平成11年度　学 位 論 文

Seiberg-Witten 理論について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自 然 系 コ ー ス
M 9 8 5 5 2 K　岩　木　泰　孝

序　文

1994 年秋の E.Witten による Seiberg–Witten 理論の発表は微分位相幾何学の分野で非常にセンセーショナルな出来事であった。実際、それまでゲージ理論の分野で難解であった問題が Seiberg–Witten 理論の発表後数ヶ月の内に次々と成し遂げられ「ゲージ理論は終わった」とまで言われた。

1956 年 J.W.Milnor が 7 次元の球面と連続同相であるが可微分同相ではないエキゾチック球面を発見して以来、多様体の可微分同相による分類と位相同相による分類が本質的な違いを含んでおり、可微分多様体の微分構造が重要な研究テーマとなっていた。Milnor 以降多くの異なる微分構造を持つ多様体が発見され、また微分構造を持ち得ない位相多様体の例が知られるなど多くの成果が上げられた。しかし、それらの成果は全て 5 次元以上の高次元についての成果であった。また微分構造の分野以外にも同境理論や手術理論など大きな進展を見せた微分位相幾何学も 4 次元多様体については 1952 年に発表された「4 次元 $Spin$ 多様体の符号数は 16 で割り切れる」という Rokhlin の定理以来、本質的な進歩は見られなかったとさえ言われている。

しかし 1980 年代初頭に 2 つの出来事によりその状況が大きく変わることになった。1 つには 1982 年の M.H.Freedman による仕事で、4 次元 Poincaré 予想の解決や三角形分割不可能な 4 次元多様体の発見など画期的なものであった。もう一つが 1983 年、まだ学生であった S.Donaldson によりゲージ理論を応用して単連結 4 次元閉 C^∞ 多様体の正定値交叉形式が決定されたことである。これにより、$\mathbb{R}^4$ と異なる微分構造を持つ偽 $\mathbb{R}^4$(fake $\mathbb{R}^4$) の存在が証明された。その後も Donaldson は h-同境定理の反例や Donaldson 不変量の定式化など輝かしい業績を築いていった。これらの業績により 1986 年 Donaldson は Freedman らと共に Fields 賞を受賞している。

Donaldson 理論は物理学で発展したゲージ理論 (Yang–Mills 理論) を数学に持ち込んだものであった。その中核を成すのは Yang–Mills 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式である。Yang–Mills 方程式の非線形性やゲージ群が $SU(2)$ で非可換であるなど理論を展開するのに多くの難点を克服する必要があり、そのため Donaldson 理論は広範な数学理論を援用し、多くの新しいテクニックを駆使してその難点を克服しており、非常に難解な理論となっている。

しかし 1993 年 P.Kronheimer,T.Mrowka により Donaldson 不変量の構造定理が発表されると Donaldson 理論の本質的な部分は物理学で言うところの「質量ギャップ」にあることが分かってきた。Donaldson 理論の背景にあるゲージ理論は物理学では $N = 2$ SuperSymmetry Yang-Mills 理論と呼ばれるものである。物理学的に双対な理論を考えることは $N = 4$ の場合には一般的であったが $N = 2$ の場合には意味がないと言われていた。しかし $N = 2$ の場合の双対な理論を考えることで「質量ギャップ」は磁気単極子 (Monopole) の存在の問題に置き換えることができることを 1994 年 N.Seiberg と E.Witten が発見した。そして Yang–Mills 方程式に代わり Monopole 方程式を用いた理論を数学にフィードバックしたのが Seiberg–Witten 理論である。

その成り立ちから見ても、Seiberg–Witten 理論は当初より物理学的な理由から Donaldson 理論と同値であると予想されており、実際 Donaldson 理論の成果は Seiberg–Witten 理論でも示されてい

る。しかし Seiberg–Witten 理論は双対な理論を考えることで、舞台となるベクトル束が複素１次元となりゲージ群も可換な $U(1)$ となっておりモジュライ空間がコンパクトであるなど自然と良い性質を持っている。従って Donaldson 理論に比べて非常に簡単な理論となっており、その性質の良さから Donaldson 理論では示せなかった新たな成果が多く発見されるなど Seiberg–Witten 理論の強力さが注目されている。

私は、このように 4 次元微分位相幾何学と物理学にまたがって、20 世紀最後に開花した Seiberg–Witten 理論が 21 世紀の数学と物理学の芽生えとなるのではないかと考え研究のテーマとして選択した。

本論文では Seiberg–Witten 理論を数学的に基礎から構築し、4 次元微分位相幾何学における幾つかの成果を明らかにすることを目的としている。

ここで Seiberg–Witten 理論の数学的な概要を説明する。理論の構成は J.D.Moore の Lecture Note[12] に基づいている。

まず $Spin^c(4)$ 群と呼ばれる Lie 群を考える。$Spin^c(4)$ は多くの表現を持つなど良い性質を持っている。コンパクト 4 次元多様体上には、$Spin^c(4)$に値を持つような接ベクトル束の変換関数系 $Spin^c$-構造 をとることができ、$Spin^c(4)$ 群の表現により、$Spin^c$-構造 から新しいベクトル束の変換関数系が自然に構成される。当然予想されるように、この変換関数系によって構成された様々なベクトル束 (スピノル束) の間には密接な関係がある。また接ベクトル束から Clifford 代数によって構成される Clifford 束がスピノル束に作用する。これらのベクトル束上にはお互いに関連しあった接続がとれ、特にスピノル束に関連した複素直線束上の接続と、Levi–Civita 接続 がこれらの接続を大きく規定する。Clifford 束のスピノル束への作用と接続によって、Dirac 作用素という楕円型偏微分作用素が構成できる。さらに Dirac 作用素を用いて 4 次元多様体上のベクトル束（スピノル束）上の接続と切断に関する非線形偏微分連立方程式である Seiberg–Witten 方程式 (Monopole 方程式) が定義できる。そして Seiberg–Witten 方程式の解空間をゲージ変換で割ったモジュライ空間を Sobolev ノルムで完備化した Banach 多様体を考える。そのモジュライ空間が有界性を持ち、関数解析の議論よりコンパクトであることが示される。さらに向き付け可能な有限次元 C^∞ 多様体となることを証明しその次元も計算できる。Chern 類とカップリングすることで整数値の微分構造に対する不変量、Seiberg–Witten 不変量が作られる。この Seiberg–Witten 不変量を比較する事で様々な多様体の微分構造の違いが分かるのである。

本論文の構成について述べる。なお、本論文では多様体,Lie 群, リーマン幾何, 微分形式,（コ）ホモロジー, ベクトル束の一般論については既知として論を進める。また特に断らない限り多様体は 4 次元 C^∞ 多様体を考え写像等も C^∞ であるとする。

１章では後章で必要となる一般的な、つまり Seiberg–Witten 理論に限らない微分幾何の基礎的事項について述べる。

まずベクトル束上の接続を定義し局所表現を説明する。接続を持った既存のベクトル束から構成される新たなベクトル束上に、どのような接続が自然に誘導されるかが、後に幾度となく問題となる。接続により曲率を定義し曲率がテンソルとなることを示す。また複素１次ベクトル束（複素直線束）上での接続と曲率の表示について説明を行う。次に $U(1)$-束に対するゲージ変換を定義し、$U(1)$-接続に対する作用について考察する。後の章で $U(1)$-接続とスピノル場の組みに対するゲージ変換を見るが、その準備である。さらに曲率により特性類の１種である Chern 類と Pontrjagin 類を定義し、その性質を述べる。ただしその性質については証明は与えず列挙するに留める。一方 Hodge 理論として知られている調和微分形式の理論について概要を説明する。微分形式の空間が Hodge 分解される

ことが後半の証明で有効に使われる。また Hodge 作用素により 4 次元多様体上の 2 次微分形式が自己双対部分空間と反自己双対部分空間に分解する事を見る。この分解は Seiberg–Witten 理論にとってさまざまな場面で重要な役割を果たす。特に外微分 d の自己双対部分空間成分 d^+ の性質が示される。さらにベッチ数や符号数など Seiberg–Witten 理論で本質的な働きをする量についてもここで定義を行う。

２章では Seiberg–Witten 理論で必要となる $Spin$ 幾何に関する事項について述べる。いわばゲージ理論に直接関わる基礎事項の準備である。まず $Spin(4)$ 群, $Spin^c(4)$ 群 なる Lie 群を定義し様々な表現を考察する。また $Spin(4)$ 群 の Lie 環が $SO(4)$ の Lie 環と同型になることを見る。次に４次 Clifford 代数を定義しそれが４次複素ベクトル空間 W の自己準同型全体の空間 $\mathrm{End}(W)$ に同型となり、また 4 次元実ベクトル空間 V に対して、$\mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=1}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ なる同型が示せることを見る。次に $Spin$ 構造, $Spin^c$構造 を定義し、それらから $Spin(4), Spin^c(4)$ の表現によりスピノル束、クリフォード 束などのベクトル束を構成する。また普通のベクトル束にならないバーチャルベクトル束を定義しその曲率や Chern 類などの定義を与える。次にスピノル束上の $Spin$ 接続について考察を行い、$Spin$-構造 から構成されたベクトル束上の接続の関係を調べる。$Spin$ 接続とスカラー曲率との関係を調べ、その関係が後に Seiberg–Witten 不変量とスカラー曲率との関係を導く端緒となる。さらにスピノル束上の Dirac 作用素を定義し、その性質を見る。特に Weitzenböck の公式や形式的自己共役性などを示す。後に偏微分方程式の解空間を考察するため Sobolev 空間について必要となる事項の準備を行う。特に Dirac 作用素の Sobolev 空間への拡張や指数の定義などを行っておく。本論文では Seiberg–Witten 理論の幾何学的な側面の構築に主眼をおいているので、解析的な定理については深く立ち入らないことにする。Dirac 作用素の指数について Atiyah-Singer の指数定理を紹介しその応用として Hirzebruch の符号数定理を示す。

３章では Seiberg–Witten 方程式を定義し、その解空間をゲージ群で割ったモジュライ空間 $\mathcal{M}_\phi$ を定義する。そして Seiberg–Witten 理論の核心となる $\mathcal{M}_\phi$ の有界性、コンパクト性、さらに横断正則性、向き付け可能性を証明する。その際に Fredholm 写像の性質を多く使うことになり、ここでその説明を行う。さらに向き付け可能性に関連して行列式直線束の性質について証明を与える。この節が Seiberg–Witten 理論の本質的な部分である。

４章において、Seiberg–Witten 不変量を定義し、いくつかの問題に対する応用を見る。１つは「どのようなコンパクト単連結リーマン多様体が正のスカラー曲率をもつような計量を入れることができるのか」という問題に対して Seiberg–Witten 不変量によってある種の判別を行う。もう１つは「位相同相であるが可微分同相でない多様体」の例を示す。それには Kähler 多様体の Seiberg–Witten 不変量を調べるので、Kähler 多様体上の複素微分形式の理論や Dirac 作用素を準備し、$SW(K^{-1/2}) = \pm 1$ であることを示す。これより Seiberg–Witten 不変量が一致しない多様体が作れ位相同相である代数多様体の例となる。

最後に、この論文を作成するにあたり最後まで細やかな御指導、御助言を頂きました濱中裕明先生に深く御礼申し上げます。また物理学の方面の御助言を頂いた矢吹治一先生、様々な文献を紹介していただき幾何学の方面の御助言を頂いた小池敏司先生をはじめ兵庫教育大学数学教室の諸先生方に心から御礼申し上げます。

目 次

1 章　接続、曲率、特性類

1.1　接続 (Connection)

多様体 M と、その上の複素 1 次ベクトル束 (complex line bundle) L に対して、その Seiberg–Witten 方程式とは M と L から決まるあるベクトル束の接続と切断 (section) を未知変数とする 2 式からなる連立偏微分方程式である。その連立方程式の一方の式は接続の曲率と、切断から決まるテンソルが等しくなるという形をしている。よって接続と曲率は Seiberg–Witten 理論の土台をなすものである。

以下 M を C^∞多様体、TM を M の接ベクトル束、T^*M を TM の双対束、E をファイバーが m 次元の M 上の実または複素ベクトル束，L を複素 1 次元ベクトル束とする。
また $\Gamma(E) = \{E$ 上の C^∞切断$\}$、$U \subset M$ を開集合として $\Omega^p(U) = \Gamma(\wedge^p(T^*M)|_U) = \{$U上の p 次微分形式全体$\}$ を表すものとする。

まずベクトル束 E の接続を定義する。

定義 1.1 E の係数体を $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ とする。E 上の**接続** (connection) とは、写像

$$d_A : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で次を満たすものである。

$$d_A(f\sigma) = (df) \otimes \sigma + f d_A\sigma \qquad (1.1)$$
$$d_A(\sigma + \tau) = d_A\sigma + d_A\tau$$

つまり、加法について $\mathbb{K}$-線形でライプニッツルール (1.1) を満たすものである。　□

M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を U_α上 E が自明となるように取ったとき、U_α上の切断の組 $\{(e_i)_\alpha\}$ で各点での値が $\mathbb{K}$ 上一次独立になるものが取れる。これを**局所標構場** (local frame field) と呼ぶ。$\sigma \in \Gamma(E)$ に対して、$\sigma_\alpha = \sigma|_{U_\alpha}$ がU_α上の $\mathbb{K}$ 値関数 σ^i により、$\sigma_\alpha = \sum \sigma^i e_i$ と表されるので、

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{K}^m$$

なるベクトル値関数と見なせる。σ_αをベクトル値関数と考えたものを σのU_αにおける **局所表現** (local representation) という。

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なる α, β において, U_α,U_βにそれぞれ局所標構場 $\{(e_i)_\alpha\}, \{(e_i)_\beta\}$ を定める。このとき各点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して

$$(e_i)_\beta(p) = \sum g_{\alpha\beta_{ik}}(p)(e_k)_\alpha(p)$$

を満たす $(g_{\alpha\beta ik}(p)) \in GL(\mathbb{K}^m)$ が定まる。これらを

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{K}^m)$$

なる $GL(\mathbb{K}^m)$ 値関数とみなし $U_\alpha \cap U_\beta$ の**変換関数** (transition function) という。さらに α, β の全ての組合せに対して作った関数族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ を E の**変換関数系** (transition functions) という。

変換関数系 $\{g_{\alpha\beta}\}$ は $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ において**コサイクル条件** (cocycle condition)

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \tag{1.2}$$

を満たす。また $U_\alpha \cap U_\beta$ においては σ の局所表現 σ_αとσ_βに対して、

$$\sum {\sigma_\beta}^i (e_i)_\beta = \sum_i {\sigma_\beta}^i \sum_k g_{\alpha\beta ik} (e_k)_\alpha = \sum_k (\sum_i {\sigma_\beta}^i g_{\alpha\beta ik})(e_k)_\alpha = \sum {\sigma_\alpha}^k (e_k)_\alpha$$

が成り立つので、

$$\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta} \sigma_\beta \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta$$

と表される。

この局所表現により接続がどの様に表されるかを見てみる。局所標構場 $\{(e_i)_\alpha\}$ をとると $d_A e_i$ は 1 次微分形式 ω^i_jにより、$d_A e_i = \sum \omega^i_j e_j$ と表すことができる。このとき定義より、

$$(d_A \sum \sigma^i e_i)_\alpha = \sum (d\sigma^i) e_i + \sum \sigma^i (d_A e_i) = \left(\sum d\sigma^i + \sum \sigma^j \omega^i_j \right) e_i$$

となる。これは、$\omega_\alpha = (\omega^i_j)$ を 1 次微分形式成分の m 次正方行列 として、σ_αをベクトル値関数と見なして、

$$(d_A \sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \sigma_\alpha$$

と表される事を示している。

接続は E 全体で定義されているので、$U_\alpha \cap U_\beta$ において変換関数 $g_{\alpha\beta}$ に対して、

$$(d_A \sigma)_\alpha = g_{\alpha\beta} (d_A \sigma)_\beta$$

とならなくてはならない。ここで、

$$\begin{aligned} d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \sigma_\alpha &= g_{\alpha\beta}(d\sigma_\beta + \omega_\beta \sigma_\beta) = g_{\alpha\beta}(d({g_{\alpha\beta}}^{-1} \sigma_\alpha) + \omega_\beta ({g_{\alpha\beta}}^{-1} \sigma_\alpha)) \\ &= g_{\alpha\beta} d({g_{\alpha\beta}}^{-1}) \sigma_\alpha + g_{\alpha\beta} {g_{\alpha\beta}}^{-1} (d\sigma_\alpha) + (g_{\alpha\beta} \omega_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1}) \sigma_\alpha) \\ &= d\sigma_\alpha + (g_{\alpha\beta} d{g_{\alpha\beta}}^{-1} + g_{\alpha\beta} \omega_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1}) \sigma_\alpha \end{aligned}$$

とならなけらばならないので、ω_α について、

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} d{g_{\alpha\beta}}^{-1} + g_{\alpha\beta} \omega_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1} \tag{1.3}$$

が $U_\alpha \cap U_\beta$ で成り立つ。逆に (1.3) を満たすω_αの組を与えれば接続 d_A がきまる。接続 d_A に対して決まる $\{\omega_\alpha\}$ のことを**接続形式** (connection form) という。

ベクトル束 E, E' にそれぞれ接続 $d_A, d_{A'}$(接続形式ω, ω') があるとする。E, E' からは様々なベクトル束が構成されるが、それらの新しいベクトル束に $d_A, d_{A'}$ から新しい接続が構成される。ここでそれらをまとめておくと、

$$\begin{array}{ccc} \text{ベクトル束} & \text{接続} & \text{接続形式} \\ \hline E \oplus E' & d_A \oplus d_{A'} & \left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{smallmatrix}\right) \\ E \otimes E' & d_A \otimes id_{E'} + id_E \otimes d_{A'} & \omega \otimes I_q + I_p \otimes \omega' \\ E \wedge E' & d_A \wedge id_{E'} + id_E \wedge d_{A'} & \omega \wedge I_q + I_p \wedge \omega' \\ E^* & d_A^* & -{}^t\omega \\ \mathrm{Hom}(E, E') & d_A^* \otimes id_{E'} + id_E \otimes d_{A'} & -{}^t\omega \otimes I_q + I_p \otimes \omega \\ \hline \end{array} \tag{1.4}$$

となる。ただし $p = \dim E, q = \dim E', I_k$は k 次単位行列, $id_E, id_{E'}$はそれぞれ E, E'の恒等写像である。特に $\mathrm{Hom}(E, E')$ の接続 d_{Hom}は$\psi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, E'))$をとると、任意の E の接続$\sigma \in \Gamma(E)$ に対して、

$$d_A(\psi(\sigma)) = (d_{\mathrm{Hom}}\psi)(\sigma) + \psi(d_A\sigma) \tag{1.5}$$

が成り立つ。([20]p.40 参照)

一般に Lie 群Gとその Lie 環 $\mathfrak{g}$に対して次のようにG-接続が定義できる。

定義 1.2 Lie 群 Gに対して、G**に値を持つ変換系**とは、M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と、写像

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

の族 $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ でコサイクル条件 (1.2) を満たすものの組である。 □

定義 1.3 $\mathfrak{g}$をGの Lie 環とする。Gに値を持つ変換系 に対して、

$$\omega_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_\alpha)$$

の族 $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が、$U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} d {g_{\alpha\beta}}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1}$$

を満たすとする。この $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を ***G*-接続** (G-connection) という。特にベクトル束 E の変換群がGのとき、$\{\omega_\alpha\}$ を用いてU_αにおいて、任意の $\sigma \in \Gamma(E)$に対して、

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha$$

で d_A を定義すると M 全体で矛盾なく定義される。ただしω_αのσ_αへの作用は E のファイバーを F として $G \to GL(F)$ の原点での微分 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(F)$ で定義する。この d_A を ***E* の *G* -接続**という。 □

特に、$O(n)$-接続は直交接続、$U(n)$-接続はユニタリー接続と呼ぶ。以下この論文では、$SO(4)$-接続、$U(1)$-接続、$Spin(4)$-接続、$Spin^c(4)$-接続のみを扱う。よって、ω_αは、1 次微分形式成分の行列と考えてよく、ω_αのσ_α への作用は行列の積となる。

特に複素直線束 L 上のユニタリー接続は次の性質を持つ。

定理 1.4 L を多様体 M 上の複素 1 次ベクトル束とする。L 上の任意の $U(1)$-接続 $d_A, d_A{}'$ について、ある実 1 次微分形式 $a \in \Omega^1(M)$ がとれて、

$$d_A - d_A{}' = ia$$

と表すことができる。

よって、d_{A_0} を 1 つ固定すると、任意の d_A は実 1 次微分形式 a によって、$d_A = d_{A_0} - ia$ と表される。

証明 U_αにおいてd_A, $d_A{}'$ は

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha, \quad (d_A{}'\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha{}'\sigma_\alpha,$$

と表すことができる。このとき、$\omega_\alpha, \omega_\alpha{}' \in \mathfrak{u}(1) \otimes \Omega^1(U_\alpha)$ で純虚数値 1 次微分形式なので、U_α上の実 1 次微分形式 a_α を用いて $\omega_\alpha - \omega_\alpha{}' = ia_\alpha$ とおくと、

$$(d_A\sigma)_\alpha - (d_A{}'\sigma)_\alpha = (\omega_\alpha - \omega_\alpha{}')\sigma_\alpha = ia_\alpha\sigma_\alpha$$

と表される。

$U_\alpha \cap U_\beta$ においては、

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}{}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}{}^{-1}, \quad \omega_\alpha{}' = g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}{}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega'_\beta g_{\alpha\beta}{}^{-1}$$

が成り立つので、$\omega_\alpha = \omega_\alpha{}' + ia_\alpha$ を代入すると、

$$\omega_\alpha{}' + ia_\alpha = g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}{}^{-1} + g_{\alpha\beta}(\omega'_\beta + ia_\beta)g_{\alpha\beta}{}^{-1} = \omega_\alpha{}' + g_{\alpha\beta}ia_\beta g_{\alpha\beta}{}^{-1}$$

