1, \dots, s$ ) となる. これらを (7.4) に代入すると

$$\lambda_{s+1}p_{s+1}^2 + \dots + \lambda_r p_r^2 = 0$$

となり,  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$  が同符号であることより,  $p_i = 0$  ( $i = s+1, \dots, r$ ) となる. 従って,  $g^{-1}(0)$  の中心

$$p = (0, \dots, 0, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

は,  $g$  の特異点であり, (7.3) から,

$$\nabla f(\sigma_{U,d}(p)) = \mathbf{0}$$

が成り立つので,  $v$  は  $f$  の特異点である.

III) の場合:  $O = (0, \dots, 0)$  は,  $g^{-1}(0)$  の点であり, 点  $O$  の  $p$  に関して対称な点は,  $p' = (2p_1, \dots, 2p_n)$  である. このとき,  $p'$  は,  $g^{-1}(0)$  上の点であるので,

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \dots + \lambda_k(2p_k)^2 + \dots + \lambda_r(2p_r)^2 + 2\mu(2p_{r+1}) = 0 \quad (7.5)$$

より

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \cdots + \lambda_k(-2p_k)^2 + \cdots + \lambda_r(2p_r)^2 + 2\mu(2p_{r+1}) = 0$$

と書ける． $q_k = (2p_1, \dots, -2p_k, \dots, 2p_n)$  ( $k = 1, \dots, r$ ) も  $g^{-1}(0)$  上にあるので， $q_k$  の  $p$  に関して対称な点を  $q'_k$  とすると

$$q'_k = (0, \dots, 0, 4p_k, 0, \dots, 0)$$

である．このとき， $q'_k$  も  $g^{-1}(0)$  上にあるので，

$$\lambda_k(4p_k)^2 = 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

であり， $\lambda_k \neq 0$  より，

$$p_k = 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

となる．これらを (7.5) に代入し， $\mu \neq 0$  であることから

$$p_{r+1} = 0$$

となる．従って中心  $p$  は，

$$p = (0, \dots, 0, p_{r+2}, \dots, p_n)$$

と書ける．

$$q = (1, 0, \dots, 0, -\lambda_1/2\mu, 0, \dots, 0)$$

とおくと， $q$  は， $g^{-1}(0)$  上の点であり， $q$  の  $p$  に関して対称な点

$$q' = (-1, 0, \dots, 0, \lambda_1/2\mu, 2p_{r+2}, \dots, 2p_n)$$

について， $g(q') = 2\lambda_1 \neq 0$  より矛盾を生じる．従って， $g^{-1}(0)$  の中心は存在せず，注意 7.0.2 より， $f^{-1}(0)$  の中心も存在しない． [ 証終 ]

注意 7.0.6 上の証明の III) の場合， $g$  の特異点は存在せず，(7.3) より， $f$  の特異点も存在しないことが容易にわかる．

また， $f^{-1}(0) \neq \phi$  は不可欠な条件である．例えば， $U$  を  $R$  の開集合とし， $f: U \rightarrow R$  を  $f(x) = x^2 + 1$  とする．このとき，関数  $f$  の特異点は  $x = 0$  であるが， $f^{-1}(0) = \phi$  であるので中心は  $R$  全体となるので，中心と特異点は一致していない．

注意 7.0.7 I), II) で見た中心をもつ 2 次曲面を有心 2 次曲面といい，III) で見た中心を持たない 2 次曲面を無心 2 次曲面という．

2 次曲面を標準形にする主軸問題は，平行移動と直交変換によるものである．まず平行移動により，有心 2 次曲面の中心をその原点とすることであり，無心 2 次曲面の原点は，上で述べた  $\|\nabla g\|$  を最小にする曲面上の点をとることであり， $\|\nabla f\| = \|\nabla g\|$  なので， $\|\nabla f\|$  を最小にする曲面上の点を原点にとることである．その後の直交変換は，行列の対角化の問題に帰着される．



## 第8章 今後の問題

本章では、これまで述べてきた内容に関連する新たな問題を提起する。

### 8.1 $R^3$ の閉曲面のガウスの全曲率

「単純閉曲線上には、少なくとも4つの頂点が存在する」という有名な4頂点定理 (Four-Vertex Theorem)[4] がある。平面曲線の頂点とは、曲率関数の極値を与える点のことである。また、以下のように接触円を用いて頂点を定義することもある。