より、$ia_\alpha = g_{\alpha\beta}ia_\beta g_{\alpha\beta}{}^{-1}$ しかし、$g_{\alpha\beta}$は複素数値関数なので、積が可換であるから、

$$ia_\alpha = g_{\alpha\beta}ia_\beta g_{\alpha\beta}{}^{-1} = g_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}{}^{-1}ia_\beta = ia_\beta$$

となる。よって $a_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ は、$a \in \Omega^1(M)$ に拡張され、$d_A - d_A{}' = ia$ を満たす。 ∎

1.2 曲率 (Curvature)

M 上のベクトル束 E に対して、$\Omega^p(E) = \Gamma(\wedge^p(T^*M) \otimes E) = \{$M上の E に値を持つ p 次微分形式全体$\}$ とする。この記号によれば先の節の接続 d_A は、

$$d_A : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$$

と見なすことができる。この d_A を拡張して、

$$d_A : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E)$$

なる写像を定義する事ができる。つまり $\omega_i \in \Omega^p(M), \sigma_i \in \Gamma(E)$ によって、$\Omega^{p+1}(E)$ の元を $\sum_i \omega_i \otimes \sigma_i$ と表したとき、ライプニッツルール、

$$d_A(\sum_i \omega_i \otimes \sigma_i) = \sum_i (d\omega_i \otimes \sigma_i + (-1)^p \omega_i \otimes d_A\sigma_i)$$

を満たすとすれば帰納的に定義できるのである。

このように拡張した、d_A によって $d_A \circ d_A$ が計算できる。

定義 1.5 接続 d_A に対して、

$$\Omega_A = d_A \circ d_A : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^2(E)$$

を**曲率** (curvature) と呼ぶ。 □

U_αにおける局所表現を考えると、

$$\begin{aligned}(\Omega_A\sigma)_\alpha &= (d+\omega_\alpha)(d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha)\\ &= dd\sigma_\alpha + d(\omega_\alpha\sigma_\alpha) + \omega_\alpha d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha\sigma_\alpha\\ &= dd\sigma_\alpha + (d\omega_\alpha)\sigma_\alpha - \omega_\alpha d\sigma_\alpha + \omega_\alpha d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha\sigma_\alpha\\ &= (d\omega_\alpha + \omega_\alpha\wedge\omega_\alpha)\sigma_\alpha\end{aligned}$$

となる。よって

$$(\Omega_A)_\alpha = d\omega + \omega\wedge\omega \tag{1.6}$$

とおけば、$(\Omega_A\sigma)_\alpha = (\Omega_A)_\alpha\sigma_\alpha$ となる。ただし、最後のウェッジ積は行列の積における成分同士の積をウェッジ積にしたものである。

以下で示すように Ω_A は、d_A と違い、$(\Omega_A\sigma)(p)$ が σ の点 p における値 $\sigma(p)$ のみによって定まる。

命題 1.6 Ω_A を E 上の接続 d_A の曲率とする。任意の $\sigma\in\Gamma(E)$と $f\in C^\infty(M)$ に対し次が成り立つ。

$$\Omega_A(f\sigma) = f\Omega_A(\sigma)$$

証明

$$\begin{aligned}\Omega_A(f\sigma) &= d_A(d_Af\sigma) = d_A((df)\sigma + f(d_A\sigma))\\ &= d(df)\sigma - (df)(d_A\sigma) + (df)(d_A\sigma) + f(d_A(d_A\sigma)) = f(d_A(d_A\sigma)) = f\Omega_A(\sigma)\end{aligned}$$

∎

系 1.7 $(\Omega_A\sigma)(p)$ は $\sigma(p)$ によってのみ定まる。

証明 任意の $p\in M$ を 1 つ定める。$\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(E)$が、$\sigma_1(p)=\sigma_2(p)$ ならば、$\Omega_A\sigma_1(p) = \Omega_A\sigma_2(p)$ であることを示せばよい。

p の近傍 U_αに対して E が自明であるとする。$p\in V\subset\overline{V}\subset U_\alpha$ なる開集合 V をとると、関数 $f\in C^\infty(M)$ で、V 上では 1、U_αの外では 0 となるものがとれる。

$$\Omega_A\sigma_1(p) = f\Omega_A\sigma_1(p) + (1-f)\Omega_A\sigma_1(p) = f\Omega_A\sigma_1(p)$$

が成り立ち $\Omega_A\sigma_1(p)$ の値は、U_αにおける値によって決まる。$\Omega_A\sigma_2(p)$ も同様。

U_α における σ_1,σ_2 の局所表示をそれぞれ、$\sum_i\sigma_1^ie_i, \sum_i\sigma_2^ie_i$ と表す。ただし、$\{e_i\}$ は局所標構場、$\sigma_1^i,\sigma_2^i\in C^\infty(M)$ である。$\sigma_1(p)=\sigma_2(p)$ より、$\sigma_1^i(p)-\sigma_2^i(p)=0$ を満たしている。ここで、

$$\Omega_A\sigma_1(p) - \Omega_A\sigma_2(p) = (\Omega_A)_\alpha(\sum_i\sigma_1^ie_i - \sum_i\sigma_2^ie_i)(p) = \sum_i(\sigma_1^i(p)-\sigma_2^i(p))(\Omega_A)_\alpha e_i(p) = 0$$

となり、$\sigma_1(p)=\sigma_2(p)$ ならば、$\Omega_A\sigma_1(p)=\Omega_A\sigma_2(p)$ が成り立つ。 ∎

系によりある $\widehat{\Omega}_A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E)\otimes \wedge^2 T^*M)$ が存在して $(\Omega_A\sigma)(p)=\widehat{\Omega}_A(p)(\sigma(p))$ となる。この $\widehat{\Omega}_A$ と Ω_A を同一視し、またこの意味で「Ω_A はテンソル場である」という。

変換写像に対しては、$U_\alpha\cap U_\beta$ において、

$$(\Omega_A)_\alpha\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}((\Omega_A)_\beta\sigma_\beta) = g_{\alpha\beta}((\Omega_A)_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1}\sigma_\alpha)$$

となるので、

$$(\Omega_A)_\alpha = g_{\alpha\beta}(\Omega_A)_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1} \tag{1.7}$$

を満たさなければならない。

複素直線束 L について考えれば、変換群が $\mathbb{C}-\{0\}$ なので、$g_{\alpha\beta}$は複素関数、$(\Omega_A)_\alpha$ は複素 2 次微分形式となる。$g_{\alpha\beta}$の $(\Omega_A)_\alpha$ への作用は各点でのスカラー積になり、

$$(\Omega_A)_\alpha = g_{\alpha\beta}(\Omega_A)_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1} = g_{\alpha\beta}{g_{\alpha\beta}}^{-1}(\Omega_A)_\beta = (\Omega_A)_\beta$$

となり、E 全体で定義できることになる。

一般にベクトル束にエルミート計量を入れユニタリー接続を考えると、曲率は 2 次微分形式係数の歪エルミート行列 (skew-Hermit) でなくてはならない。特に 複素直線束 L に対しては純虚数係数の２次微分形式となる。よって直線束上のユニタリー接続の曲率は実 2 次微分形式 F_A を用いて、

$$\Omega_A = -iF_A \tag{1.8}$$

と表すことができる。このF_Aは Seiberg–Witten 方程式の項として現れ、今後の議論において重要な働きをすることになる。

複素直線束 では、定理 1.4 より、ユニタリー接続は純虚数値１次微分形式を加えることで、他のユニタリー接続に移った。この変換により曲率がどう変わるかは次の定理で示される。

定理 1.8 L を多様体 M 上の複素１次ベクトル束とする。L 上の $U(1)$-接続 d_Aが、ある $U(1)$-接続 d_{A_0}と実 1 次微分形式 $a\in\Omega^1(M)$ によって、$d_A = d_{A_0} - ia$ と表されるとき、d_Aに対する曲率F_Aは、d_{A_0}に対する曲率F_{A_0}によって次のように表される。

$$F_A = F_{A_0} + da$$

証明　任意の $\sigma\in\Gamma(L)$ に対して、

$$\begin{aligned}
-iF_A\sigma &= (d_{A_0}-ia)^2\sigma = {d_{A_0}}^2\sigma - d_{A_0}(ia\sigma) - ia(d_{A_0}\sigma) - a^2\sigma \\
&= {d_{A_0}}^2\sigma - (ida\sigma - ia(d_{A_0}\sigma)) - ia(d_{A_0}\sigma) \\
&= {d_{A_0}}^2\sigma - ida\sigma = (-iF_{A_0} - ida)\sigma
\end{aligned}$$

が成り立つので、$F_A = F_{A_0} + da$ となる。 ∎

1.3 ゲージ変換 (Gauge transformation)

ゲージ理論は物理学において発展した理論であるが、数学の言葉ではベクトル束での接続の自己同型についての理論と考えられるものであり数学において古くから研究されている対象である。しかし幾何学の研究に対するゲージ理論の新しさは、接続全体の空間を対象とすることで、もとの多様体の性質が見えてくることを示したことであった。このゲージ理論の方法論とは、接続全体の空間は大きくて扱いにくいが、ゲージ変換で割ることで扱いやすい性質を手に入れるというものであり、Seiberg–Witten 方程式もゲージ変換によって不変な方程式となっている。

まず複素直線束 L に対して

$$\overline{\mathcal{A}} = \{L \text{ 上の } U(1)\text{-接続全体}\}$$

とおくことにする。

定義 1.9 L を $U(1)$-束とする。L 上の**ゲージ変換** (gauge transformation) とは、写像

$$g : M \to U(1)$$

のことである。 □

同じ記号で表される次の写像、

$$g : L \to L \quad g(p,v) = (p, g(p)v) \ (\forall p \in M, \forall v \in \pi^{-1}(p))$$

は、L のエルミート内積を保つ自己同型を与える。ここで、$U(1) \cong S^1 \subset \mathbb{C}^2$ と見なすことにより、大きさ 1 の複素数をかける事が $g(p)$ のベクトルに対する作用である。

定義 1.10 集合

$$\mathcal{G} = \{L \text{ 上の gauge 変換}\}$$

は、$g, g' \in \mathcal{G}$ に対して $(gg')(p) = g(p)g'(p)$ となる $gg' \in \mathcal{G}$ を対応させる演算によって群となる。この$\mathcal{G}$ を**ゲージ群** (gauge group) という。
また $p_0 \in M$ を 1 つ固定して、集合

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} \mid g(p_0) = 1\}$$

にも同様の演算を定義して群としたものを**基点付きゲージ群** (based gauge group) という。 □

ここで、$\mathcal{G}$ と$\overline{\mathcal{A}}$ との関係を見てみる。任意の $g \in \mathcal{G}$ と $d_A \in \overline{\mathcal{A}}$ をとると、$\sigma \in \Gamma(L)$と、$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} gd_Ag^{-1}(f\sigma) &= gd_A(fg^{-1}\sigma) = g(df)g^{-1}\sigma + gfd_A(g^{-1}\sigma) = (df)gg^{-1}\sigma + fgd_A(g^{-1}\sigma) \\ &= df\sigma + f(gd_Ag^{-1})\sigma \end{aligned}$$

となり、また gd_Ag^{-1} の線形性は明らかなので、$gd_Ag^{-1} \in \overline{\mathcal{A}}$ が言える。よって、群 $\mathcal{G}$ は、$\overline{\mathcal{A}}$ に共役で作用する。

命題 1.11 $\overline{\mathcal{A}}$ を $U(1)$-束 L 上の $U(1)$-接続全体、$\mathcal{G}$ をゲージ群とする。作用

$$ad : \mathcal{G} \times \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{A}}, \quad ad(g, d_A) = g \circ d_A \circ g^{-1}$$

は、

$$ad(g, d_A) = d_A + gdg^{-1} \tag{1.9}$$

で表される。

証明 任意の $\sigma \in \Gamma(L)$ に対して、

$$\begin{aligned} ad(g, d_A)\sigma &= (g \circ d_A \circ g^{-1})\sigma = g(d_A(g^{-1}\sigma)) \\ &= g((dg^{-1})\sigma + g^{-1}d_A\sigma) = g(dg^{-1})\sigma + gg^{-1}d_A\sigma \\ &= (gdg^{-1} + d_A)\sigma \end{aligned}$$

よって、$ad(g, d_A) = d_A + gdg^{-1}$。 ∎

系 1.12 ゲージ変換 $g \in \mathcal{G}$ は定数であれば、接続を変えない。

証明 g が定数であれば g^{-1} も定数であり、$dg^{-1} = 0$ であるから $ad(g, d_A) = d_A$ である。 ∎

この作用により、ゲージ変換で移りあう接続を同値と同値関係を定義して、同値類の集合を

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} / \mathcal{G}$$

とおく。$S^1 = \{g \in \mathcal{G} \mid g \text{ 定数}\}$ とすれば、群の直積で $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \times S^1$ と表せるので系 1.12 より、

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} / \mathcal{G}_0$$

となる。

M が単連結のときは、$g \in \mathcal{G}_0$ に対して、$u : M \to \mathbb{R}$ なる関数で

$$g = e^{iu} \quad \text{かつ} \quad u(p_0) = 0$$

を満たす u が取れる。この u を対数と呼ぶ。この u を用いれば (1.9) は、

$$ad(e^{iu}, d_A) = d_A + e^{iu}de^{-iu} = d_A + e^{iu}(-ie^{-iu}du) = d_A - idu \tag{1.10}$$

と表される。

1.4 特性類 (Characteristic class)

E を M 上のユニタリー束とする。その時ユニタリー接続 d_A のU_αにおける局所表示 $d + \omega_\alpha$ において、ω_αはユニタリー群の Lie 環であるから歪エルミートである。ここで $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$ について計算してみると

$$\begin{aligned} (\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)_{ij} &= \sum (\omega_\alpha)_{ik} \wedge (\omega_\alpha)_{kj} = \sum (-\overline{\omega_{\alpha ki}}) \wedge (-\overline{\omega_{\alpha jk}}) = \sum \overline{\omega_{\alpha ki}} \wedge \overline{\omega_{\alpha jk}} = \sum -\overline{\omega_{\alpha jk} \wedge \omega_{\alpha ki}} \\ &= -\overline{(\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)_{ji}} \end{aligned}$$

となり $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$ は歪エルミートとなる。$d\omega_\alpha$ も歪エルミートであるから、曲率の局所表示 $(\Omega_A)_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$ も歪エルミートとなる。

正の整数 k に対して、

$$\tau_k = \mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\alpha\right)^k$$

とおく、ただし Tr は行列のトレース (trace) である。$\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\alpha$ はエルミート行列であり k 乗してもエルミートである。したがって対角成分は実 $2k$ 次微分形式でτ_kは、実数値 $2k$ 次微分形式となる.

命題 1.13 τ_kは座標系の取り方によらない。

証明 $U_\alpha \cap U_\beta$ において、(1.7) が成り立ち、相似な行列に対しては Tr が等しいので

$$\begin{aligned}\tau_k &= \mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\alpha\right)^k = \mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}g_{\alpha\beta} \quad (\Omega_A)_\beta {g_{\alpha\beta}}^{-1}\right)^k \\ &= \mathrm{Tr}\left[g_{\alpha\beta}\left(\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\beta\right)^k {g_{\alpha\beta}}^{-1}\right] = \mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\beta\right)^k\end{aligned}$$

よって、τ_kは座標系の取り方によらない。 ∎

この命題により、τ_kは M 全体で定義された $2k$ 次微分形式となる。さらに次の性質が成り立つ。

命題 1.14 $d\tau_k = 0$ である。

証明 (1.6) を外微分すると、

$$\begin{aligned}d(\Omega_A)_\alpha &= d(d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha) = (d\omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha) \\ &= (d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha) = (\Omega_A)_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge (\Omega_A)_\alpha\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}d\tau_k &= d\mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}{(\Omega_A)_\alpha}^k\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{Tr}\ d({(\Omega_A)_\alpha}^k) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{Tr}\Big((d(\Omega_A)_\alpha){(\Omega_A)_\alpha}^{k-1} + (\Omega_A)_\alpha(d(\Omega_A)_\alpha){(\Omega_A)_\alpha}^{k-2} + \cdots + {(\Omega_A)_\alpha}^{k-1}(d(\Omega_A)_\alpha)\Big) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{Tr}\Big(((\Omega_A)_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge (\Omega_A)_\alpha){(\Omega_A)_\alpha}^{k-1} + \cdots \\ &\qquad + {(\Omega_A)_\alpha}^{k-1}((\Omega_A)_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge (\Omega_A)_\alpha)\Big) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{Tr}\Big(((\Omega_A)_\alpha \wedge \omega_\alpha \wedge {(\Omega_A)_\alpha}^{k-1} + \cdots + {(\Omega_A)_\alpha}^k \wedge \omega_\alpha) \\ &\qquad -(\omega_\alpha \wedge {(\Omega_A)_\alpha}^k + \cdots + {(\Omega_A)_\alpha}^{k-1} \wedge \omega_\alpha \wedge (\Omega_A)_\alpha)\Big)\end{aligned}$$

Tr は積について巡置換を行っても値が変わらないので最後の式の形から、$d\tau_k = 0$ である。 ∎

以上の命題より、τ_kはコホモロジーの代表元となる。さらに次の命題が成り立ち、$[\tau_k]$ は、E のみによって決まる量となる。

命題 1.15 $[\tau_k] \in H^{2k}(M;\mathbb{R})$ は接続と内積の取り方によらない。

証明は [20]p136 参照

定義 1.16 E を多様体 M 上の複素 $2m$ 次ベクトル束とするとき、k を 0 以上の整数として、
$c_k(E) \in H^{2k}(M;\mathbb{R})$ を k 次**チャーン類** (Chern class) として次のように定義する。
$c_1(E) = [\tau_1] \in H^2(M;\mathbb{R})$
$c_2(E) = \frac{1}{2}[\tau_1^2 - \tau_2] \in H^4(M;\mathbb{R})$
$c_0(E) = 1,\ c_k(E) = 0\ (k > m)$
さらに、$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + c_2(E) + \cdots$ を**トータルチャーン類** (total Chern class) と呼ぶ。 □

実際には $k \geq 3$ についても、$c_k(E)$ が τ_i から定義されるのであるが、本論文は 4 次元多様体を対象としているので 0 で定義しておく。

上の定義では Chern 類 $c_k(E)$ は $H^{2k}(M;\mathbb{R})$ の元としているが、実際には係数 $\frac{i}{2\pi}$ によって $H^{2k}(M;\mathbb{Z})$ の元となることが示される。([11] 参照)

Chern 類は次の性質を持つことが知られている。([20] 及び [11] 参照)

1. 多様体 M, N に対して、$f : M \to N$ を C^∞写像とする。M 上のベクトル束 E について、
   $c_k(f^*E) = f^*(c_k(E))$

2. E_1, E_2を多様体 M 上の複素ベクトル束とする。このとき、$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$

特に複素直線束 L については (1.8) で示されたように曲率が $\Omega_A = -iF_A$ で表されるので、第 1 Chern 類が

$$c_1(L) = \left[\frac{1}{2\pi}F_A\right] \tag{1.11}$$

と表される。この性質を利用してさらに次のような性質が示される。

命題 1.17 L_1, L_2を多様体 M 上の複素直線束とする。このとき、

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

が成り立つ。

証明 L_1, L_2 の接続をそれぞれ d_{A_1}, d_{A_2}、その曲率をそれぞれ $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ とする。このとき $L_1 \otimes L_2$ の接続 $d_{A_1 \otimes A_2}$ は、

$$d_{A_1 \otimes A_2} = d_{A_1} \otimes I + I \otimes d_{A_2}$$

と表される。よってその曲率 $\Omega_{A_1 \otimes A_2}$ は

$$\begin{aligned}\Omega_{A_1 \otimes A_2} &= (d_{A_1 \otimes A_2})^2 = (d_{A_1} \otimes I + I \otimes d_{A_2})^2 \\ &= (d_{A_1} d_{A_1}) \otimes I + d_{A_1} \otimes d_{A_2} - d_{A_1} \otimes d_{A_2} + I \otimes (d_{A_2} d_{A_2}) = \Omega_{A_1} + \Omega_{A_2}\end{aligned}$$

となる。(1.8) の表記を用いると、$F_{A_1\otimes A_2} = F_{A_1} + F_{A_2}$ と表すことができ、(1.11) の関係式を用いれば

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = \left[\frac{1}{2\pi}F_{A_1\otimes A_2}\right] = \left[\frac{1}{2\pi}(F_{A_1}+F_{A_2})\right] = \left[\frac{1}{2\pi}F_{A_1}\right] + \left[\frac{1}{2\pi}F_{A_2}\right] = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

が示せる。 ∎

Chern 類以外にも数種類の特性類が存在するが、後に必要となる特性類である Pontrjagin 類が Chern 類から定義される。

定義 1.18 実ベクトル束 E に対して、
$p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E\otimes\mathbb{C}) \in H^{4k}(M;\mathbb{Z})$
を k 次**ポントリャーギン類** (Pontrjagin class) という。 □

Chern 類に関して次の Chern 指標がよりよい性質を持つ。

定義 1.19 M 上の複素ベクトル束 E に対して、

$$ch(E) = \left[\mathrm{Tr}\ \exp\left(\frac{i}{2\pi}(\Omega_A)_\alpha\right)\right] = \dim E + [\tau_1] + \frac{1}{2!}[\tau_2] + \frac{1}{3!}[\tau_3] + \cdots \in H^*(M;\mathbb{Z}) \tag{1.12}$$

を**チャーン指標** (Chern character) という。 □

τ_k と Chern 類との関係から、

$$ch(E) = \dim E + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \cdots$$

となる。$ch(E)$ は

$$ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2), \quad ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)ch(E_2)$$

なる性質を持つ。([8] 参照)

1.5 Hodge 理論 (Hodge theory)

後に Seiberg–Witten 方程式の解の性質を調べる際に、対象とする多様体の調和形式空間の次元が重要な条件として出てくる。また $*$ 作用素などの性質が必要となるので、ホッジ理論 (Hodge Theory) の概要を確認しておく。M を向き付けられたコンパクト 4 次元多様体、点 $p \in M$ を 1 つ定めて $V = T_p^*M$ とする。$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を V の正規直交基底とする。$\wedge^k V$ の基底として $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\}_{i_1<\cdots<i_k}$ が取れるので、$\wedge^k V$ の任意の元 $\phi = \sum a_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$, $\eta = \sum b_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ に対して $\wedge^k V$ の内積 g を

$$g(\phi,\eta) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} b_{i_1\ldots i_k}$$

で定義する。これが内積になり基底の取り方によらないことは単純な計算で示される。

命題 1.20 $\phi \in \wedge^k V$ をとったとき、任意の $\eta \in \wedge^{4-k}V$ に対して

$$g(\phi', \eta)dV = \phi \wedge \eta$$

が成りたつような $\phi' \in \wedge^{4-k}V$ が基底によらず唯一定まる。ただし dV は体積要素 (volume form) である。

証明 ϕ を固定する。$\phi \wedge \eta \in \wedge^4 V$ であるが、$\dim \wedge^4 V = 1$ で基底として dV がとれるので、

$$\phi \wedge \eta = E_{\phi\eta} dV$$

となる実数 $E_{\phi\eta}$ が一意的に定まる。g は内積であるから任意の $\eta \in \wedge^{4-k}V$ に対して、

$$g(\phi', \eta) = E_\phi(\eta)$$

を満たす $\phi' \in \wedge^{4-k}V$ が唯一定まる。g, dV は基底の取り方によらないので ϕ' は基底の取り方に依らない。 ∎

この命題により次の Hodge 作用素が定義できる。

定義 1.21 写像

$$* : \wedge^k V \to \wedge^{4-k} V$$

を ϕ を与えたとき、任意の $\eta \in \wedge^{4-k}V$ に対して、

$$g(*\phi, \eta)dV = \phi \wedge \eta$$

を満たすものとして定義する。ただし dV は体積要素。この $*$ を**ホッジ作用素** (Hodge star operator) という。 □

この Hodge 作用素については次のような性質がある。

命題 1.22
(1) $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を V の正規直交基底とすると、

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \mathrm{sgn}\ (i_1, \ldots, i_4) e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_4}$$

が成り立つ。ただし $(i_1, \ldots, i_4)$ は置換、sgn はその符号である。
(2) $** = (-1)^{k(4-k)} : \wedge^k V \to \wedge^k V$

証明 (1)Hodge 作用素の定義式において、$\eta = e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_4}$ とすると

$$\begin{aligned} g(*\phi, \eta)dV &= g(*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}), (e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_4}))(e_1 \wedge \cdots \wedge e_4) \\ &= (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_4}) \\ &= \mathrm{sgn}\ (i_1, \ldots, i_4)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_4) \end{aligned}$$

よって、$g(*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}), (e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_4})) = \mathrm{sgn}\ (i_1, \ldots, i_4)$ となる。

添え字の組 $\{j_{k+1},\ldots,j_4\}$ を $\{i_{k+1}\ldots i_4\}$ とは異なる組み合わせとする。$\eta = e_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_4}$ を定義式に代入すると同じ基底が必ず 2 つ以上現れるので、$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})\wedge(e_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_4}) = 0$ となる。したがって $g(*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}),(e_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_4})) = 0$ となる。よって、

$$*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) = \mathrm{sgn}\ (i_1,\ldots,i_4)e_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_4}$$

(2) 基底について計算すれば十分である。$1\leq i_k\leq 4$ として $i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}<\cdots<i_4$ を満たすとする。$(i_1,\ldots,i_4)$ を置換とすると (1) より、

$$\begin{aligned} **(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) &= \mathrm{sgn}\ (i_1,\ldots,i_4)*(e_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_4}) \\ &= \mathrm{sgn}\ (i_1,\ldots,i_4)\mathrm{sgn}\ (i_{k+1},\ldots,i_4,i_1,\ldots,i_k)(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) \end{aligned}$$

$(i_{k+1},\ldots,i_4,i_1,\ldots,i_k)$ は前半の $4-k$ 個と後半の k 個の数字を入れ替えれば $(i_1,\ldots,i_4)$ になる。そのためには $k(4-k)$ 回の互換が必要なので、

$$\mathrm{sgn}\ (i_1,\ldots,i_4)\mathrm{sgn}\ (i_{k+1},\ldots,i_4,i_1,\ldots,i_k) = \mathrm{sgn}\ (i_1,\ldots,i_4)^2(-1)^{k(4-k)}$$

よって、

$$**(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) = (-1)^{k(4-k)}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})$$

となり題意を示せた。 ∎

定義 1.23 M がコンパクトであるとき、$\Omega^k(M)$上の内積 (,) を次で定義する。

$$(\ ,\ ):\Omega^k(M)\times\Omega^k(M)\to\mathbb{R},\quad (\omega,\theta) = \int_M \omega\wedge *\theta$$

□

実際 (,) が双線形であることは明らかであるし、Hodge 作用素の定義から、

$$(\omega,\theta) = \int_M \omega\wedge *\theta = \int_M g(*\omega,*\theta)dV = \int_M g(*\theta,*\omega)dV = (\theta,\omega)$$
$$(\omega,\omega) = \int_M \omega\wedge *\omega = \int_M g(*\omega,*\omega)dV \geq 0$$
$$(\omega,\omega) = 0 \Leftrightarrow g(*\omega,*\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$$

が成り立ち対称性、非退化正定値性が成り立ち内積となっている。

この内積により、外微分とある意味で双対な作用素が作れることになる。

定義 1.24 d を外微分とするとき、

$$\delta = -*d*:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$$

を**余微分** (codifferential) と呼ぶ。 □

この余微分と外微分の内積による関係は次の命題で示される。

命題 1.25 d と δ は、形式的共役 (formal adjoint) である。つまり、任意の $\omega \in \Omega^k(M), \theta \in \Omega^{k+1}(M)$ に対して次の式が成り立つ。

$$(d\omega, \theta) = (\omega, \delta\theta)$$

証明

$$\begin{aligned}(d\omega, \theta) &= \int_M d\omega \wedge *\theta = \int_M d(\omega \wedge *\theta) - (-1)^k \int_M \omega \wedge d(*\theta) \\ &= \int_{\partial M} (\omega \wedge *\theta) - \int_M \omega \wedge (-1)^k d(*\theta)\end{aligned}$$

$\partial M = \emptyset$ で最後の式の第 1 項は 0 となる。第 2 項について見ると $d(*\theta) \in \Omega^{4-k}(M)$ であるが、$4-k$ 次微分形式に対しては、$** = (-1)^{(4-k)k} = (-1)^{4k-k^2} = (-1)^k$ となり、

$$(d\omega, \theta) = -\int_M \omega \wedge (-1)^k d(*\theta) = -\int_M \omega \wedge * * d(*\theta) = \int_M \omega \wedge *(- * d * \theta) = (\omega, \delta\theta)$$

が示せる。 ∎

さて Hodge 理論の中核をなす調和形式を定義する準備がそろったので、本題の調和形式の定義に入る。実関数における調和関数は LaplacianΔ に関して $\Delta f = 0$ を満たすものであった。我々は同様に微分形式に対する "Laplacian" を作って調和形式を定義する。

定義 1.26 ホッジラプラシアン (Hodge Laplacian) Δ とは次の式で定義される写像である。

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

□

命題 1.27 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対して、

$$\Delta\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0 \text{ かつ } \delta\omega = 0$$

証明 $\Leftarrow$ は明らか。

$$(\Delta\omega, \omega) = ((d\delta + \delta d)\omega, \omega) = (d\delta\omega, \omega) + (\delta d\omega, \omega) = (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega)$$

より、

$$\Delta\omega = 0 \Rightarrow (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega) = 0 \Leftrightarrow (d\omega, d\omega) = 0, (\delta\omega, \delta\omega) = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0, \delta\omega = 0$$

∎

定義 1.28 M を向き付けられた 4 次元 Riemann 多様体とする。$\omega \in \Omega^k(M)$が$\Delta\omega = 0$ を満たすとき**調和** (harmonic) であるという。M 上の k 次の調和形式全体の集合を $\mathcal{H}^k(M)$ と表す。 □

Hodge や小平は調和形式について研究し、次の定理を示した。([22] 参照)

定理 1.29 (Hodge's Theorem) M を向き付けられたコンパクト Riemann 多様体とする。このとき de Rham コホモロジーの各元は調和な代表元をただ一つ持つ。よって、

$$H^k(M;\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(M)$$

となる。更に、$\mathcal{H}^k(M)$ は有限次元であり、かつ $\Omega^k(M)$ は $(\ ,\ )$ に関して次のように直交分解される。

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta(\Omega^k(M)) = \mathcal{H}^k(M) \oplus d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \tag{1.13}$$

これより Im d は閉集合であることが分かる。 □

Hodge の定理より次が示せる。

定理 1.30 (Poincaré duality Theorem) M を向き付けられた境界のない 4 次元コンパクト Riemann 多様体とする。de Rham コホモロジー群は、

$$H^k(M;\mathbb{R}) \cong H^{4-k}(M;\mathbb{R})$$

証明　任意の k 次調和形式 $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$ に対して、

$$\Delta(*\omega) = (d(-*d*) + (-*d*)d)*\omega = (-d*d**-*d*d*)\omega$$

となる。k 次微分形式に対しては、$** = (-1)^{k(4-k)} = (-1)^k$ となり、最後の式は $(-(-1)^k d*d-*d*d*)\omega$ と変形できる。$d*d\omega \in \mathcal{H}^{4-k}(M)$ であるから、$(-1)^k = **$ と置き換えられて、

$$(-(-1)^k d*d-*d*d*)\omega = (-**d*d-*d*d*)\omega = (*\delta d + *d\delta)\omega = *\Delta\omega = 0$$

よって $*\omega \in \mathcal{H}^{4-k}(M)$ となり、$\mathcal{H}^k(M) \cong \mathcal{H}^{4-k}(M)$ である。したがって

$$H^k(M;\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(M) \cong \mathcal{H}^{4-k}(M) \cong H^{4-k}(M;\mathbb{R})$$

■

これにより、k 次**ベッチ数** (Betti number) b_k $(=\dim H^k(M;\mathbb{R}))$ についても、$b_k = b_{4-k}$ なる関係を満たすことになる。

$\dim V = 4$ のとき、$*$ は $\wedge^2 V$ において $** = 1$ となる。したがって $\wedge^2 V$ を固有値 $1, -1$ に対する固有空間に分解する。つまり、

命題 1.31

$$\wedge^2_+ V = \{w \in \wedge^2 V | *w = w\}, \quad \wedge^2_- V = \{w \in \wedge^2 V | *w = -w\}$$

とおくと、$\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V$

証明　任意の $w \in \wedge^2 V$ に対して

$$w_+ = \frac{1}{2}(w + *w), \quad w_- = \frac{1}{2}(w - *w)$$

とおくと、$w = w_+ + w_-$, $w_\pm \in \wedge^2_\pm V$ となり $\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V$ ∎

$\wedge^2_+ V$ を**自己双対部分空間** (self-dual-subspace), $\wedge^2_- V$ を**反自己双対部分空間** (anti-self-dual-subspace) と呼ぶ。$\wedge^2_+ V, \wedge^2_- V$ の基底としてはそれぞれ、

$$\{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\} \tag{1.14}$$

$$\{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3\} \tag{1.15}$$

がとれる。

命題 1.31 と同様に、

$$\Omega^2_+(M) = \{w \in \Omega^2(M) | *w = w\}, \quad \Omega^2_-(M) = \{w \in \Omega^2(M) | *w = -w\} \tag{1.16}$$

とおくと、$\Omega^2(M) = \Omega^2_+(M) \oplus \Omega^2_-(M)$ と分解され、

$$\mathcal{H}^2_+(M) = \{w \in \mathcal{H}^2(M) | *w = w\}, \quad \mathcal{H}^2_-(M) = \{w \in \mathcal{H}^2(M) | *w = -w\}$$

とおくと、$\mathcal{H}^2(M) = \mathcal{H}^2_+(M) \oplus \mathcal{H}^2_-(M)$ と分解される。

この、$\mathcal{H}^2_+(M)$, $\mathcal{H}^2_-(M)$によって、M の符号数が定義される。

定義 1.32 M を向き付けられた境界のない n 次元コンパクト Riemann 多様体とする。

$$b_+ = \dim \mathcal{H}^2_+(M), \quad b_- = \dim \mathcal{H}^2_-(M)$$

とおく ($b_2 = b_+ + b_-$が成り立つ)。このとき、

$$\tau(M) = b_+ - b_-$$

を、M の**符号数** (signature) と呼ぶ。 □

$\tau(M)$ は位相不変量であることが後に示される。(Hirzebruch Signature 定理 (定理 2.56) 参照) この符号数は Seiberg–Witten 方程式の Moduli 空間の次元を定めるなど多様体の性質を決定する重要な役割を担っている。

次に外微分 d の自己共役部分 d^+ について考える。これは後に Seiberg–Witten 方程式の分析の際に重要な役割を果たす。

定義 1.33 写像

$$p_+ : \Omega^2(M) \to \Omega^2_+(M), \quad p_+(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + *\omega)$$

を考える。このとき

$$d^+ = p_+ \circ d : \Omega^1(M) \to \Omega^2_+(M)$$

と定義する。 □

この d^+ を使って、

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^+} \Omega^2_+(M) \longrightarrow 0 \tag{1.17}$$

が複体となっている。($\because d^+ \circ d = p_+ \circ d^2 = 0$)

命題 1.34 複体 (1.17) ののコホモロジー群 $\hat{H}^k(M)$ は

$$\hat{H}^2(M) \cong \mathcal{H}^2_+(M), \quad \hat{H}^1(M) \cong \mathcal{H}^1(M), \quad \hat{H}^0(M) \cong \mathcal{H}^0(M) \cong \mathbb{R} \tag{1.18}$$

である。

証明　Hodge の定理 (定理 1.29) より、Im d 及び Im d^+ は閉集合であることが分かるので、Im d 及び Im d^+ で割る代わりに Im d 及び Im d^+ の直交補空間を考える。$w \in \Omega^2_+(M)$ が $w \perp$ Im d^+ を満たすものとする。

Hodge の定理の分解より w は

$$w \in \mathcal{H}^2_+(M) \oplus \mathrm{Im}\ (p_+ \circ \delta)$$

なる空間に属するが、$\mathcal{H}^2_+(M), \mathrm{Im}\ (p_+ \circ \delta)$ の元はともに δ により 0 となるので $\delta w = 0$ である。$w = *w$ より、

$$dw = d * w = - * * d * w = * \delta w = 0$$

で、$dw = 0$ が示せる。よって、$dw = \delta w = 0$ より、$\Delta w = 0$ となり $\hat{H}^2(M) \cong \mathcal{H}^2(M) \cap \Omega^2_+(M) = \mathcal{H}^2_+(M)$ となる。

$w \in \Omega^1(M)$ が $w \in \ker d^+$ かつ $w \perp$ Im d を満たすとすると任意の $x \in \Omega^0(M)$ に対して、

$$0 = (w, dx) = (\delta w, x)$$

が成り立つので $\delta w = 0$ である。$\delta w = - * d * w = 0$ であるから、$d * w = 0$。$d^+ w = 0$ より、

$$(d + \delta)(w + *w) = dw + \delta w + d * w + \delta * w = dw + \delta * w = dw + *dw = 2d^+ w = 0 \tag{1.19}$$

が成り立つ。$(d+\delta)^2 = d^2 + d\delta + \delta d + \delta^2 = \Delta$ であるから、$\Delta w + \Delta * w = 0$ であるが、この式の各項は次元が違うから、$\Delta w = 0$。よって、$\hat{H}^1(M) \cong \mathcal{H}^1(M)$。

$\hat{H}^0(M) \cong \ker d \subset \Omega^0(M)$ であるが, $\Omega^0(M)$は M 上の関数なので、$\ker d =$ 定数関数 $= \mathcal{H}^0(M) \cong \mathbb{R}$。よって、$\hat{H}^0(M) \cong \mathcal{H}^0(M) \cong \mathbb{R}$。

以上より題意が示せた。 ∎

この命題の証明で次が示されていることに注意する。

系 1.35 1 次微分形式 $w \in \Omega^1(M)$ が $\delta w = 0$ かつ $d^+ w = 0$ であれば調和形式である。

この命題から次が示される。

命題 1.36 M を向き付けられたコンパクト Riemann 多様体、L を M 上の複素直線束 とする。

$$\Pi = \{F_A^+ \in \Omega^2_+(M) | F_A^+ \text{は } L \text{ のある } U(1)\text{-接続} d_A \text{に対する曲率の self-dual-part}\}$$

とおくと、Π は$\Omega^2_+(M)$のアフィン部分空間で、codim $\Pi = b_+$ となる。

証明　L 上の U(1)-接続 d_{A_0} を１つ固定する。定理 1.8 により、L 上の U(1)-接続 d_A が $d_A = d_{A_0} - ia$ と表されるとき、d_Aに対する曲率F_Aは、d_{A_0}に対する曲率F_{A_0}によって $F_A = F_{A_0} + da$ と表される。

よって、

$$F_A{}^+ = F_{A_0}{}^+ + (da)^+ = F_{A_0}{}^+ + d^+a$$

であるから、

$$\Pi = F_{A_0} + \mathrm{Im}\ d^+ \subset \Omega^2_+(M)$$

となり Π は$\Omega^2_+(M)$のアフィン部分空間となる。さらに、$\hat{H}^2(M) \cong \mathcal{H}^2_+(M)$ であったので、

$$\mathrm{codim}\ \Pi = \dim(\Omega^2_+(M)/\mathrm{Im}\ d^+) = \dim \hat{H}^2(M) = \dim \mathcal{H}^2_+(M) = b_+$$

となる。 ∎

この命題は後に Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間を調べる際に使うことになる。

2 章　スピン構造、Dirac 作用素

この章では$Spin(4)$,$Spin^c(4)$群を基にした$Spin$-構造 を定義し、それにより$Spin$-構造 を持つベクトル束から新たに様々なベクトル束が構成されることを見る。そして後に、その中のあるベクトル束の上で Seiberg–Witten 方程式が定義されることになるのである。また Seiberg–Witten 方程式は Dirac 作用素という微分作用素による微分方程式であり、その Dirac 作用素は $Spin^c$-構造 に関連して Clifford 代数を用いて定義されることを見ていく。その Dirac 作用素については、Atiyah-Singer Index 定理という強力な定理が知られており、今後の論理展開で様々な形で活用していくことになる。

2.1　$\boldsymbol{Spin}, \boldsymbol{Spin^c}$ 群 ($Spin, Spin^c$ group)

定義 2.1 集合

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$$

は行列の和と積によって体となる。この体を**四元数体** (Quaternions) と呼ぶ。 □

四元数 $\mathbb{H}$ を 4 次元実ベクトル空間と見なしたものを V とする。任意の $Q \in V$ は 2×2 複素行列として $Q = \begin{pmatrix} t+iz & -x+iy \\ x+iy & t-iz \end{pmatrix}$ $(t, x, y, z \in \mathbb{R})$ と表されるので、$\mathbb{R}$ 上の基底として

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

をとることができる。このとき、$Q = t\mathbf{1} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ と表される。以降 Q をこの基底で $\mathbb{R}^4$ の元と考えたものを $\hat{Q}$ と表記することとする。例えば、$Q = t\mathbf{1} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ であれば $\hat{Q} = (t, x, y, z)$ である。

また、$\mathbf{1}$,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$を正規直交基底として、V に内積を入れて $\langle\ ,\ \rangle$ と表す。Q に対して、

$$\det Q = (t+iz)(t-iz) - (-x+iy)(x+iy) = t^2 + z^2 + x^2 + z^2 = \langle Q, Q \rangle$$

となるから $\det$ は Q の大きさの 2 乗を与える。

定義 2.2 Lie 群 $SU(2) \times SU(2)$ を 4 次 ***Spin* 群**($Spin$ group) と呼び、$Spin(4)$と表す。積は群の直積として定義する。 □

$Spin(4)$は 2 つの $SU(2)$ の直積であるが、第 1 成分を $SU_+(2)$, 第 2 成分を $SU_-(2)$ とし、$SU_+(2), SU_-(2)$ の元をそれぞれ A_+, A_- と表すことで区別する。この表記によって、$Spin(4)$の元を、$(A_+, A_-) \in SU_+(2) \times SU_-(2)$ や、$\left(\begin{smallmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{smallmatrix}\right)$ と表す。

定義 2.3 $Spin^c(4) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} : A_\pm \in SU_\pm(2), \lambda \in U(1) \right\}$ を４次***Spin***$^{\boldsymbol{c}}$**群**($Spin^c$ group) という。 □

上の定義による λ, A_+, A_- は$Spin^c(4)$の元 (X, Y) を１つ定めたときに一意的には定まらない。実際、$(X, Y) = (\lambda A_+, \lambda A_-)$ と表せたとすると、$-\lambda \in U(1), -A_\pm \in SU(2)$ をとれば $(-\lambda(-A_+), -\lambda(-A_-)) = (\lambda A_+, \lambda A_-)$ となり同じ (X, Y) を表すことになる。逆に、$(\lambda A_+, \lambda A_-) = (\lambda' A'_+, \lambda' A'_-)$ とすると、$\lambda A_+ = \lambda' A'_+$ から $A_+ {A'_+}^{-1} = \lambda^{-1}\lambda' I$ が成り立ち、$\lambda^{-1}\lambda' I \in SU(2)$ が得られる。よって $\lambda^{-1}\lambda' = \pm 1$ となり $\lambda = \pm\lambda'$ となる。つまり、$Spin^c(4)$の元 (X, Y) の表し方は $(\lambda A_+, \lambda A_-), (-\lambda(-A_+), -\lambda(-A_-))$ の２通りに限られる。従って、$Spin^c(4) \cong U(1) \times Spin(4)/\pm 1$ と考えられる。