平面曲線上の3点  $P, Q, R$  を通る円を考える。この円の、 $Q, R$  が  $P$  に限りなく近づいた極限の位置における円を  $P$  における曲線の接触円と呼び、このとき接触円は曲線と同一の3点を共有するあるいは3点接触するという。特に、接触円が曲線と4点接触する曲線上の点として頂点を定義することがある [1, p. 33]。

ところで、 $R^{n+1}$  の曲面のガウス・クロネッカー曲率は、 $n = 1$  のとき、曲線の曲率であり、 $n = 2$  のとき、曲面のガウスの全曲率である。そこで、4頂点定理より、次の問題が提起される。

閉曲面上には、ガウスの全曲率が極値をとる点が少なくとも4つ存在する。

最大値・最小値の存在から少なくとも2つ存在することは自明であるが、必ず4つ以上存在するというのは明らかではない。

一方、ガウスの全曲率が極値をとる点が、ちょうど4つある閉曲面が存在する。5章で述べた楕円面

$$2f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a > b > c > 0)$$

を考えると、そのガウスの全曲率  $K$  は、60ページの注意 5.1.5 より

$$K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \|\nabla f\|^4}$$

であるので、 $K$  は  $(\pm a, 0, 0)$  で極大、 $(0, 0, \pm c)$  で極小となる。このことより、全曲率が極値をとる点が、楕円面上に4つだけ存在することがわかる。

## 8.2 2次超曲面の中心と特異点の一般化

7章で述べた2次曲面の中心と特異点の関係の一般化を考える.

ここで,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  は

$$f(x) = c + \sum_{k=1}^n b_k x_k + \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 2} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

で定義された多項式関数で,

$$h(x) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 2} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

は偶数次の項からのみなり,  $h(x) \not\equiv 0$  であるとする. 即ち, 少なくとも1つの  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \neq 0$  とする. このとき, 次の問題を考える.

$f^{-1}(0) \neq \phi$  とする. このとき,  $0 \in \mathbf{R}^n$  は  $f$  の特異点であることは,  $0 \in \mathbf{R}^n$  が  $f^{-1}(0)$  の中心であることの必要十分条件であるか.

**注意 8.2.1**  $0 \in \mathbf{R}^n$  が  $f$  の特異点であれば,  $f$  の一次の項がないので, 十分条件であることは, 明らかである.

**注意 8.2.2** 上の問題が正しいとすると, 定理 7.0.5 は, その系である. なぜなら,  $f$  の次数が2のとき,  $p \in \mathbf{R}^n$  に平行移動しても, 同様のもの (奇数次は1次のみで, 最高次である2次の項は消えてしまわない) になっている. 従って, 上の問題は7.0.5の一般化になっている.

## 参考文献

- [1] J.W. Bruce and P.J. Giblin, *Curves and Singularities*, Cambridge University Press (Second editon 1992).
- [2] J.R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Ann.Math.Studies 54 (1966).
- [3] Shin-ichi Nishimura and Masao Hashiguchi, *On the Gaussian curvature of the indicatrix of a Lagrange space*, Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., (Math.Phys.Chem.), No.24, pp.33-41 (1991).
- [4] R. Osserman, *The four-or-more vertex theorem*, Amer.Math.Monthly,92, pp332-337 (1985)
- [5] J.A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag (1979).
- [6] 安達忠次「微分幾何学概説」, 培風館 (1976).
- [7] 石原 繁「幾何学概論」, 共立出版 (1976).
- [8] 伊藤 清 他「岩波数学事典」(第3版), 岩波書店 (1985).
- [9] 岩堀長慶,「線形代数学」, 裳華房 (1982).
- [10] 加藤義夫「偏微分方程式」, サイエンス社 (1975)
- [11] 北村泰一, 山口恭「微分方程式入門」, コロナ社 (1962)
- [12] 小林昭七「曲線と曲面の微分幾何」(改訂版), 裳華房 (1995).
- [13] 齋藤正彦,「線形代数入門」, 東京大学出版会 (1966).
- [14] 西村信一「2次曲線および2次曲面の微分幾何学的考察」, 九州算数・数学教育研究集録 (1991).
- [15] 福田拓生, 野口 広「初等カタストロフィー」, 共立出版 (1976).
- [16] 村上信吾「幾何概論」, 裳華房 (1984).