$Spin(4)$,$Spin^c(4)$は Lie 群となるが、その Lie 環をそれぞれ $spin(4)$, $spin^c(4)$ と表すことにする。またこれ以降 Lie 群 $SO(n), SU(n)$ などの Lie 環をそれぞれ小文字で $so(n), su(n)$ などの様に表すことにする。

$Spin(4)$,$Spin^c(4)$には豊富な表現が存在して、それらにより多様体上の各種のベクトル束や接続の関係性を見ることができるようになる。

命題 2.4 $V = \mathbb{H}$ を実４次元ベクトル空間、$W_+, W_- = \mathbb{C}^2$ として次の表現が存在する。

$$\rho : Spin(4) \to SO(V) \quad , \quad \rho(A_+, A_-)(Q) = A_- Q A_+^{-1} \tag{2.2}$$

$$\rho^c : Spin^c(4) \to SO(V) \quad , \quad \rho^c(\lambda A_+, \lambda A_-)(Q) = (\lambda A_-)Q(\lambda A_+)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\rho_\pm : Spin(4) \to U(W_\pm) \quad , \quad \rho_\pm(A_+, A_-)(w_\pm) = A_\pm w_\pm \tag{2.4}$$

$$\rho^c_\pm : Spin^c(4) \to U(W_\pm) \quad , \quad \rho^c_\pm(\lambda A_+, \lambda A_-)(w_\pm) = \lambda A_\pm w_\pm \tag{2.5}$$

ただし、$Q \in V,\ w_\pm \in W_\pm$である。

証明　ρ が準同型であることは、

$$\rho(A_+, A_-)\rho(A'_+, A'_-)(Q) = A_-(A'_- Q {A'_+}^{-1})A_+^{-1} = (A_- A'_-)Q(A_+ A'_+)^{-1} = \rho(A_+ A'_+, A_- A'_-)(Q)$$

より分かる。他についても同様に準同型であることが分かる。

(2.2) において、$\mathrm{Im}\ \rho \subset SO(V)$ になるのは、$\det A_\pm = 1$ より任意の $Q \in V$ に対して、

$$\langle \rho(A_+, A_-)(Q), \rho(A_+, A_-)(Q) \rangle = \det(\rho(A_+, A_-)(Q)) = \det A_- Q A_+^{-1} = \det Q = \langle Q, Q \rangle$$

で内積を変えないことから示される。(2.3) においても同様に $\mathrm{Im}\ \rho \subset SO(V)$ が示される。

(2.4)(2.5) については、$A_\pm \in SU(2), \lambda A_\pm \in U(2)$ より, $\mathrm{Im}\ \rho_\pm \subset U(W_\pm),\ \mathrm{Im}\ \rho^c_\pm \subset U(W_\pm)$ は明らか。 ■

表現 ρ と ρ^c は次の命題から、表現 $\rho_\pm$ と $\rho^c_\pm$ により $\rho \otimes \mathbb{C} \cong \rho_+^* \otimes \rho_-$, $\rho^c \otimes \mathbb{C} \cong {\rho_+^c}^* \otimes \rho_-^c$ と表されることが分かる。

命題 2.5 $Spin(4)$,$Spin^c(4)$の表現空間としてそれぞれ同型 $V \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}(W_+, W_-)$ と $V \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L)$ が成り立つ。

証明　$F : V \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(W_+, W_-)$ を、$\hat{Q} = (t, x, y, z) \in V \otimes \mathbb{C}$ $(t, x, y, z \in \mathbb{C})$ に対して、

$$F(\hat{Q}) = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(W_+, W_-)$$

で定義すると複素ベクトル空間として同型写像となる。

$W_\pm$ 上の表現 $\rho_\pm$ から決まる $\mathrm{Hom}(W_+, W_-)$ の表現 ρ' 及び $W_\pm \otimes L$ 上の表現 $\rho^c_\pm$ から決まる $\mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L)$ の表現 $\rho^{c\prime}$ は

$$\begin{aligned}
\rho' \quad &: \quad Spin(4) \to GL(\mathrm{Hom}(W_+, W_-)), \\
&\quad\ \ \rho'(A_+, A_-)(M) = \rho_-(A_+, A_-) M \rho_+(A_+, A_-)^{-1} = A_- M A_+^{-1} \\
\rho^{c\prime} \quad &: \quad Spin^c(4) \to GL(\mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L)), \\
&\quad\ \ \rho^{c\prime}(\lambda A_+, \lambda A_-)(M) = \rho_-(\lambda A_+, \lambda A_-) M \rho_+(\lambda A_+, \lambda A_-)^{-1} = (\lambda A_-) M (\lambda A_+)^{-1}
\end{aligned}$$

である。

一方 $Q \in V \otimes \mathbb{C}$ に対して、$F(Q) = M$ とすると、

$$\begin{aligned}
\rho(A_+, A_-)Q &= A_- Q A_+^{-1} = F^{-1}(A_- F(Q) A_+^{-1}) = F^{-1}\rho'(A_+, A_-)F(Q) \\
\rho^c(\lambda A_+, \lambda A_-)Q &= (\lambda A_-) Q (\lambda A_+)^{-1} = F^{-1}((\lambda A_-) F(Q) (\lambda A_+)^{-1}) = F^{-1}\rho^{c\prime}(\lambda A_+, \lambda A_-)F(Q)
\end{aligned}$$

となり表現空間として同型である。 ∎

上の命題以外にも$Spin^c(4)$は群準同型として、

$$\pi : Spin^c(4) \to U(1), \quad \pi(\lambda A_+, \lambda A_-) = \det(\lambda A_\pm) = \lambda^2 \tag{2.6}$$

を持つ。

$Spin(4)$の構造としては次が示せる。

命題 2.6 $Spin(4)$は ρ により $SO(4)$ の 2 重被覆となる。

証明　まず$Spin(4)$の単位元において $d\rho : spin(4) \to so(4)$ を計算する。$Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ なので $spin(4) = su(2) \oplus su(2)$ であるから、$su(2) \oplus su(2)$ の基底が $d\rho$ で移る先を求めればよい。$su(2)$ はトレースが 0 の 2 次歪 Hermit 行列全体なので、$\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ が $\mathbb{R}$ 上の基底としてとれる。

まず $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の $d\rho$ による像を考える。$\rho \exp tX = \exp t(d\rho X)$ が成り立つことを利用する。

$$\exp t \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

より、$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi \end{smallmatrix}\right)$ と置くと、

$$\rho(\exp t(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)))Q \quad = \quad \rho(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Q \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-it}(a+bi) & \# \\ e^{-it}(c+di) & \# \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、$\hat{Q} = (a, b, c, d)$ の表示で考えれば

$$\begin{pmatrix} e^{-it}(a+bi) & \# \\ e^{-it}(c+di) & \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(-t) - b\sin(-t) + i(a\sin(-t) + b\cos(-t)) & \# \\ c\cos(-t) - d\sin(-t) + i(c\sin(-t) + d\cos(-t)) & \# \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\rho(\exp t(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)))\hat{Q} = \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) & 0 & 0 \\ \sin(-t) & \cos(-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(-t) & -\sin(-t) \\ 0 & 0 & \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \left(\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

よって、

$$d\rho(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。同様の計算により

$X \in su(2) \oplus su(2)$	$(A, A') = \exp tX \in Spin(4)$	$\rho(A, A') \in SO(4)$	$d\rho X \in so(4)$
$\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$	$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$	$(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix})$	$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$(\left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$	$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & \sin t \\ \sin t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right))$	$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$(\left(\begin{smallmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$	$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 & \sin t \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ -\sin t & 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right))$	$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ \sin t & 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって $su(2) \times su(2)$ の基底の $d\rho$ による像が歪対称行列 so(4) を生成するので $d\rho$ は同型となる。したがって ρ は$Spin(4)$の単位元の近傍で同型となる。$SO(4)$ の任意の元 X に対してある $x \in spin(4)$ がとれて $X = \exp tx$ と表される。このとき任意に大きな自然数 n に対して $X = (\exp \frac{t}{n}x)^n$ と表される。単位元の近傍で同型であるから、十分大きな n に対して $\frac{t}{n}x = d\rho a$ なる $a \in spin(4)$ がとれて $A = (\exp a)^n$ は $X = \rho A$ を満たす。よって ρ は全射である。

ここで $\ker \rho$ を求める。任意の $Q \in V$ に対して $\rho(A, A')Q = Q$ となる (A, A') を求めればよいのであるが、成分を計算する事で

$$\ker \rho = \{(I, I), (-I, -I)\}$$

であることがわかる。ただし I は $SU(2)$ の単位元である。

よって題意が示された。 ∎

この命題からただちに次の系が得られる。

系 2.7 $Spin(4)$と$Spin^c(4)$の Lie 環はそれぞれ、$so(4)$ と $so(4) \oplus (i\mathbb{R})$ に同型。ただし、$so(4)$ は 4 次歪対称行列 (skew-symmetric matrix)。

証明　定理 2.6 より、$Spin(4)$と $SO(4)$ は原点の近傍において同型であり、原点での Lie 環は同型になる。また、局所的には $Spin^c(4) = Spin(4) \times U(1)$ となり、Lie 環は、$Spin(4)$と U(1) の Lie 環の直和と同型となる。 ∎

以降この論文では、この系の同型により、それぞれの Lie 環を同一視する。

2.2　クリフォード 代数 (Clifford algebras)

定義 2.8 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in M_4(\mathbb{C})$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。この e_1, e_2, e_3, e_4が行列の和と積と複素数倍で生成する代数を４次の**クリフォード 代数** (Clifford algebra) という。またその積を**クリフォード 積**と言い、$\cdot$ で表す。Clifford 代数においては、

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} -1 & (i = j) \\ -e_j \cdot e_i & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.7}$$

なる関係が成り立つ。 □

$e_1, e_2, e_3, e_4 \in M_4(\mathbb{C})$ は関係式 (2.7) を満たし $M_4(\mathbb{C})$ を algebra として生成する。このとき (2.7) は e_1, e_2, e_3, e_4 の基本関係式となっている。([10] 参照)

この Clifford 代数を $W = W_+ \oplus W_-$ なる複素４次元ベクトル空間に対して、$M_4(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}(W)$と見なして $\mathrm{End}(W)$と表す。よって $\mathrm{End}(W)$は $M_4(\mathbb{C})$ と同じ 16 次元となる。実際、$\mathrm{End}(W)$ は e_1, e_2, e_3, e_4 から異なる p 個 $(p = 0, 1, 2, 3, 4)$ を選んで順に積をとった $\{e_{i_1} \cdot \ \ldots\ \cdot e_{i_p}\}_{\substack{0 \le p \le 4 \\ i_1 < \cdots < i_p}}$ が基底となることからも計算される。(ただし、0 個の元の積を 1 とする。)

2.1 節で定義したように四元数体 $\mathbb{H}$ を４次元実ベクトル空間と見なしたものを V とする。線形写像

$$\theta : V \to M_4(\mathbb{C}), \quad \theta(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

により V の基底 (2.1) が

$$\theta(\mathbf{1}) = e_1, \theta(\boldsymbol{i}) = e_3, \theta(\boldsymbol{j}) = e_4, \theta(\boldsymbol{k}) = e_2$$

なる対応で e_1, e_2, e_3, e_4 に移るので、$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ が生成する実 4 次元ベクトル空間を V と同一視する。さらに p を１つ固定して基底 $\{e_{i_1} \cdot\ \cdots\ \cdot e_{i_p}\}_{i_1 < \cdots < i_p}$ で生成される $\mathrm{End}(W)$の部分空間は $\{e_i\}$ が (2.7) の第２式を満たすことから基底をそれぞれ $e_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge e_{i_p}$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ に対応させることで $\wedge^p V \otimes \mathbb{C}$ と同一視することができる。よって

$$\mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C} \tag{2.9}$$

と同一視されることになる。

この分解に対して、Clifford 積は内部積作用素 (interior product)

$$i(a) : \wedge^p V \to \wedge^{p-1} V, \quad i(a)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) = \sum (-1)^{j-1} \langle a, a_j \rangle a_1 \wedge \cdots \hat{a_j} \cdots \wedge a_p \quad (a, a_i \in V)$$

を用いて次のように表される。

命題 2.9 $\sum_{i=0}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ における $e_i \in V$ と $\omega \in \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ の Clifford 積は、外積と内部積により

$$e_i \cdot \omega = e_i \wedge \omega - i(e_i)\omega$$

と見なすことができる。

証明　Clifford 積、外積、内部積はすべて (双) 線形であるから $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ について証明すればよい。つまり

$$e_i \cdot (e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e_{i_p}) = e_i \wedge (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) + i(e_i)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \tag{2.10}$$

が成り立てばよい。
(i) 任意の i_j について $e_i \neq e_{i_j}$ が成り立つ場合

$$\begin{aligned} e_i \cdot (e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e_{i_p}) &= e_i \cdot e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e_{i_p} \\ e_i \wedge (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) + i(e_i)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) &= e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} + \sum (-1)^j \big\langle e_i, e_{i_j} \big\rangle e_{i_1} \wedge \cdots \hat{e_{i_j}} \cdots \wedge e_{i_p} \\ &= e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} + 0 \quad (\because \ e_i \neq e_{i_j} \text{より} \big\langle e_i, e_{i_j} \big\rangle = 0) \end{aligned}$$

よって (2.10) が成り立つ。
(ii) ある i_j について $e_i = e_{i_j}$ が成り立つ場合

$$\begin{aligned} e_i \cdot (e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e_{i_p}) &= (-1)^{j-1} e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e_i \cdot e_{i_j} \cdot \ \cdots \cdot e_{i_p} \\ &= -(-1)^{j-1} e_{i_1} \cdot \ \ldots \ \hat{e_{i_j}} \cdots \cdot e_{i_p} \\ e_i \wedge (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) + i(e_i)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) &= e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} + \sum (-1)^j \big\langle e_i, e_{i_j} \big\rangle e_{i_1} \wedge \cdots \hat{e_{i_j}} \cdots \wedge e_{i_p} \\ &= 0 + (-1)^j e_{i_1} \wedge \cdots \hat{e_i} \cdots \wedge e_{i_p} \end{aligned}$$

よって (2.10) が成り立つ。 ∎

$\wedge^2 V$ にはホッジ作用素による分解 $\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V$ があったので、$\wedge^2_+ V$ と $\wedge^2_- V$ の基底 (1.14) を Clifford 代数の元として表せば、

$$e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 \cdot e_3 + e_4 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 \cdot e_4 + e_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$e_1 \cdot e_2 - e_3 \cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, e_1 \cdot e_3 - e_4 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, e_1 \cdot e_4 - e_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

となる。

また e_i の行列表示の成分の形より、各 e_i は $W_\pm$ を $W_\mp$ に写し、Clifford 積は行列の積であったから次の命題が成り立つ。

命題 2.10 $A \in \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ なる $\mathrm{End}(W)$の要素は、W_+, W_-を

$$A : W_\pm \to W_\pm \ (i : 偶数)$$
$$A : W_\pm \to W_\mp \ (i : 奇数)$$

に移す。(すべて複号同順) □

$Spin(4)$と $Spin^c(4)$は、次のように $\mathrm{End}(W)$に作用する。

定義 2.11 $Spin(4)$,$Spin^c(4)$の**共役表現** (adjoint representation) とは、

$$Ad : Spin(4) \to GL(\mathrm{End}(W)), \qquad Ad\begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}(T) = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix}$$
$$Ad^c : Spin^c(4) \to GL(\mathrm{End}(W)), \qquad Ad^c\begin{pmatrix} \lambda A+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix}(T) = \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} (\lambda A_+)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda A_-)^{-1} \end{pmatrix}$$

で定義されるものである。Ad, Ad^c は $\mathrm{End}(W^\pm)$ を不変にする。 □

この共役表現と (2.2) の ρ, ρ^c についても次のような関係がある。

命題 2.12 $Spin(4)$および$Spin^c(4)$の表現空間として $\mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^4 \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ なる同型が成り立つ。

証明 $\sum_{i=0}^4 \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ を $\wedge V$ と表す。(2.8) で定義された θ によって、$\mathrm{End}(W)$を生成する e_i と対応する V の元を Q_i とおく、つまり $\theta(Q_i) = e_i$ とする。Q_i は V の基底であるから、$Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq 4)$ が $\wedge V$ の基底となる。$\wedge V$ と $\mathrm{End}(W)$は、

$$\Theta(\sum a_{i_1 \dots i_k} Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k}) = \sum a_{i_1 \dots i_k} \theta(Q_{i_1}) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta(Q_{i_k}) = \sum a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \cdot \ \cdots \ \cdot e_{i_k}$$

で定義される $\Theta : \wedge V \to \mathrm{End}(W)$ によりベクトル空間として同型となる。
V 上の表現 ρ から決まる $\wedge V$ の表現 $\wedge\rho : Spin(4) \to GL(\wedge V)$ は、$\wedge V$ の基底に対して

$$\wedge\rho(A_+, A_-)(Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k}) = \rho(A_+, A_-)Q_{i_1} \wedge \cdots \ \wedge \rho(A_+, A_-)Q_{i_k}$$

を満たすものである。
ここで、$\theta(\rho(A_+, A_-)Q_i)$ を計算しておくと、

$$\begin{aligned}
\theta(\rho(A_+, A_-)Q_i) &= \theta(A_- Q_i (A_+^{-1})) = \begin{pmatrix} 0 & -(A_- Q_i (A_+^{-1}))^* \\ A_- Q_i (A_+^{-1}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(A_+^{-1})^* Q_i^* A_-^* \\ A_- Q_i (A_+)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -A_+ Q_i^* (A_-^{-1}) \\ A_- Q_i (A_+^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\because A_\pm \in SU(2) \text{ より } A_\pm^* = A_\pm^{-1}) \\
&= \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Q_i^* \\ Q_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} e_i \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} = Ad(A_+, A_-)e_i
\end{aligned}$$

となる。

これより、End(W)における Clifford 積が行列の積であることと、$\begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} = I$ であることから、$\wedge V$ の基底 $Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k}$ について

$$
\begin{aligned}
\Theta(\wedge\rho(A_+, A_-)(Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k})) &= \theta(\rho(A_+, A_-)(Q_{i_1}) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta(\rho(A_+, A_-)(Q_{i_k}) \\
&= \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} e_{i_1} \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} \cdot \ \cdots \ \cdot \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} e_{i_k} \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} e_{i_1} \cdot \ \cdots \ \cdot e_{i_k} \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} \\
&= ad(A_+, A_-)(e_{i_1} \cdot \ \cdots \ \cdot e_{i_k}) \\
&= ad(A_+, A_-)(\Theta(Q_{i_1} \wedge \cdots \wedge Q_{i_k}))
\end{aligned}
$$

となり$Spin(4)$の表現空間としての同型が示せた。

$Spin^c(4)$についても $\wedge\rho$ に倣って $\wedge\rho^c$ を定義することで同様に示すことができる。 ∎

2.3 $\boldsymbol{Spin}, \boldsymbol{Spin^c}$-構造 ($Spin, Spin^c$-structure)

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を向き付けられた４次元 Riemann 多様体とする。接ベクトル束 TM の構造群は、Riemann 計量により $SO(4)$ となる。つまり、M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対し、各U_αで局所標構場 $\{(e_i)_\alpha\}$ を任意の点 $p \in U_\alpha$ で $\{(e_i)_\alpha(p)\}$ が Riemann 計量により正規直交基底となるようにとることができる。このような局所標構場を**正規直交枠** (orthonormal frame) と呼ぶ。これにより変換関数系が

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(4)$$

となるように取れるのである。

定義 2.13 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ における、$\boldsymbol{Spin}$**-構造** ($Spin$-structure) とは、
M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と、写像 $\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(4)$ で

$$\rho \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \quad \text{かつ} \quad \tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} = \tilde{g}_{\alpha\gamma} \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

を満たす変換関数系 との組 $(\{U_\alpha\}, \{\tilde{g}_{\alpha\beta}\})$ のことである。
$Spin$ 構造を持つ多様体 M を $\boldsymbol{Spin}$**-多様体**と呼ぶ。 □

定義 2.14 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ における、$\boldsymbol{Spin^c}$**-構造** ($Spin^c$-strucure) とは、
$\{U_\alpha\} : M$ の開被覆と、写像 $\hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin^c(4)$ で

$$\rho^c \circ \hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \quad \text{かつ} \quad \hat{g}_{\alpha\beta}\hat{g}_{\beta\gamma} = \hat{g}_{\alpha\gamma} \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

を満たす変換関数系 との組 $(\{U_\alpha\}, \{\hat{g}_{\alpha\beta}\})$ のことである。 □

一般に $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ が$Spin$-構造 を持つとは限らないが、w_2 を２次スティフェルーホイットニー類 (Stiefel–Whitney class) として「M が$Spin$-構造 を持つ $\Leftrightarrow w_2(TM) = 0$」が成り立つことが知られている ([10]II.Theorem 1.7)。また Hirzebruch と Hopf により任意の４次元コンパクト Riemann 多様体は$Spin^c$-構造 を持つことが示されている。

$Spin(4)$や$Spin^c(4)$は、(2.2)〜(2.6) のように多様な表現を持つので、$Spin$-構造 から表現に応じた、ベクトル束 を構成することができる。

定義 2.15 $Spin$-構造 $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ に対して、

$$\rho_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SU(2)_+, \quad \rho_- \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SU(2)_-$$

を変換関数 として、M 上の 2 次元複素ベクトル束が構成される。これをそれぞれ、W_+, W_- と呼ぶ。
$\square$

$Spin^c$-構造 $\{\hat{g}_{\alpha\beta}\}$ に対しても同様に、

$$\rho^c_+ \circ \hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(2), \quad \rho^c_- \circ \hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(2) \tag{2.13}$$

を変換関数 として 2 次元複素ベクトル束が構成され、これらを仮に W'_+, W'_- と呼ぶことにする。もし M が $Spin$ 多様体で$Spin$-構造 $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ を持ち、さらに変換関数系 $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(1)$ がとれて、

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{2.14}$$

と分解できるとする。このとき W'_+, W'_- は、$\tilde{g}_{\alpha\beta}$ から構成される複素 2 次ベクトル束 W_+, W_- と $h_{\alpha\beta}$ から構成される複素直線束 L によって、$W_+ \otimes L,\ W_- \otimes L$ と同型となる。一般に、いつも $h_{\alpha\beta}$ が取れてこのような L が存在するとは限らないが、存在しない場合も含めて上のベクトル束 W'_+, W'_- を形式的に $W_+ \otimes L,\ W_- \otimes L$ と表すことにする。さらにベクトル束 $W, W \otimes L$ を

$$W = W_+ \oplus W_-, \quad W \otimes L = (W_+ \otimes L) \oplus (W_- \otimes L)$$

で定義する。

ここで定義したベクトル束 $W_+, W_-, W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ を物理との関係から総じて (それぞれ正、負のカイラリティー (chirality) をもつ) **スピノル束** (spinor bundle) と呼び、またスピノル束の切断を、**スピノル場** (spinor fields) と呼ぶ。Seiberg–Witten 方程式の未知変数の 1 つがこの正のカイラリティーを持つスピノル場である。

$W_+ \otimes L,\ W_- \otimes L$ は常に**普通のベクトル束** (bonafide vector bundle) として存在するが、$W_+,\ W_-,\ L$ は M が $Spin$ 多様体でないと存在しない。このような事態は

$$U(1) \times SU(2) \to U(2), \quad (\lambda, A) \to \lambda A$$

なる写像が単射でないために (2.14) のような分解が常にとれるとは限らないことによる。しかし、$X \in U(2)$ に対して $X = \lambda A$ となる分解は $(\lambda, A), (-\lambda, -A)$ の 2 通りしかないので、

$$\begin{aligned} h'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(1) \qquad &\text{s.t.} \quad h'_{\alpha\beta}h'_{\beta\gamma} = \pm h'_{\alpha\gamma} \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \\ \hat{g}'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SU(2) \qquad &\text{s.t.} \quad \hat{g}'_{\alpha\beta}\hat{g}'_{\beta\gamma} = \pm \hat{g}'_{\alpha\gamma} \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \end{aligned}$$

という正負の符号の曖昧さ (ambiguity) を残した cyclic condition を満たす $U(1)$ や $SU(2)$ に値をもつ “変換関数系” がとれる。このような状況が

$$U(1) \times Spin(4) \to Spin^c(4), \quad U(1) \times SU(2) \to U(2)$$

の 2 重被覆について起こる。これらの “変換関数系” はベクトル束にはならないが**バーチャル ベクトル束** (virtual vector bundle) と呼ばれる。

バーチャル ベクトル束 E の変換関数系は正負の曖昧さしか持っていないので、$E \otimes E$ は常に通常のベクトル束となる。例えば、$Spin^c$-構造 の値 $(\lambda A_+, \lambda A_-)$ に対して、λ を変換関数 とする L は、一般にはバーチャル になるが、(2.6) により、

$$\pi \circ \hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(1), \quad \pi(\lambda A_+, \lambda A_-) = \det(\lambda A_\pm) = \lambda^2 \tag{2.15}$$

を変換関数 とする複素直線束は常に普通のベクトル束として構成できる。このベクトル束を L との関連で、$L \otimes L$ と見なせることから、L^2 と表す。

バーチャルベクトル束に対しても曲率,Chern 類などを定義しておく。もし複素直線束 L が普通のベクトル束でその接続と曲率がそれぞれ d_A, Ω_A で与えられているとする。このとき L^2 に接続が $d_{2A} = d_A \otimes I + I \otimes d_A$ で与えられる。また命題 1.17 の証明にあるように L^2 の曲率は $\Omega_{2A} = 2\Omega_A$ となる。これにより自然に次を定義する。

定義 2.16 バーチャルベクトル束 L に対して、複素直線束 L^2 に接続 d_{2A} が与えられているとする。このとき L の曲率 Ω_A を次の式で定義する。

$$\Omega_A = \frac{1}{2}\Omega_{2A}$$

ただし Ω_{2A} は d_{2A} から得られる L^2 の曲率である。また $F_A = \frac{i}{2}\Omega_{2A}$ とおく。 □

さらに (1.11) より複素直線束の Chern 類が定義されることから、バーチャルベクトル束 L の Chern 類も同様に定義する。

定義 2.17 バーチャルベクトル束 L の第 1 Chern 類 $c_1(L)$ を次の式で定義する。

$$c_1(L) = \left[\frac{1}{2\pi}F_A\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}F_{2A}\right] = \frac{1}{2}c_1(L^2)$$

□

普通の直線束 L においては $c_1(L) \in H^2(M;\mathbb{Z})$ となるが、L がバーチャルのときはその限りではない。ただし $2c_1(L) \in H^2(M;\mathbb{Z})$ は成り立つ。

また E を M 上の任意の $SU(2)$-束とすると、$c_1(E) = 0$ が成り立ち、Chern 指標 が $ch(E) = 2 - c_2(E)$ となる。よって、

$$ch(E \otimes E) = 4 - c_2(E \otimes E) + \cdots = ch(E)^2 = 4 - 4c_2(E) + c_2(E)^2$$

となり、特に $c_2(E \otimes E) = 4c_2(E)$ である。

定義 2.18 バーチャル $SU(2)$-束 E の第 2 Chern 類 $c_2(E)$ を次の式で定義する。

$$c_2(E) = \frac{1}{4}c_2(E \otimes E)$$

□

これらの定義により、$W \otimes L$ などの曲率や Chern 類を計算する際 L がバーチャルであるかどうかに関わらず L の曲率や Chern 類を使うことができる。また後の Atiyah-Singer Index 定理などの Chern 類に関する定理がバーチャルベクトル束についても成り立つことになる。

この節で定義した L^2 と $W_+ \otimes L$ については次のような関係が成り立つ。

命題 2.19 $L^2 \cong \wedge^2(W_+ \otimes L)$

証明 $Spin^c$-構造 $(\{U_\alpha\}, \{\hat{g}_{\alpha\beta}\})$ でU_αを１つ定める。U_αにおいて $W_+ \otimes L$ の正規直交枠 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ をとると、$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$が$U_\alpha$の各点で $\wedge^2\,(W_+ \otimes L)$ のファイバーの基底となる。$U_\alpha \cap U_\beta$ の任意の点 p において $\hat{g}_{\alpha\beta}(p) = (\lambda A_+, \lambda A_-) \in Spin^c(4)$ と置くとき、$\wedge^2(W_+ \otimes L)$ での変換関数 の作用を計算すると、

$$\rho_+(\lambda A_+, \lambda A_-)(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) = \rho_+\varepsilon_1 \wedge \rho_+\varepsilon_2 = \lambda A_+\varepsilon_1 \wedge \lambda A_+\varepsilon_2 = \lambda^2(A_+\varepsilon_1 \wedge A_+\varepsilon_2) = \lambda^2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)$$

となり、L^2 の変換関数 と一致するので、$L^2 \cong \wedge^2(W_+ \otimes L)$ ∎

またスピノル束と接ベクトル束との間にも密接な関係が見出される。$TM \otimes \mathbb{C}$は、$\{g_{\alpha\beta}\}$ を変換関数系としていたので、$\{\rho \circ \tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ または $\{\rho^c \circ \hat{g}_{\alpha\beta}\}$ を変換関数系 としたベクトル束と言える。命題 2.5 により、これは $\rho' \circ \tilde{g}_{\alpha\beta}$及び$\rho^{c\prime} \circ \hat{g}_{\alpha\beta}$ なる変換関数 と見なせて、

$$TM \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}(W_+, W_-)$$
$$TM \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L)$$

なる束同型が示される。この様に TM の複素化は W_+, W_- または $W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ によって表されることが分かる。

次に定義 (2.11) により$Spin(4)$,$Spin^c(4)$が $\mathrm{End}(W)$に作用していたので、$Spin$-構造 ,$Spin^c$-構造から次のベクトル束が構成できる。

定義 2.20 $Spin$-構造 $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ または$Spin^c$-構造 $\{\hat{g}_{\alpha\beta}\}$ に対して、それぞれ

$$Ad \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathrm{End}(W)), \quad Ad^c \circ \hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathrm{End}(W))$$

を変換関数 として、$\mathrm{End}(W)$をファイバーとする M 上の複素 16 次元ベクトル束が構成される。これらをともに**クリフォード 束** (Clifford bundle) と呼び $\mathrm{End}(W)$ と表す。 □

ここで、M が$Spin$-構造 を持つとき、任意に $\psi \in \Gamma(W), Q \in \Gamma(\mathrm{End}(W))$ をとる。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$であるような M 上の開集合 U_α, U_β における ψ の局所表現を ψ_α, ψ_β、Q の局所表現を Q_α, Q_β とそれぞれ表すことにする。このとき、

$$Q_\alpha = Ad \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} Q_\beta, \quad \psi_\alpha = ((\rho^+ \oplus \rho^-) \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta$$

が成り立つ。$\tilde{g}_{\alpha\beta} = (A_+, A_-) \in Spin(4)$ とすると、

$$\begin{aligned} Q_\alpha\psi_\alpha &= (Ad \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} Q_\beta)((\rho^+ \oplus \rho^-) \circ \tilde{g}_{\alpha\beta}\psi_\beta) \\ &= \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} Q_\beta \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} \psi_\beta = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} Q_\beta\psi_\beta \\ &= (\rho^+ \oplus \rho^-) \circ \tilde{g}_{\alpha\beta}(Q_\beta\psi_\beta) \end{aligned}$$

が成り立ち、$\mathrm{End}(W)$が W にファイバー毎に自然に作用することが分かる。同様に$Spin^c$-構造 を持つ M においても $\mathrm{End}(W)$が $W \otimes L$ にファイバー毎に作用することを示すことができる。

このことと、$\mathrm{End}(W), \mathrm{Hom}(W, W), \mathrm{Hom}(W \otimes L, W \otimes L)$ が全て同じ複素 16 次元であることから、$\mathrm{End}(W)$と $\mathrm{Hom}(W, W)$、あるいは $\mathrm{End}(W)$と $\mathrm{Hom}(W \otimes L, W \otimes L)$ はファイバー毎に同型となる。

つまり Clifford 束の記号 End(W)はベクトル束 W や $W \otimes L$ から構成される Hom バンドルに関して、

$$\mathrm{End}(W) = \mathrm{Hom}(W, W) \text{ または、} \mathrm{End}(W) = \mathrm{Hom}(W \otimes L, W \otimes L)$$

という意味も含んでいるのである。

この Clifford 束 End(W)はファイバーごとに (2.9) で分解されるが定理 2.12 より Ad と $\wedge \rho$, Ad^c と $\wedge \rho^c$ が表現として同型なのでベクトル束としても

$$\mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^{4} \wedge^i TM \otimes \mathbb{C} \tag{2.16}$$

と分解できる。Clifford 束はスピノル束 W にファイバー毎に作用したので、この分解により $\wedge^k TM \otimes \mathbb{C}$ のスピノル束へのファイバー毎の作用が得られる。また Riemann 計量により TM と T^*M を同一視できるので $\wedge^k T^*M \otimes \mathbb{C}$ もスピノル束に作用すると考えることができる。つまり k 次微分形式もスピノル場に作用するのである。これらの作用も Clifford 積と呼び、$\cdot$ で表すことにする。

例えば、1 次微分形式 α とスピノル場 $\psi \in \Gamma(W)$ に対して $\alpha \cdot \psi$ が定義できるのであるが、TM の正規直交枠 $\{e_i\}$ 及びそれと双対な T^*M の正規直交枠 $\{de_i\}$ をとれば、α は局所的に $\alpha = \sum \langle \alpha, e_i \rangle de_i$ と表すことができるので TM と T^*M の同型により $\alpha = \sum \alpha(e_i) e_i$ と同一視される。よって $\alpha \cdot \psi$ は局所的には

$$\alpha \cdot \psi = \sum_{i=1}^{4} \alpha(e_i) e_i \cdot \psi \tag{2.17}$$

と具体的に表される。

これまで$Spin^c$-構造 から様々なベクトル束が作れてそれらの間に密接な関係があることを見てきた。しかしそれらの議論では$Spin^c$-構造 は与えられているものとしてきた。ここでは 4 次元 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ が概複素構造 (almost complex structure) を持つとき、自然な $Spin^c$-構造 を持つことを具体的に示すことにする。

命題 2.21 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を概複素構造をもった 4 次元 Riemann 多様体で$\langle\ ,\ \rangle$はエルミート内積であるとする。このとき、M は自然な $Spin^c$-構造 を持つ。

証明 TM の構造群は $GL(4,\mathbb{R})$ であるが、概複素構造により $GL(2,\mathbb{C}) \subset GL(4,\mathbb{R})$ に制限される。さらに、$\langle\ ,\ \rangle$ がエルミット内積のとき、さらに U(2) に制限する事ができる。そこで、自然な埋め込みとして、

$$j : U(2) \to Spin^c(4), \quad j(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

を考える。実際 $(\det A)^{-1/2} A \in SU(2)$, $(\det A)^{1/2} \in U(1)$ であり、$\begin{pmatrix} (\det A)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (\det A)^{1/2} \end{pmatrix} \in SU(2)$ より、

$$j(A) = \begin{pmatrix} (\det A)^{1/2} \begin{pmatrix} (\det A)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (\det A)^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (\det A)^{1/2} (\det A)^{-1/2} A \end{pmatrix} \in Spin^c(4)$$

なので well–defind である。

$\rho\circ j(A)\in SO(4)$ であり $A\in U(2)$ であるが $U(2)\subset SO(4)$ と考えて、$\rho\circ j(A)=A$が成り立つことを示す。

$V\cong\mathbb{C}^2$ なる同型を $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\bar\beta\\ \beta & \bar\alpha\end{smallmatrix}\right)$ と (α,β) を対応させることで与え、A と$\rho\circ j(A)$ はいずれも V に作用すると考える。つまり $A\in U(2)$ の $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\bar\beta\\ \beta & \bar\alpha\end{smallmatrix}\right)\in V$ への作用は第 1 列への作用である。

任意の $Q=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\bar\beta\\ \beta & \bar\alpha\end{smallmatrix}\right)\in V$ に対して、

$$(\rho\circ j(A))Q=\rho(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \det A\end{smallmatrix}\right),A)Q=A\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\bar\beta\\ \beta & \bar\alpha\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \det A^{-1}\end{smallmatrix}\right)=A\left(\begin{smallmatrix}\alpha & *\\ \beta & *\end{smallmatrix}\right)$$

したがって $\rho\circ j(A)=A$が示された。

よって、TM の $U(2)$-構造 $\{g_{\alpha\beta}\}$ に対して、$\hat g_{\alpha\beta}=j\circ g_{\alpha\beta}$ とおけば、

$$\hat g_{\alpha\beta}=j\circ g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to Spin^c(4)\quad \text{かつ}\quad \rho\circ\hat g_{\alpha\beta}=\rho\circ j\circ g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$$

となり、$\{\hat g_{\alpha\beta}\}$ が$Spin^c$-構造 となる。 ∎

この命題の $Spin^c$-構造 から構成されるベクトル束 $W_+\otimes L,\ W_-\otimes L$ は、変換関数 がそれぞれ、

$$\rho_+^c\circ j\circ g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \det g_{\alpha\beta}\end{pmatrix}=1\oplus\det g_{\alpha\beta},\quad \rho_-^c\circ j\circ g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}\tag{2.18}$$

より、Θ :自明複素直線束 として、

$$W_+\otimes L\cong\Theta\oplus L^2,\quad W_-\otimes L\cong TM\tag{2.19}$$

となることが言える。

2.4 *Spin*-接続 (*Spin*-connection)

2.3 節で多様体が$Spin^c$-構造 を持てば、その$Spin^c$-構造 から様々なベクトル束が作られることを見た。この節ではそれらのベクトル束上の接続を考えていく。

まず $W=W_+\oplus W_-$ 上の$Spin(4)$-接続を考える。W はU_αにおいて自明となるとき、W の$Spin(4)$-接続 d_A はG-接続の定義 1.3 からU_α上の $spin(4)$ 係数の 1 次微分形式の ϕ_α によって、

$$(d_A\sigma)_\alpha=d\sigma_\alpha+\phi_\alpha\sigma_\alpha$$

なる局所表現を持つ。この局所表現は次のように表す事ができる。

命題 2.22 W はU_αにおいて自明になるとする。W の$Spin(4)$-接続 d_A の局所表現は $\mathrm{End}(W)$の生成元 e_1,e_2,e_3,e_4 と $\phi_{\alpha ij}$ なる 1 次実微分形式によって

$$d_{A\alpha}=d+\sum_{i,j}\phi_{\alpha ij}e_i\cdot e_j\quad \phi_{\alpha ij}=-\phi_{\alpha ji}$$

と表される。また d_A は W_+,W_- 上の接続 d_A^+,d_A^- に $d_A=d_A^+\oplus d_A^-$ と分解される。

証明　U_αにおいて$Spin(4)$-接続は 1 次微分形式係数の $spin(4)$ の元 ϕ_α によって、

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \phi_\alpha\sigma_\alpha$$

と表される。$SU(2)$ の Lie 環を $su(2)$ と表せば $spin(4) = su(2) \oplus su(2)$ と表される。$su(2)$ はトレースが 0 の歪 Hermit 行列全体であるから $spin(4) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 & 0 \\ -b+ci & -ai & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'i & b'+c'i \\ 0 & 0 & -b'+c'i & -a'i \end{pmatrix} \middle| a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R} \right\}$ である。(2.11),(2.12) がそれぞれ上記の $spin(4)$ を生成することから $spin(4)$ は $e_i \cdot e_j$ $(i < j)$ を基底とする。よって

$$\phi_\alpha = \sum_{i,j} \phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j \quad \phi_{\alpha ij} = -\phi_{\alpha ji}$$

と表すことができる。

$spin(4)$ の行列の形から W_+, W_- 上の接続に分解されることは明らかである。 ∎

この命題により、$W \otimes L = (W_+ \otimes L) \oplus (W_- \otimes L)$ 上の$Spin^c(4)$-接続についても次の関係が成り立つ。

系 2.23 $W \otimes L$ はU_αにおいて自明になるとする。$W \otimes L$ の$Spin^c(4)$-接続 d_{A^c} の局所表現は $\mathrm{End}(W)$ の生成元 e_1, e_2, e_3, e_4 と $\phi_{\alpha ij}$および a なる 1 次実微分形式によって

$$d_{A^c\alpha} = d - iaI + \sum_{i,j} \phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j \quad \phi_{\alpha ij} = -\phi_{\alpha ji}\sigma_\alpha$$

と表される。ただし、I は 4 次単位行列である。また d_{A^c} は、$W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ 上の接続 $d^+_{A^c}, d^-_{A^c}$ に $d_{A^c} = d^+_{A^c} \oplus d^-_{A^c}$ と分解される。

証明　$spin^c(4)$ は $spin(4) \oplus u(1)$ と同型である。$spin^c(4)$ の $W \otimes L$ への作用は $spin(4)$ 成分については命題 2.22 の W への作用と同じであり、$u(1)$ 成分については $(\lambda I, \lambda I) \in Spin^c(4)$ の $W \otimes L$ への作用が λ によるスカラー倍であるから $u(1) = i\mathbb{R}$ の作用もやはりスカラー倍である。

よって、d_{A^c} の接続形式は $spin(4)$ 係数、$u(1)$ 係数係数の 1 次微分形式 $\phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j, -ia$ を用いて

$$-iaI + \sum_{i,j} \phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j$$

と表される。

iaI は対角行列であることより、また $\sum_{i,j} \phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j$ は命題 2.22 より、$W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ 上の接続に分解されるので、d_{A^c} も $W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ 上の接続に分解されることは明らか。 ∎

次に $W \otimes L$ の $Spin^c(4)$-接続 d_{A^c} から $\mathrm{End}(W)$及び L^2 の接続が誘導されることを見る。

まず $\mathrm{End}(W) = \mathrm{Hom}(W \otimes L, W \otimes L)$ と見なせたので、$W \otimes L$ の接続から Hom ベクトル束の接続を誘導でき、それを $\mathrm{End}(W)$の接続と見なすことができる。

また系 2.23 で d_{A^c} が $W_+ \otimes L, W_- \otimes L$ の接続 $d^+_{A^c}, d^-_{A^c}$ に分解することを見た。また命題 2.19 により $L^2 \cong \wedge^2(W_+ \otimes L)$ であったので、L^2 の接続 d_{2L} が $d^+_{A^c} \wedge I + I \wedge d^+_{A^c}$ で定義できる。

一方接ベクトル束 TM に接続 d_A が与えられればベクトル束 $\wedge^k TM$ にも接続が構成できた。(2.16) により $\mathrm{End}(W)$は

$$\mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^{4} \wedge^i TM \otimes \mathbb{C}$$

と分解できたので $\wedge^k TM$ の接続から End(W)の接続が構成できる。特に Riemann 幾何の理論から接ベクトル束 TM には **Levi–Civita 接続** と呼ばれる接続が唯一存在することが知られている ([20] 定理 4.7 参照)。TM の Levi–Civita 接続 より構成される End(W)の接続も End(W)の Levi–Civita 接続 と呼ぶことにする。

ここで構成した接続の間で次のような対応がなりたつ。

定理 2.24 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を$Spin^c$-構造 を持つ 4 次元 Riemann 多様体、$W \otimes L, L^2$ を$Spin^c$-構造 から構成される M 上のベクトル束とする。
d_{2A} を L^2 上の任意の接続、d_{LC} を End(W)の Levi–Civita 接続 とする。d_{2A} と d_{LC} を誘導する $W \otimes L$ 上の$Spin^c(4)$-接続が唯一存在する。

証明 $W \otimes L$ 上の$Spin^c(4)$-接続 d_A と、L^2, End(W)の接続の組、(d_{2A}, d_W) が 1 対 1 に対応する事を示す。

局所的に U において、正規直交枠 $\{\varepsilon_i \in \Gamma(W \otimes L)\}_{1 \leq i \leq 4}$ を、$W \otimes L$ の局所自明化写像 ψ によって、

$$\psi \circ \varepsilon_1(p) = \left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \cdots, \psi \circ \varepsilon_4(p) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

となるようにとることができる。

それに対して TM の正規直交枠 $\{e_i \in \Gamma(W)\}_{1 \leq i \leq 4}$ を $\wedge^* TM \cong \mathrm{End}(W)$ の同型で $\mathrm{Hom}(W \otimes L, W \otimes L)$ の切断と見なして、$W \otimes L$ の正規直交枠 $\{\varepsilon_i\}$ を用いた End(W)の局所自明化写像 ψ' によって、

$$\psi' \circ e_1(p) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \cdots, \psi' \circ e_4(p) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

となるようにとる。

系 2.23 により$Spin^c(4)$-接続は実数値 1 次微分形式 a と実数値 1 次微分形式成分の歪対称行列 (ϕ_{ij}) によって

$$(d_A \sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha - iaI\sigma_\alpha + \sum_{i,j} \phi_{ij} e_i \cdot e_j \sigma_\alpha \quad (\phi_{ij} = -\phi_{ji})$$

と表される。

まず d_A と L^2 の接続の対応を見る。

命題 2.19 により $L^2 \cong \wedge^2(W_+ \otimes L)$ が成り立ち、この同一視により L^2 の接続が誘導される。よって $\wedge^2(W_+ \otimes L)$ の定数切断 $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ に対して、

$$\begin{aligned} d_A(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) &= (d_A \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (d_A \varepsilon_2) \\ &= ((-iaI + \sum_{i,j} \phi_{ij} e_i \cdot e_j)\varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge ((-iaI + \sum_{i,j} \phi_{ij} e_i \cdot e_j)\varepsilon_2) \\ &= -2ia(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) + \sum_{i,j} \phi_{ij}((e_i \cdot e_j \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (e_i \cdot e_j \varepsilon_2)) \end{aligned}$$

となる。ここで $(e_i \cdot e_j \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (e_i \cdot e_j \varepsilon_2)$ を計算すると、

(1) $(i,j) \neq (1,2),(3,4)$ の場合
$W_+ \otimes L$ に制限した $e_i \cdot e_j$ の行列表示の形は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である ((2.11) 参照)。よって $e_i \cdot e_j \varepsilon_1 = k\varepsilon_2$, $e_i \cdot e_j \varepsilon_2 = k'\varepsilon_1$ となり

$$(e_i \cdot e_j \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 = k\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 \wedge (e_i \cdot e_j \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \wedge k'\varepsilon_1 = 0$$

が成り立ち $(e_i \cdot e_j \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (e_i \cdot e_j \varepsilon_2) = 0$ である。

(2) $(i,j) = (1,2),(3,4)$ の場合
$W_+ \otimes L$ に制限した $e_1 \cdot e_2, e_3 \cdot e_4$ の行列表示はともに $\left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ となる。よって $e_i \cdot e_j \varepsilon_1 = -i\varepsilon_1$, $e_i \cdot e_j \varepsilon_2 = i\varepsilon_1$ なので、

$$(e_i \cdot e_j \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (e_i \cdot e_j \varepsilon_2) = -i\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge (i\varepsilon_2) = 0$$

これにより

$$d_A(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) = -2ia(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)$$

となり L^2 の $U(1)$-接続 を導く。

次に $\mathrm{End}(W)$ の接続との対応を見る。

(1.5) より $d_A(\alpha(\sigma)) = (d_W\alpha)(\sigma) + \alpha(d_A\sigma)$ が成り立つので、$TM \subset \mathrm{End}(W)$ の基底 e_i に対して

$$\begin{aligned}
(d_W e_k)\varepsilon_\lambda &= d_A(e_k\varepsilon_\lambda) - e_k(d_A\varepsilon_\lambda) \\
&= -iaIe_k\varepsilon_\lambda + \sum_{i,j}\phi_{ij}e_ie_je_k\varepsilon_\lambda - e_k(-iaI\varepsilon_\lambda + \sum_{i,j}\phi_{ij}e_ie_j\varepsilon_\lambda) \\
&= \sum_{i,j}\phi_{ij}(e_ie_je_k - e_ke_ie_j)\varepsilon_\lambda
\end{aligned}$$

$e_ie_je_k - e_ke_ie_j$ は、

$$e_ie_je_k - e_ke_ie_j = \begin{cases}
(-1)e_k - e_k(-1) = 0 & (i = j) \\
e_ie_je_k - (-1)^2e_ie_je_k = 0 & (i \neq j, i \neq k, j \neq k) \\
(-1)e_j(-1) - (-1)e_j = 2e_j & (i \neq j, i = k, j \neq k) \\
e_i(-1) - (-1)(-1)e_i = -2e_i & (i \neq j, i \neq k, j = k)
\end{cases}$$

となり、まとめると、

$$d_We_k = \sum_j \phi_{kj}2e_j + \sum_i \phi_{ik}(-2e_i) = -4\sum_i \phi_{ik}e_i$$

より、$\mathrm{End}(W)$の $SO(4)$-接続 を導く。

逆に、TM の $SO(4)$-接続 d_W と L^2 の $U(1)$-接続 d_{2A} が, $d_We_j = \sum_i w_{ij}e_i$ なる実 1 次微分形式 w_{ij} と a によって、

$$d_W = d + (w_{ij}), \quad d_{2A} = d - 2ia$$

と表されたとすると、上の議論から、

$$d_A = d - iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j$$

が d_{2A}と d_W を誘導することは明らか。よって、接続どうしが 1 対 1 に対応する。

特に d_W として、Levi–Civita 接続 d_{LC} をとれば d_{2A}, d_{LC} に対応する $W \otimes L$ の接続 d_A が唯一定まる。 ∎

上の証明の一部を使うことで、上の定理と同様な次の定理も成り立つ。

定理 2.25 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を$Spin$-構造 を持つ 4 次元 Riemann 多様体、W を$Spin$-構造 から構成される M 上のベクトル束とする。
このとき End(W)の Levi–Civita 接続 d_{LC} を誘導する W 上の$Spin(4)$-接続d_Aが唯一存在する。

証明 U_αにおいて、Levi–Civita 接続 d_{LC} が

$$d_{LC} = d + (w_{ij})$$

と表されるとき、

$$d_A = d - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j$$

で表される W 上の$Spin(4)$-接続が d_{LC} を誘導することが定理 2.25 の議論からわかる。 ∎

これらの定理により得られた接続と、その接続の曲率はスカラー曲率と呼ばれる量と関連することから、次節で Weitzenböck's formula(定理 2.35) を導くことになり、さらには Seiberg–Witten 方程式の解空間が有界であるという重要な性質を示すことになる。

ここで上の定理による接続とその曲率の関係を見ておく。U_αにおいて、定理 2.25 での W の接続 d_A は Levi–Civita 接続 $d_{LC} = d + (w_{ij})$ に対して、$d_A = d - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j$ で与えられた。

定理 2.26 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を$Spin$-構造 を持つ 4 次元 Riemann 多様体、W を$Spin$-構造 から構成される M 上のベクトル束とする。
W の接続 d_A が局所的に

$$d_A = d - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j$$

と表されるとき, その曲率 Ω_A は

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} + \sum_{k=1}^{4} w_{ik} \wedge w_{kj} \in \Gamma(\wedge^2 T^* M \otimes \mathrm{End}(TM))$$

なる Levi–Civita 接続 (w_{ij}) の曲率 Ω_{ij} により、

$$\Omega_A = -\frac{1}{4}\sum_{i,j} \Omega_{ij} e_i \cdot e_j \in \Gamma(\wedge^2 T^* M \otimes \mathrm{End}(W))$$

と表される

証明　U_αにおいて曲率 Ω_A は、

$$\begin{aligned}
\Omega_A\sigma &= \left(d-\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j\right)^2\sigma \\
&= d^2\sigma-\frac{1}{4}d\sum w_{ij}e_i\cdot e_j\sigma-\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j(d\sigma)+(\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j)^2\sigma \\
&= -\frac{1}{4}\sum(dw_{ij})e_i\cdot e_j\sigma+\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j(d\sigma)-\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j(d\sigma)+(\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j)^2\sigma \\
&= -\frac{1}{4}\sum(dw_{ij})e_i\cdot e_j\sigma+(\frac{1}{4}\sum w_{ij}e_i\cdot e_j)^2\sigma \\
&= -\frac{1}{4}\sum(dw_{ij})e_i\cdot e_j\sigma+\frac{1}{16}\sum_{i,j,k,l} w_{ij}\wedge w_{kl}(e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_l)\sigma
\end{aligned}$$

で計算される。$w_{ij}\wedge w_{kl}e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_l$ の項は、

(1)　$i=j$ または $k=l$ の場合 $w_{ii}=0$ または $w_{kk}=0$ より 0

(2)　$i\neq j$ かつ $k\neq l$ の場合

1)　i,j,k,l がすべて異なる数の場合
$w_{ij}\wedge w_{kl}e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_l=(-w_{kl}\wedge w_{ij})(-1)^4e_k\cdot e_l\cdot e_i\cdot e_j$で 2 つずつ項がうち消しあって 0

2)　$j=k$ かつ $i\neq l$ の場合 そのまま

3)　$i=k$ かつ $j\neq l$ の場合 $w_{ij}\wedge w_{il}e_i\cdot e_j\cdot e_i\cdot e_l=-w_{ji}\wedge w_{il}(-e_j\cdot e_i)\cdot e_i\cdot e_l$ で (2)–2) と一致

4)　$j=l$ かつ $i\neq k$ の場合 $w_{ij}\wedge w_{kj}e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_j=w_{ij}\wedge(-w_{jk})e_i\cdot e_j\cdot(-e_j\cdot e_k)$ で (2)–2) と一致

5)　$i=l$ かつ $j\neq k$ の場合 $w_{ij}\wedge w_{ki}e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_i=-w_{ji}\wedge(-w_{ik})(-e_j\cdot e_i)\cdot(-e_i\cdot e_k)$ で (2)–2) と一致

6)　$i=k, j=l$ の場合 $w_{ij}\wedge w_{ij}=0$ より 0

7)　$i=l, j=k$ の場合 $w_{ij}\wedge w_{ji}=-w_{ij}\wedge w_{ij}=0$ より 0

となり、$j=k$ かつ $i\neq l$ の場合だけが 4 回出てくることになる。よって

$$\frac{1}{16}\sum_{i,j,k,l} w_{ij}\wedge w_{kl}(e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_l)=\frac{1}{16}\sum_{i,j,k}4w_{ik}\wedge w_{kj}(e_i\cdot e_k\cdot e_k\cdot e_j)=\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}w_{ik}\wedge w_{kj}(e_i\cdot(-1)\cdot e_j)$$

であるから、

$$\Omega_{ij}=dw_{ij}+\sum_{k=1}^{4}w_{ik}\wedge w_{kj}$$

とおけば、

$$\Omega_A=-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\Omega_{ij}e_i\cdot e_j$$

と表すことができる。 ∎

同様にU_αにおいて、定理 2.24 での接続は Levi–Civita 接続 $d_{LC}=d+(w_{ij})$ と L^2 の $U(1)$-接続 $d_{2A}=d-2ia$ に対して、$d_{A^c}=d-iaI-\frac{1}{4}\sum_{i,j}w_{ij}e_i\cdot e_j$ で与えられた。

系 2.27 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を $Spin^c$-構造 を持つ4次元 Riemann 多様体、$W \otimes L$ を $Spin^c$-構造 から構成される M 上のベクトル束とする。
$W \otimes L$ の接続 d_{A^c} が局所的に

$$d_{A^c} = d - iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j$$

と表されるとき, その曲率 Ω_{A^c} は定理2.26の Ω_{ij} とバーチャルな場合も含めて L の曲率 $-iF_A$ により

$$\Omega_{A^c} = -iF_A I - \frac{1}{4}\sum_{i,j} \Omega_{ij} e_i \cdot e_j \in \Gamma(\wedge^2 T^* M \otimes \mathrm{End}(W \otimes L))$$

で表される。

注意 2.28 定理2.25は M が $Spin$ 多様体の場合であったが、$Spin$ 多様体と限らないこの系の場合も

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j} \Omega_{ij} e_i \cdot e_j = \Omega_{A^c} + iF_A I$$

が存在する。これを Ω_A と表すことにする。

証明 U_αにおける L^2 の接続 d_{2A} の曲率 $-iF_{2A}$ を計算すると

$$\begin{aligned} -iF_{2A}\sigma &= (d - i2a)^2\sigma = d^2\sigma - d(i2a\sigma) - i2a(d\sigma) - 4a^2\sigma \\ &= -(i2da\sigma - i2a(d\sigma)) - i2a(d\sigma) \\ &= -i2da\sigma \end{aligned}$$

となり、$F_{2A} = 2da$ と表されることがわかる。よって、$F_A = da$ と表され、このとき曲率 Ω_{A^c} は、

$$\begin{aligned} \Omega_{A^c} &= (d - iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j)^2 \\ &= (d - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j)^2 - idaI - \frac{i}{4}\sum_{i,j} w_{ij} \wedge a\ e_i \cdot e_j - \frac{i}{4}\sum_{i,j} a \wedge w_{ij} e_i \cdot e_j - a^2 I \\ &= \Omega_A - idaI = \Omega_A - iF_A I \\ &= -iF_A I - \frac{1}{4}\sum_{i,j} \Omega_{ij} e_i \cdot e_j \end{aligned}$$

と表され題意が示された。 ∎

ここで定義した Ω_{ij} とスカラー曲率と呼ばれる量の関係を示しておく。この関係式からスカラー曲率が Riemann 多様体の構造を大きく規定することになる。
まずスカラー曲率を定義する。

定義 2.29 **リーマン–クリストフェル曲率テンソル** (Riemann–Christoffel curvature tensor) を

$$R_{ijkl} = \Omega_{ij}(e_k, e_l)$$

で定義する。このとき

$$s = \sum_{i,j=1}^{4} R_{ijij}$$

で定まる実数値関数 s を**スカラー曲率** (scalar curvature) と呼ぶ。 □

スカラー曲率は $\{e_i\}$ の取り方に依らないことが知られている。Riemann–Christoffel 曲率テンソルには、添え字に関する関係式が多く存在する。後の証明のためにそれを列挙しておく。詳しくは [22] 参照。

1. $R_{ijkl} = R_{klij}$
2. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$
3. $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ (Bianchi の恒等式)

このスカラー曲率と注意 2.28 で定義した Ω_A の関係が Seiberg–Witten 方程式とスカラー曲率をつなぐ接点となる。まずその関係を大まかに説明しておく。$\Omega_A \in \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(W))$ と TM の正規直交枠 $\{e_i\}$ をカップリングした $\Omega_A(e_i, e_j)$ は End(W)の元となる。これに e_i, e_j の Clifford 積をとった $e_i \cdot e_j \cdot \Omega_A(e_i, e_j)$ は End(W)の元となるが、それらを全て加えると $\wedge^0 TM \otimes \mathbb{C} \subset \mathrm{End}(W)$ 以外の元は全て消えてスカラー量のみが残る。そして、それがスカラー曲率の $\frac{1}{2}$ 倍となっているのである。厳密に言えば次のようになる。

命題 2.30 M を Riemann 多様体で$Spin^c$-構造 を持つとする。Ω_A を M の$Spin^c(4)$-接続から注意2.28 で定義した曲率とする。開集合 U_α で $TM|_{U_\alpha}$ が自明となるとする。U_α の正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ をとるとスカラー曲率 s に関して次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i,j=1}^{4} e_i \cdot e_j \cdot \Omega_A(e_i, e_j) = \frac{s}{2}$$

証明 $R_{ijkl} = R_{klij}$ が成り立ち、

$$\sum_{ij}^{4} e_i e_j \Omega_A(e_i, e_j) = -\frac{1}{4}\sum_{ijkl}^{4} e_i e_j e_k e_l \Omega_{kl}(e_i, e_j) = -\frac{1}{4}\sum_{ijkl}^{4} e_i e_j e_k e_l R_{klij} = -\frac{1}{4}\sum_{ijkl}^{4} e_i e_j e_k e_l R_{ijkl}$$

となる。ここで、

i, j, k, l がすべて異なる数の場合、

$$e_i e_j e_k e_l R_{ijkl} + e_i e_k e_l e_j R_{iklj} + e_i e_l e_j e_k R_{iljk} = e_i e_j e_k e_l (R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk})$$

となり、Bianchi の恒等式から 0 となる。

i, j, k, l のうち 2 つだけ同じ数の場合、

$$\begin{aligned}
e_i e_j e_i e_l R_{ijil} + e_i e_l e_i e_j R_{ilij} &= e_i e_j e_i e_l R_{ijil} + (-1) e_i e_j e_i e_l R_{ilij} = e_i e_j e_i e_l (R_{ijil} - R_{ilij}) = 0 \\
e_i e_j e_k e_j R_{ijkj} + e_k e_j e_i e_j R_{kjij} &= e_i e_j e_k e_j R_{ijkj} + (-1) e_i e_j e_k e_j R_{kjij} = e_i e_j e_k e_j (R_{ijkj} - R_{kjij}) = 0 \\
e_i e_j e_k e_i R_{ijki} + e_k e_i e_i e_j R_{kiij} &= e_i e_j e_k e_i R_{ijki} + (-1) e_i e_j e_k e_i R_{kiij} = e_i e_j e_k e_i (R_{ijki} - R_{kiij}) = 0 \\
e_i e_j e_k e_k R_{ijkk} &= 0 \quad (\because R_{ijkl} = -R_{ijlk} \text{ より } R_{ijkk} = 0) \\
e_i e_i e_k e_l R_{iikl} &= e_i e_i e_k e_l R_{klii} = 0
\end{aligned}$$

となり全ての項が消える。

i,j,k,l のうち同じ数が 3 つ以上現れている場合、$i=j$ または $k=l$ が成り立つので、$R_{ijkl}=0$ したがって $e_ie_je_ie_j$ と $e_ie_je_je_i$ の項だけが残り、

$$\begin{aligned}\sum_{ij}^{4} e_ie_j\Omega_A(e_i,e_j) &= -\frac{1}{4}\sum e_ie_je_ie_jR_{ijij}-\frac{1}{4}\sum e_ie_je_je_iR_{ijji}\\ &= -\frac{1}{4}\sum e_i(-e_ie_j)e_jR_{ijij}-\frac{1}{4}\sum e_i(-1)e_iR_{ijji}\\ &= -\frac{1}{4}\sum(-(-1)(-1))R_{ijij}-\frac{1}{4}\sum(-1)(-1)R_{ijji}\\ &= \frac{1}{4}\sum R_{ijij}-\frac{1}{4}\sum(-R_{ijij})=\frac{s}{2}\end{aligned}$$

となり題意が示せた。 ∎

2.5 Dirac 作用素 (Dirac operator)

$(M,\langle\ ,\ \rangle)$ を 4 次元コンパクト Rieman 多様体で Levi–Civita 接続 を d_{LC} とする。さらに M は $Spin^c$-構造 を持ち$Spin^c$-構造 より構成された $U(1)$-束 L^2 上の $U(1)$-接続 d_{2A} が与えられているとする。このとき定理 2.24 よりベクトル束 $W\otimes L$ 上に d_{2A},d_{LC} に対応する接続 d_A が取れる

M 上の係数体 $\mathbb{K}$ のベクトル束 E に接続 d_A が与えられたとき $\nabla^A:\Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ を $X\in\Gamma(TM),\sigma\in\Gamma(E)$ に対して、

$$\nabla^A_X\sigma=d_A(\sigma)(X)$$

と定義する。∇^Aが$\Gamma(TM)$ に関して $C^\infty(M)$-線形で、$\Gamma(E)$ に関して $\mathbb{K}$-線形であることは明らかである。

まず M が $Spin$ 多様体でスピノル束 W が存在する場合の Dirac 作用素を定義する。

定義 2.31 M が$Spin$-構造 を持ち W をその$Spin$-構造 から構成されたスピノル束で接続 d_A を持つとする。このとき**ディラック作用素** (Dirac operator) $D_A:\Gamma(W)\to\Gamma(W)$ とは、局所的に任意の正規直交枠
$\{e_i\in\Gamma(TM)\}_{1\le i\le 4}$に対して

$$D_A(\psi)=\sum_{i=1}^{4}e_i\cdot d_A\psi(e_i)=\sum_{i=1}^{4}e_i\cdot\nabla^A_{e_i}\psi$$

で表される写像である。 □

この定義が well–defind になるためには、$\{e_i\}$ の取り方によらないことを示す必要がある。

命題 2.32 D_A は正規直交枠の取り方によらない。

証明 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\},\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}$ を向きの付いたU_αにおける正規直交枠とすると、各点 $p\in U_\alpha$ において $(x_{ij}(p))\in SO(4)$ となるU_α上の実数値関数 x_{ij} を用いて $e'_j=\sum_i x_{ij}e_i$ と表すことができる。(x_{ij}) は $\sum_j x_{ij}x_{kj}=\delta_{ik}$ を満たす。

ここで $\nabla^A_{e'_j}\psi=\nabla^A_{\sum_i x_{ij}e_i}\psi=\sum_i x_{ij}\nabla^A e_i\psi$ より、

$$\begin{aligned}\sum_j e'_j\cdot\nabla^A_{e'_j}\psi &= \sum_j(\sum_i x_{ij}e_i\cdot\sum_k x_{kj}\nabla^A e_k\psi)\\ &= \sum_j\sum_{ik}(x_{ij}x_{kj}e_i\cdot\nabla^A e_k\psi)=\sum_i e_i\cdot\nabla^A e_i\psi\end{aligned}$$

となり、D_A は正規直交枠の取り方によらない。 ∎

次に M が$Spin^c$-構造 を持つ場合の Dirac 作用素を定義しておく。

定義 2.33 d_A を $W\otimes L$ の接続とする。**ディラック作用素** (Dirac operator) $D_A:\Gamma(W\otimes L)\to\Gamma(W\otimes L)$ とは、局所的に任意の正規直交枠 $\{e_i\in\Gamma(TM)\}_{1\le i\le 4}$に対して

$$D_A(\psi)=\sum_{i=1}^4 e_i\cdot d_A\psi(e_i)=\sum_{i=1}^4 e_i\cdot\nabla^A_{e_i}\psi$$

で表される写像である。 □

$W\otimes L$ に対する Dirac 作用素も正規直交枠の取り方に依らないことが命題 2.32 と同様に示される。

もし M がユークリッド空間で座標が $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ で表されて、W が自明束かつ d_A が自明な接続であるときは、

$$D_A=\sum_{i=1}^4 e_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad D_A\circ D_A=-\sum_{i=1}^4\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

となり、D_A^2 は普通の Laplacian に -1 を乗じたものとなり、Dirac 作用素は Laplacian のある種の平方根と言える。一般の場合には次に定義するベクトル束上の Laplacian を用いた Weitzenböck's formula(定理 2.35) が成り立ち “ある種の平方根” の意味を厳密に示している。

定義 2.34 ベクトル束ラプラシアン (vector bundle Laplacian) $\Delta_A:\Gamma(W\otimes L)\to\Gamma(W\otimes L)$ とは、局所的に任意の正規直交枠 $\{e_i\in\Gamma(TM)\}_{1\le i\le 4}$に対して

$$\Delta_A(\psi)=-\sum_{i=1}^4(\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}-\nabla^A_{\nabla^A_{e_i}e_i})\psi$$

で表される写像である。 □

ベクトル束 Laplacian も正規直交枠の取り方に依らないことが単純な計算で示される。

定理 2.35 (Weitzenböck's formula) M のスカラー曲率を s、複素直線束 L の曲率を $-iF_A$ とするとき次の等式が任意の切断 $\psi\in\Gamma(W\otimes L)$ について成り立つ。

$$D_A^2\psi=\Delta_A\psi+\frac{s}{4}\psi-\sum_{i<j}F_A(e_i,e_j)(ie_i\cdot e_j\cdot\psi)$$

証明　正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を、点 $p \in M$ において、$\nabla^A_{e_i} e_j(p) = 0$ となるようにとることができる。このとき p において、

$$\begin{aligned}
D_A^2\psi &= \left(\sum_{i=1}^4 e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\right)\left(\sum_{j=1}^4 e_j \cdot \nabla^A_{e_j}\right)\psi = \sum_{i,j=1}^4 \left(e_i \cdot (\nabla^A_{e_i} e_j) \cdot \nabla^A_{e_j} + e_i \cdot e_j \cdot \nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_j}\right)\psi \\
&= \sum_{i,j=1}^4 \left(e_i \cdot e_j \cdot \nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_j}\right)\psi \\
&= -\sum_{i=1}^4 \left(\nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_i}\right)\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^4 \left(e_i \cdot e_j \cdot (\nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_j} - \nabla^A_{e_j}\nabla^A_{e_i})\right)\psi
\end{aligned}$$

$(d_A^2\psi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2}(\nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_j} - \nabla^A_{e_j}\nabla^A_{e_i} - \nabla^A_{[e_i,e_j]})\psi$ であり、Levi–Civita 接続 では p において $[e_i, e_j] = \frac{1}{2}(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i) = 0$ ([20] 参照) なので、

$$D_A^2\psi = \Delta_A\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 e_i \cdot e_j (d_A^2\psi)(e_i, e_j) = \Delta_A\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 e_i \cdot e_j \Omega_{A^c}(e_i, e_j)\psi$$

となる。ただし、Ω_{A^c} は$Spin^c(4)$-接続 d_A の曲率である。ここで系 2.27 より

$$\Omega_{A^c} = -iF_A I - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^4 \Omega_{ij} e_i \cdot e_j$$

であり、さらに命題 2.30 より、

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^4 e_i e_j e_k e_l R_{ijkl} = \frac{s}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
D_A^2\psi &= \Delta_A\psi - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 ie_i \cdot e_j F_A(e_i, e_j)\psi - \frac{1}{8}\sum_{i,j=1}^4 e_i \cdot e_j \sum_{k,l=1}^4 e_k \cdot e_l \Omega_{kl}(e_i, e_j)\psi \\
&= \Delta_A\psi - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 ie_i \cdot e_j F_A(e_i, e_j)\psi - \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l=1}^4 e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l R_{klij}\psi \\
&= \Delta_A\psi - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 ie_i \cdot e_j F_A(e_i, e_j)\psi + \frac{s}{4}\psi \\
&= \Delta_A\psi + \frac{s}{4}\psi - \sum_{i<j} F_A(e_i, e_j)(ie_i \cdot e_j \cdot \psi)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 ∎

$W \otimes L = (W_+ \otimes L) \oplus (W_- \otimes L)$ なる分解に対して Dirac 作用素も次のように分解する。

命題 2.36 Dirac 作用素D_Aは、

$$D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes L) \to \Gamma(W_- \otimes L), \quad D_A^- : \Gamma(W_- \otimes L) \to \Gamma(W_+ \otimes L)$$

に分解される。

証明　命題 2.22 より $\psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ に対して $d_A\psi(e_i) \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ がなりたち、命題 2.10 より e_i の Clifford 積は $W_+ \otimes L$ の元を $W_- \otimes L$ に移す。よって $e_i \cdot d_A\psi(e_i) \in \Gamma(W_- \otimes L)$ となり、$D_A\psi \in \Gamma(W_- \otimes L)$ である。同様に $\psi \in \Gamma(W_- \otimes L)$ に対して $D_A\psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ である。よって $D_A^{\pm} = D_A|_{W_\pm \otimes L}$ とおけばよい。 ∎

この分解は後の指数の定義において使うことになる。

次に Dirac 作用素の重要な性質である形式的自己共役性を示す。

命題 2.37 Dirac 作用素 D_A は**形式的自己共役** (formally self-adjoint) である。つまり、次の等式が任意の $\psi, \eta \in \Gamma(W \otimes L)$ について成り立つ。

$$\int_M \langle D_A\psi, \eta\rangle dV = \int_M \langle \psi, D_A\eta\rangle dV$$

証明　まず切断 $\psi, \eta \in \Gamma(W \otimes L)$ を固定する。1 次微分形式は任意の TM の切断 v に対する値を v について線形性を持つように定めることで決定される。よって 1 次微分形式 b を任意の TM の切断 v に対して $\langle b, v\rangle = \langle \psi, v \cdot \eta\rangle$ が成り立つものとして定義することができる。

局所的に正規直交枠 $\{e_i\}$ と、その双対基底を $\{de_i\}$ をとると、
$b = \sum \langle b, e_i\rangle de_i$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}
\delta b &= (-*d)\sum \langle b, e_i\rangle de_1 \cdots \check{de_i} \cdots de_4 = -*\sum e_i\langle b, e_i\rangle de_i de_1 \cdots \check{de_i} \cdots de_4 \\
&= \sum e_i\langle b, e_i\rangle = \sum e_i \langle \psi, e_i\eta\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。

各点 $p \in M$ において正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を $\nabla^A_{e_i} e_j(p) = 0$ となるようにとることができる。このとき p において、

$$\begin{aligned}
\langle D_A\psi, \eta\rangle(p) &= \sum_{i=1}^{4} \left\langle e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\psi, \eta\right\rangle(p) = \sum_{i=1}^{4} \left\langle e_i \cdot e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\psi, e_i \cdot \eta\right\rangle(p) \\
&= -\sum_{i=1}^{4} \left\langle \nabla^A_{e_i}\psi, e_i \cdot \eta\right\rangle(p) = -\sum_{i=1}^{4}\left(e_i\langle \psi, e_i \cdot \eta\rangle - \left\langle \psi, \nabla^A_{e_i}(e_i \cdot \eta)\right\rangle\right)(p) \\
&\quad (\because\ e_i\langle \psi, e_i \cdot \eta\rangle = \left\langle \nabla^A_{e_i}\psi, e_i \cdot \eta\right\rangle + \left\langle \psi, \nabla^A_{e_i}(e_i \cdot \eta)\right\rangle) \\
&= -\sum_{i=1}^{4}\left(e_i\langle \psi, e_i \cdot \eta\rangle - \left\langle \psi, (\nabla^A_{e_i}e_i) \cdot \eta)\right\rangle - \left\langle \psi, e_i \cdot (\nabla^A_{e_i}\eta)\right\rangle\right)(p) \\
&= -\sum_{i=1}^{4} e_i\langle \psi, e_i \cdot \eta\rangle(p) + \langle \psi, D_A\eta\rangle(p) \\
&= -\delta b(p) + \langle \psi, D_A\eta\rangle(p)
\end{aligned}$$

が成り立ち

$$\langle D_A\psi, \eta\rangle(p) = -\delta b(p) + \langle \psi, D_A\eta\rangle(p) \tag{2.20}$$

と表されるが、この表示は正規直交枠の取り方に依らないので M 全体で成り立つ。よって

$$\int_M \langle D_A\psi, \eta\rangle dV - \int_M \langle \psi, D_A\eta\rangle dV = -\int_M (\delta b) dV$$

が成り立つ。ここで $*b$ を考えると $d(*b) \in \Omega^4(M)$ なので $d(*b) = **d*b = -*(\delta b) = -(\delta b)dV$ となる。よって Stokes の定理より $\partial M = \emptyset$ から、

$$\int_M \langle D_A\psi, \eta\rangle dV - \int_M \langle \psi, D_A\eta\rangle dV = -\int_M (\delta b)dV = -\int_M d(-*b) = \int_{\partial M} *b = 0$$

これにより題意が示せた。 ∎

ベクトル束 Laplacian Δ_A についても同様の議論で次の命題が示せる。([10]p154 参照)

命題 2.38 次の等式が任意の $\psi, \eta \in \Gamma(W \otimes L)$ について成り立つ。

$$\int_M \langle \Delta_A\psi, \eta\rangle dV = \int_M \langle d_A\psi, d_A\eta\rangle dV$$

これより直ちに、次の系が得られる。

系 2.39 ベクトル束 Laplacian Δ_A は formally self-adjoint である。つまり、次の等式が成り立つ。

$$\int_M \langle \Delta_A\psi, \eta\rangle dV = \int_M \langle \psi, \Delta_A\eta\rangle dV$$

複素直線束 L の $U(1)$-接続は定理 1.4 により $d_{A_0} - ia$ の形にかけることがわかっているので、Dirac 作用素についても次の性質が示される。

命題 2.40 L^2 を多様体 M 上の複素 1 次ベクトル束とする。L^2 上の $U(1)$-接続 d_{2L_0} を 1 つ固定する。任意の $U(1)$-接続 d_{2L} は、ある実 1 次微分形式 a によって、$d_{2L} = d_{2L_0} - ia$ と表すことができる。このとき End(W)の Levi–Civita 接続 と d_{2L_0}, d_{2L} から誘導される $W \otimes L$ の接続をそれぞれ d_{A_0}, d_A と表す。このとき任意の $\psi \in \Gamma(W \otimes L)$ に対して、

$$D_A\psi = D_{A_0}\psi - ia \cdot \psi$$

が成り立つ。ただし、$\cdot$ は Clifford 積である。

証明 定理 2.24 より $d_A = d_{A_0} - iaI$ と表される。よって定義より、

$$\begin{aligned} D_A(\psi) &= \sum_{i=1}^4 e_i \cdot d_A\psi(e_i) = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot (d_{A_0} - iaI)\psi(e_i) = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot (d_{A_0}\psi)(e_i) - i\sum_{i=1}^4 e_i \cdot (a\psi)(e_i) \\ &= D_{A_0}\psi - i\sum_{i=1}^4 e_i \cdot a(e_i)\psi \end{aligned}$$

(2.17) で見たように、$\sum_{i=1}^4 e_i \cdot a(e_i)\psi = a \cdot \psi$ であったから、

$$D_A\psi = D_{A_0}\psi - ia \cdot \psi$$

が成り立つ。 ∎

先に定義した Dirac 作用素を拡張して一般のベクトル束 E に値を持つ係数付き Dirac 作用素を定義することができる。

定義 2.41 M を 4 次元コンパクト向き付け可能な Riemann 多様体で$Spin$-構造 をもつとする。E を M 上の複素ベクトル束で、エルミート内積とユニタリー接続が与えられているとする。W における定理 2.25 によるユニタリー接続とあわせて、$W \otimes E$ にユニタリー接続 d_A が引き起こされる。このとき、**E に係数を持つ Dirac 作用素** (Dirac operator with E coefficients) $D_A : \Gamma(W \otimes E) \to \Gamma(W \otimes E)$ とは、任意の正規直交枠 $\{e_i \in \Gamma(TM)\}_{1 \leq i \leq 4}$ に対して

$$D_A(\psi \otimes \sigma) = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot d_A(\psi \otimes \sigma)(e_i)$$

で定義される写像である。 $\square$

M が$Spin^c$-構造 を持つとき $W \otimes L$ 上に Dirac 作用素が定義されているので M 上のベクトル束 E と、E 上の接続が与えられていれば、定義 2.41 と同様に $\Gamma(W \otimes L \otimes E)$ 上の線形作用素 D_A が定義できる。これを $L \otimes E$ **に係数をもつ Dirac 作用素**と呼ぶことにする。定義 2.33 で与えた $W \otimes L$ における Dirac 作用素は係数 L の Dirac 作用素と言うことができる。

この Dirac 作用素の例として、$E = W^*$ の場合を考える。$W \otimes W^* \cong \mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ と考える。ここで W^* には W からの自然な接続を考える。また定理 2.24 から $\mathrm{End}(W)$には Levi–Civita 接続が入っているとする。

命題 2.42 W^* を係数とする Dirac 作用素 $D_W : \sum_{i=0}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C} \to \sum_{i=0}^{4} \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ は、$D_W = d + \delta$ と表される。

証明 まず、

$$d' = \sum e_j \wedge \nabla^A_{e_j}, \quad \delta' = -\sum i(e_j)\nabla^A_{e_j}$$

とおいたとき、$d = d', \delta = \delta'$ であることを示す。

まず、d は、次の公理

「(i)$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$, (ii)$d^2 = 0$, (iii)$f \in C^\infty(M)$ に対しては df が関数の微分と一致する。」

を満たすと一意的に定まることが知られている。

$$\begin{aligned}
d'(\phi \wedge \psi) &= \sum e_j \wedge \nabla^A_{e_j}(\phi \wedge \psi) = \sum e_j \wedge ((\nabla^A_{e_j}\phi) \wedge \psi) + \phi \wedge \nabla^A_{e_j}\psi)) \\
&= (\sum e_j \wedge \nabla^A_{e_j}\phi) \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge \sum e_j \wedge \nabla^A_{e_j}\psi \\
&= d'\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d'\psi
\end{aligned}$$

$\{e_i\}$ をU_α上の正規直交枠で $\nabla^A_{e_i} e_j = 0$ を満たすものとする。$a \in C^\infty(U_\alpha)$ により、$\phi = ae_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ とおくと、

$$\begin{aligned}
d'^2\phi &= \sum e_i \wedge \nabla^A_{e_i}(\sum e_j \wedge \nabla^A_{e_j}(ae_1 \wedge \cdots \wedge e_p)) \\
&= \sum e_i \wedge \nabla^A_{e_i}(\sum e_j \wedge (e_j a) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \\
&= \sum e_i \wedge (\sum (\nabla^A_{e_i} e_j) \wedge (e_j a) \wedge \cdots \wedge e_p + \sum e_j \wedge \nabla^A_{e_i}(e_j a) \wedge \cdots \wedge e_p \\
&\quad + \cdots + \sum e_j \wedge (e_j a) \wedge \cdots \wedge \nabla^A_{e_i} e_p) \\
&= \sum e_i \wedge (\sum e_j \wedge (\nabla^A_{e_i} e_j)a \wedge \cdots \wedge e_p) = 0
\end{aligned}$$

$\{e_i\}$ の添え字の取り方は自由なので、(ii) を満たす。(iii) を満たすことは定義から明らか。よって公理を満たすので $d = d'$ となる。

$$
\begin{aligned}
d(\phi) &= *\sum (e_j a) e_j \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= \sum (e_j a) * (e_j \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n) \\
&= \sum (-1)^{n(p+1)+j-1} (e_j a) e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e_j} \wedge \cdots \wedge e_p \\
&= (-1)^{n(p+1)} \sum (e_j a) i(e_j)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) \\
&= (-1)^{n(p+1)} \sum i(e_j) \nabla^A_{e_j} \phi
\end{aligned}
$$

$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$ より、$\delta = \delta'$。

ここで、命題 2.9 より、

$$
D_W \psi = \sum e_i \cdot \nabla^A_{e_i} \psi = \sum (e_i \wedge \nabla^A_{e_i} \psi - i(e_i) \nabla^A_{e_i} \psi) = (d + \delta)\psi
$$

∎

この命題 2.42 と同様に、多様体 M が$Spin^c$-構造 を持ちベクトル束 $W \otimes L$ が存在する場合にも $(W \otimes L) \otimes (W \otimes L)^* \cong \mathrm{End}(W) \cong \sum_{i=0}^4 \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ が成り立つので命題 2.42 と同様の証明で次の系が示せる。

系 2.43 $L \otimes (W \otimes L)^*$ を係数とする Dirac 作用素 $D_W : \sum_{i=0}^4 \wedge^i V \otimes \mathbb{C} \to \sum_{i=0}^4 \wedge^i V \otimes \mathbb{C}$ は,$D_W = d + \delta$ と表される。 □

2.6 Sobolev 空間 (Sobolev space)

前節において Dirac 作用素を定義したが、Seiberg–Witten 方程式の解空間を考えるに当たっては、関数解析の議論にあるように適当なノルムよって完備化する必要がある。従って Dirac 作用素も完備化された空間に拡張する必要がある。この節では今後必要となる関数解析の理論を用意しておく。本論文では関数解析の内容には深く立ち入らず必要な結果のみを利用することにする。

まず記号を準備しておく。

定義 2.44 M をコンパクト Riemann 多様体、E を M 上の内積を持った実ベクトル束または、エルミート内積を持った複素ベクトル束とする。d_Aを E 上の接続とする。$k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$
d_A^k = \underbrace{d_A \circ \cdots \circ d_A}_{k\ \text{個}} : \Gamma(E) \to \Gamma((\otimes^k T^* M \otimes E))
$$

で d_A^k を定義する。 □

この記号を用いてノルムを定義する。

定義 2.45 $p \in \mathbb{N}$ を定める。任意の $\sigma \in \Gamma(E)$ に対して、

$$\|\sigma\|_{p,k} = \left(\int_M (|\sigma|^p + |d_A \sigma|^p + \cdots + |d_A^k \sigma|^p) dV \right)^{\frac{1}{p}}$$

で定められる $\Gamma(E)$ 上のノルム $\| \ \|_{p,k}$ を、**ソボレフノルム** (Sobolev norm) という。 □

定義 2.46 $\Gamma(E)$ をノルム $\| \ \|_{p,k}$ で完備化した空間を、**ソボレフ空間** (Sobolev space) と呼び、$L_k^p(E)$ と表す。 □

Sobolev 空間は、Riemann 計量、fiber の計量、接続d_Aの取り方に依らないことが知られている。また、一般に $L_k^p(E)$ は Banach 空間となり、特に $L_k^2(E)$ は Hilbert 空間となる。

この Sobolev 空間への拡張に伴い、前節で定義した Dirac 作用素も拡張したい。Dirac 作用素は 1 階楕円型微分作用素と呼ばれる作用素の一つであるが、一般に楕円型微分作用素は次のような性質が成り立つことが知られている。

命題 2.47 コンパクト多様体 M 上のベクトル束を E, F とする。m 階楕円型微分作用素 $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ は m 以上の自然数 s について次の性質を持つ。

1. T は $T : L_s^2(E) \to L_{s-m}^2(F)$ に拡張される。
2. $u \in L_s^2(E)$ と開集合 $U \subset M$ に対して $Tu|_U \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$
3. 2) より $\ker T \subset C^\infty$ である。
4. $\ker T,\ \mathrm{coker}\ T = L_{s-m}^2 / \overline{\mathrm{Im}\ T}$ の次元は一定有限である。

□

よって Dirac 作用素も

$$D_A : L_s^2(W \otimes E) \to L_{s-1}^2(W \otimes E)$$

に拡張でき命題 2.47 の性質を満たす。特に 3) により s の取り方に依らず $\ker D_A$ が定まる。

また拡張された Dirac 作用素についても命題 2.36 と同様の分解が成り立ち、

$$D_A^+ : L_s^2(W_+ \otimes E) \to L_{s-1}^2(W_- \otimes E)$$
$$D_A^- : L_s^2(W_- \otimes E) \to L_{s-1}^2(W_+ \otimes E)$$

と分解される。この分解を用いて Dirac 作用素の指数が定義される。

定義 2.48 Dirac 作用素 D_A^+の**指数** (index) とは

$$\mathrm{index}\ D_A^+ = \dim(\ker D_A^+) - \dim(\ker D_A^-)$$

である。 □

この指数が次節の Atiyah-Singer Index 定理に示されるように多様体の性質を反映した位相不変量となり、Seiberg–Witten 方程式の解空間の次元の計算などに重要な働きをする事になる。

ここで後に必要となる Sobolev 空間に関する定理を示しておくと、

定理 2.49 (ソボレフの埋め込み定理 (Sobolev Embedding Theorem)) $C^\ell(E)$ は E の C^ℓ 切断全体の集合とする。$k-\frac{4}{p}>l$ とすると、包含写像

$$L^p_k(E)\hookrightarrow C^\ell(E)$$

は連続になる。即ち、ある定数 c がとれて、

$$\|\psi\|_{C^\ell}\le c\|\psi\|_{L^p_k}$$

が成り立つ。ただし、$\|\psi\|_{C^\ell}=\max(|\psi|+|d_A\psi|+\cdots+|d^\ell_A\psi|)$ である。 □

定理 2.50 (レリッヒの定理 (Rellich's Theorem)) 任意の p,k に対して、包含写像

$$L^p_{k+1}(E)\to L^p_k(E)$$

はコンパクトである。 □

定理 2.51 (ソボレフの積定理 (Sobolev Multiplication Theorem)) $k-\frac{4}{p}>0$ とすると自然な積

$$L^p_k(E)\times L^p_k(F)\to L^p_k(E\otimes F)$$

は連続となる。 □

定理 2.52 (ゴルディングの不等式 (Gårding's inequality)) D_A を Dirac 作用素とする。定数 $c\in\mathbb{R}$ が存在して、任意の $\sigma\in\Gamma(E)$ に対して、

$$\|\sigma\|_{p,k+1}\le c(\|D_A\sigma\|_{p,k}+\|\sigma\|_{p,k}) \tag{2.21}$$

特に、$\ker D_A=0$ のとき $\|\sigma\|_{p,k}$ の項は無視できる。 □

この定理と同様の証明で次が示される。

系 2.53 $D_A:L^2_{k+1}(W\otimes L)\to L^2_k(W\otimes L)$ を Dirac 作用素とする。$\sigma\in L^2_{k+1}(W\otimes L)$ に対して $D_A\sigma\in L^2_{k+1}(W\otimes L)$ が成り立てば、定数 $c\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$\|\sigma\|_{p,k+2}\le c(\|D_A\sigma\|_{p,k+1}+\|\sigma\|_{p,k+1}) \tag{2.22}$$

即ち、$\sigma\in L^2_{k+2}(W\otimes L)$ □

この節の詳しい説明については、[4, Appendix] を参照のこと。

2.7 指数定理 (Index theorem)

アティヤ-シンガーの指数定理 (Atiyah-Singer Index Theorem) は、それまでの数学の重要な成果を含んだ定理であり、多くの方面に応用を持ち、強力な力を発揮している。そのことからも 20 世紀の数学における最も重要な定理の一つであると言える。この定理は指数という解析的な量が位相的な量によって決まることを表しており、多様体の数学的な構造の不思議さを示している。Seiberg–Witten 理論においては、Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間の次元が指数から計算できることから指数定理が関係してくる。

定義 2.54 $\hat{A}$ 類 (A-hat class) とは、Pontrjagin 類 p_k により、

$$\hat{A}(TM) = 1 - \frac{1}{24}p_1(TM) + \frac{1}{5760}(7p_1^2(TM) - 4p_2(TM)) + \cdots \in H^*(M;\mathbb{R})$$

で表されるコホモロジーの元である。 □

本論文では、4 次元多様体を考えるので、5 次以上のコホモロジーは 0 となり、

$$\hat{A}(TM) = 1 - \frac{1}{24}p_1(TM)$$

と考えてよい。

定理 2.55 (アティヤ-シンガーの指数定理 (Atiyah-Singer Index Theorem)) M をコンパクトで向き付けられた 4 次元多様体、E を M 上の複素ベクトル束 (バーチャルでもよい)、D_Aを E に値をとる Dirac 作用素とするとき、次の等式が成り立つ。

$$\text{index } D_A^+ = \hat{A}(TM)ch(E)[M] = \int_M \left(-\frac{1}{24}(\dim_{\mathbb{C}} E)p_1(TM) + \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E) \right)$$

□

証明は省略する ([10] 等を参照)。

複素直線束 L に対してはもう少し簡略化した等式が成り立つが、それを証明するために次を示す。

定理 2.56 (Hirzebruch Signature Theorem) M を向きづけられたコンパクト 4次元多様体とするとき、M の符号数 $\tau(M)$ に関する次の等式が成り立つ。

$$\tau(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(TM)$$

証明 係数 W^* の Dirac 作用素 D_A を考えると、$\text{End}(W) = \sum_{i=0}^4 \wedge^i TM \otimes \mathbb{C}$ と見なせば、命題 2.42 により $D_A = d + \delta$ となる。よって $\ker D_A = \ker(d+\delta) = \mathcal{H}^*(M)$ である。ここで

$$\begin{aligned} D_A^+ &: \Gamma(W_+ \otimes W^*) \to \Gamma(W_- \otimes W^*) \\ D_A^- &: \Gamma(W_- \otimes W^*) \to \Gamma(W_+ \otimes W^*) \end{aligned}$$

なる分解により $\ker D_A^+, \ker D_A^-$ をもとめる。

まず、$\Gamma(\wedge^0 TM \otimes \mathbb{C} \oplus \wedge^4 TM \otimes \mathbb{C})$ は $1 + *1$ と $1 - *1$ の張る空間に直和分解されるが、$\text{End}(W)$ の元として見ると、

$$1 + e_1e_2e_3e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \in \Gamma(W_- \otimes W_-^*), \quad 1 - e_1e_2e_3e_4 = \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \in \Gamma(W_+ \otimes W_+^*)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Gamma(\wedge^0 TM \otimes \mathbb{C} \oplus \wedge^4 TM \otimes \mathbb{C}) \cap \Gamma(W_+ \otimes W^*) &= < 1 - *1 >, \\ \Gamma(\wedge^0 TM \otimes \mathbb{C} \oplus \wedge^4 TM \otimes \mathbb{C}) \cap \Gamma(W_- \otimes W^*) &= < 1 + *1 > \end{aligned}$$

となる。調和形式は $d\omega=0, \delta\omega=0$ を満たすので $1+*1$ と $1-*1$ の定数倍となり、

$$\dim(\ker D_A^+ \cap \Gamma(\wedge^0 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^4 TM\otimes\mathbb{C})) = \dim(\ker D_A^- \cap \Gamma(\wedge^0 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^4 TM\otimes\mathbb{C})) = 1$$

$\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C}$ は (1.16) と同様に $\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C} = \wedge^2_+ TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^2_- TM\otimes\mathbb{C}$ と分解されるが (2.11),(2.12) の基底の行列表示を見れば、

$$(\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C})\cap(W_+\otimes W^*) = \wedge^2_+ TM\otimes\mathbb{C}, \quad (\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C})\cap(W_-\otimes W^*) = \wedge^2_- TM\otimes\mathbb{C}$$

となり、

$$\dim(\ker D_A^+\cap\Gamma(\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C})) = \dim\mathcal{H}^2_+(M) = b_+, \quad \dim(\ker D_A^-\cap\Gamma(\wedge^2 TM\otimes\mathbb{C})) = \dim\mathcal{H}^2_-(M) = b_-$$

$\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}, \wedge^3 TM\otimes\mathbb{C}$ はそれぞれ $\{e_i\}, \{e_i\cdot e_j\cdot e_k\}_{i<j<k}$ を正規直交枠として持つが

$$\begin{gathered}
e_1 - e_2\cdot e_3\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&-2&0\\ 0&0&0&-2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, e_2 + e_1\cdot e_3\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&2i&0\\ 0&0&0&-2i\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \\
e_3 - e_1\cdot e_2\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-2\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, e_4 + e_1\cdot e_2\cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&2i\\ 0&0&2i&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}
e_1 + e_2\cdot e_3\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 2&0&0&0\\ 0&2&0&0 \end{pmatrix}, e_2 - e_1\cdot e_3\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 2i&0&0&0\\ 0&-2i&0&0 \end{pmatrix}, \\
e_3 + e_1\cdot e_2\cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 2&0&0&0 \end{pmatrix}, e_4 - e_1\cdot e_2\cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&2i&0&0\\ 2i&0&0&0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.24}$$

であるので、(2.23) で生成される部分束を S_{-+}, (2.24) で生成される部分束を S_{+-} と表すことにすれば、

$$\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^3 TM\otimes\mathbb{C} = S_{-+}\oplus S_{+-}$$

かつ

$$(\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^3 TM\otimes\mathbb{C})\cap(W_+\otimes W^*) = S_{-+}, \quad (\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^3 TM\otimes\mathbb{C})\cap(W_-\otimes W^*) = S_{+-}$$

が成り立つ。$f\in\mathcal{H}^1(M), g\in\mathcal{H}^3(M)$ に対し、$f+g\in S_{-+}$ であれば、$f-g\in S_{+-}$ なので、

$$\dim(\ker D_A^+\cap\Gamma(\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^3 TM\otimes\mathbb{C})) = \dim(\ker D_A^-\cap\Gamma(\wedge^1 TM\otimes\mathbb{C}\oplus\wedge^3 TM\otimes\mathbb{C}))$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\text{index } D_A^+ &= \dim(\ker D_A^+) - \dim(\ker D_A^-) \\
&= b_+ - b_- = \tau(M)
\end{aligned}$$

また、

$$ch(TM\otimes\mathbb{C}) = ch({W_+}^*)ch(W_-) = 4 - 2c_2({W_+}^*) - 2c_2(W_-) + \cdots$$

であるが $c_2({W_+}^*) = c_2(W_+)$ なので、

$$ch(TM\otimes\mathbb{C}) = 4 - 2c_2(W_+) - 2c_2(W_-) + \cdots$$

となる。よって

$$(p_1(TM) =)\ -c_2(TM \otimes \mathbb{C}) = -2c_2(W_+) - 2c_2(W_-) = -2c_2(W_+ \oplus W_-) = -2c_2(W)$$

となり、定理 2.55 より、

$$\begin{aligned}
\tau(M) &= \text{index } D_A^+ = \int_M (-\frac{1}{24}\dim E p_1(TM) + \frac{1}{2}c_1(W)^2 - c_2(W)) \\
&= \int_M (-\frac{1}{6}p_1(TM) + \frac{1}{2}p_1(TM)) \\
&= \int_M \frac{1}{3}p_1(TM)
\end{aligned}$$

∎

この定理により積分の中の $p_1(TM)$ の項はすべて、符号数 $\tau(M)$ で置き換えることができる。そこで定理 2.55 に適用して次の定理を得る。

定理 2.57 (Atiyah-Singer Index Theorem with coefficients in a line bundle) M をコンパクト向き付けられた 4 次元多様体、L を M 上の複素直線束, D_A を L に値を持つ Dirac 作用素とする。

$$\text{index } D_A^+ = -\frac{1}{8}\tau(M) + \frac{1}{2}\int_M c_1(L)^2$$

証明 $\dim L = 1$ より、$c_2(L) = 0$ なので、Atiyah-Singer Index 定理 2.55 より、

$$\text{index } D_A^+ = \int_M \left(-\frac{1}{24}p_1(TM) + \frac{1}{2}c_1(L)^2\right) = -\frac{1}{8}\int_M \frac{1}{3}p_1(TM) + \int_M \frac{1}{2}c_1(L)^2 = -\frac{1}{8}\tau(M) + \frac{1}{2}\int_M c_1(L)^2$$

∎

3 章　Seiberg–Witten 方程式、モジュライ空間

この章では、これまでに準備してきた定義や命題を用いて、Seiberg–Witten 方程式を定義する。そしてその方程式の解全体の集合をゲージ変換で割った空間（モジュライ空間）を考察し、それがコンパクトであり、向き付けられた有限次元可微分多様体になることを示す。Seiberg–Witten 理論のポイントはこのモジュライ空間がコンパクト有限次元多様体になることにあり、本章の議論が理論の中心をなす。

3.1　Seiberg–Witten 方程式 (Seiberg–Witten equation)

これまでの議論で Seiberg–Witten 方程式の定義を行う一般的な理論背景は準備ができた。Seiberg–Witten 方程式の成分の中で 1 つだけまだ定義していないのが平方写像である。平方写像は Seiberg–Witten 方程式に特有の写像であり、物理を背景として出てきた写像である。

定義 3.1 W_+ を複素 2 次ベクトル空間、V を Clifford 代数 End(W)の生成元 $\{e_i\}$ で張られる複素 4 次ベクトル空間とする。**平方写像** (quadratic map) $\sigma : W_+ \to \wedge^2_+ V$ とは、$\psi \in W_+$ に対して、

$$\sigma(\psi) = 2i(\text{Trace free part of } \psi\psi^*) = 2i(\psi\psi^* - \frac{1}{2}\text{Tr } \psi\psi^* I) = 2i(\psi\psi^* - \frac{1}{2}|\psi|^2 I) \in W_+ \otimes W_+^* \quad (3.1)$$

で値域を $W_+ \otimes W_+^* = \text{End}(W_+) \cong \wedge^2_+ V$ と見なしたものである。$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\sigma(\psi) = 2i(\text{Trace free part of } \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi_1} & \bar{\psi_2} \end{pmatrix}) = i \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 & 2\psi_1\bar{\psi_2} \\ 2\psi_2\bar{\psi_1} & |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 \end{pmatrix}$$

と表される。 □

$\sigma(\psi) \in \wedge^2_+ V$ であることが (2.11) より、

$$\sigma(\psi) = -\frac{1}{2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)(e_1e_2 + e_3e_4) - \text{Im } \psi_1\bar{\psi_2}(e_1e_3 + e_4e_2) - \text{Re } \psi_1\bar{\psi_2}(e_1e_4 + e_2e_3) \quad (3.2)$$

と表されることから分かる。また、

$$\begin{aligned} -i(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) &= \begin{pmatrix} \bar{\psi_1} & \bar{\psi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \langle \psi, e_1e_2\psi \rangle = \langle \psi, e_3e_4\psi \rangle \\ -2i\text{Im } \psi_1\bar{\psi_2} &= \begin{pmatrix} \bar{\psi_1} & \bar{\psi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \langle \psi, e_1e_3\psi \rangle = \langle \psi, e_4e_2\psi \rangle \end{aligned}$$

$$-2i\mathrm{Re}\ \psi_1\bar{\psi_2} \quad = \quad \begin{pmatrix} \bar{\psi_1} & \bar{\psi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \langle \psi, e_1e_4\psi \rangle = \langle \psi, e_2e_3\psi \rangle$$

となることから、

$$\sigma(\psi) = -\frac{i}{2}\sum_{i<j}\langle \psi, e_i \cdot e_j\psi \rangle e_i \wedge e_j \tag{3.3}$$

と表すこともできる。

$\sigma(\psi)$ の大きさについて次の性質がある。

命題 3.2 任意の $\psi \in W_+$ に対して次の等式が成り立つ。

$$|\sigma(\psi)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi|^2 \tag{3.4}$$

証明 $\wedge^2_+ V$ の基底 (2.11) は、$e_i \cdot e_j$ $(i<j)$ が正規直交基底であるから、大きさは $\sqrt{2}$ である。

よって、(3.2) の成分表示より、

$$\begin{aligned} |\sigma(\psi)|^2 &= (-\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2))^2 + (-\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\ \psi_1\bar{\psi_2})^2 + (-\sqrt{2}\ \mathrm{Re}\ \psi_1\bar{\psi_2})^2 \\ &= \frac{1}{2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \quad (\because (\mathrm{Im}\ \psi_1\bar{\psi_2})^2 + (\mathrm{Re}\ \psi_1\bar{\psi_2})^2 = |\psi_1|^2|\psi_2|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 = \frac{1}{2}|\psi|^4 \end{aligned}$$

よって、$|\sigma(\psi)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi|^2$ が成り立つ。 ∎

この平方写像 σ はベクトル空間に対する写像であったが、ファイバー毎に σ を考えることでベクトル束 $W_+ \otimes L$ と $\wedge^2_+ TM$ の間の写像

$$\sigma : W_+ \otimes L \to \wedge^2_+ TM$$

に拡張される。

実際、M が $Spin^c$-構造 $\{\hat{g}_{\alpha\beta}\}$ を持つとする。任意に $\psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ をとり、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ であるような M 上の開集合 U_α, U_β における ψ の局所表現をそれぞれ ψ_α, ψ_β と表すことにする。このとき、

$$\psi_\alpha = (\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta$$

が成り立つ。これを σ で移すと、

$$\begin{aligned} \sigma(\psi_\alpha) &= \sigma((\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta) \\ &= 2i[((\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta)((\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta)^* - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ ((\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta)((\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta)^* I] \\ &= 2i[(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta\psi^*_\beta(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^* - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\psi_\beta\psi^*_\beta(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^* I] \\ &= (\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\sigma(\psi_\beta)(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^* \end{aligned}$$

となる。$\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} \in U(2)$ であるから $(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^* = (\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^{-1}$ となり

$$\sigma(\psi_\alpha) = (\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\sigma(\psi_\beta)(\rho^c_+ \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})^{-1}$$

が成り立つ。これは定義 2.20 の End(W)の変換関数系と一致しており End$(W) \cong \sum \wedge^i TM \otimes \mathbb{C}$ であったから、$\sigma : W_+ \otimes L \to \wedge^2_+ TM$ は束写像として well-defined となる。

これまでの準備を元に、Seiberg–Witten 方程式を定義する。以下、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を向き付けられた 4 次元多様体で$Spin^c$-構造 を持つものとする。$W_+ \otimes L$ と L^2 を$Spin^c$-構造 からそれぞれ (2.13),(2.15) で構成したベクトル束とする。

定義 3.3 d_{2A} を L^2 の接続とし、$\psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ を正のスピノル場とする。F_{2A} を d_{2A} の曲率、$F_A = \frac{1}{2}F_{2A}$ とおく。d_{2A}とψ に関する関係式、

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+(e_i, e_j) = -\frac{i}{2}\langle\psi, e_i \cdot e_j \cdot \psi\rangle \tag{3.5}$$

を**サイバーグ–ウィッテン 方程式** (Seiberg–Witten equation) と呼ぶ。 □

(3.3) により定義 3.3 は、

$$\begin{aligned} D_A^+\psi &= 0, && \text{(3.6-a)} \\ F_A^+ &= \sigma(\psi) && \text{(3.6-b)} \end{aligned}$$

と表すことができる。また

定義 3.4 $\phi \in \Omega^2_+(M)$ を 1 つ固定して、

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi) + \phi \tag{3.7}$$

を**摂動サイバーグ–ウィッテン方程式** (perturbed Seiberg–Witten equation) と呼ぶ。 □

M が $Spin$ 多様体でない場合 L は virtual となる。しかし、その場合 L の曲率 F_A を定義 2.16 で

$$F_A = \frac{1}{2}F_{2A}$$

と定義していた。L が普通のベクトル束で接続 d_A を持つとき L^2 の接続 d_{2A} は

$$d_{2A} = d_A \otimes I + I \otimes d_A = 2d_A$$

であったので、L が virtual の場合にも

$$d_A = \frac{1}{2}d_{2A}$$

と形式的に表すことにすれば Seiberg–Witten 方程式は L の接続と $W_+ \otimes L$ の切断の方程式と考えることができる。よって本論文では Seiberg–Witten 方程式の解 (d_{2A}, ψ) を、(d_A, ψ) や (A, ψ) と表すことがある。

Seiberg–Witten 方程式は、$\sigma(\psi)$ が ψ の線形写像とはなっていないことからも非線形偏微分方程式となっていることが容易に分かる。しかし、それまでの Donaldson や Gromov の理論よりはかなり扱いやすくなっている。

今後 Seiberg–Witten 方程式の解全体の性質を考えるために、

$$\mathcal{A} \ = \{(d_A, \psi) | d_A \text{は } L \text{ 上の } U(1)\text{-接続},\ \psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)\}$$

とおく。命題 1.11 で示されたようにゲージ群$\mathcal{G}$ が$\mathcal{A}$ に

$$g(d_A, \psi) = (ad(g, d_A)) = (d_A + gdg^{-1}, g\psi) \tag{3.8}$$

と作用する。

次節以降、$\mathcal{A}$ の部分集合としての Seiberg–Witten 方程式の解全体の集合をこの作用による同値関係で割った空間を考えたいので次の命題を示しておく。

命題 3.5 Seiberg–Witten 方程式はゲージ変換に関して不変である。つまり、$(d_A, \psi) \in \mathcal{A}$ が Seiberg–Witten 方程式の解であるとき、任意のゲージ変換 $g \in \mathcal{G}$ が作用した $g(d_A, \psi)$ も Seiberg–Witten 方程式の解である。

証明 接続 d_A がゲージ変換 g により $d_{A'}$ に移ったとすると、(1.9) より $d_{A'} = d_A + gdg^{-1}$ と表される。$\psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)$ が、$D_A^+\psi = 0$ を満たしているとすると、

$$\begin{aligned}
D_{A'}^+(g\psi) &= \sum e_i \cdot d_{A'}(g\psi)(e_i) = \sum e_i \cdot \{d_A(g\psi)(e_i) + gdg^{-1}(g\psi)(e_i)\} \\
&= \sum e_i \cdot \{dg(e_i)\psi + gd_A\psi(e_i) + g(d(g^{-1}g)(e_i)\psi - g^{-1}(dg)(e_i)\psi)\} \\
&= \sum e_i \cdot (gd_A\psi(e_i)) \quad (\because g^{-1}g = 1 \text{ より、} d(g^{-1}g) = 0) \\
&= gD_A^+\psi = 0
\end{aligned}$$

次に、

$$\begin{aligned}
F_{A'} &= (d_{A'})^2 = (d_A + gdg^{-1})^2 = F_A + d_A \circ gdg^{-1} + gdg^{-1} \circ d_A + (gdg^{-1})^2 \\
&= F_A + d(gdg^{-1}) - (gdg^{-1})d_A + gdg^{-1} \circ d_A + (gdg^{-1})^2 \\
&= F_A + d(gdg^{-1}) + (gdg^{-1})^2 = F_A + (dg)(dg^{-1}) + gd^2g^{-1} + g(dg^{-1})g(dg^{-1})
\end{aligned}$$

ここで、g の作用は複素数の積で dg, dg^{-1} と可換であり、$d(gg^{-1}) = d1 = 0$ より、

$$d(gg^{-1}) = (dg)g^{-1} + g(dg^{-1}) = 0$$

が成り立ち、$g(dg^{-1}) = -g^{-1}(dg)$ となる。よって、

$$F_{A'} = F_A + (dg)(dg^{-1}) + g(dg^{-1})g(dg^{-1}) = F_A + (dg)(dg^{-1}) - g^{-1}(dg)g(dg^{-1}) = F_A$$

また、$g \in U(1)$ より、$|g| = 1$ であるから、$(g\psi)(g\psi)^* = g\bar{g}\psi\psi^* = |g|^2\psi\psi^* = \psi\psi^*$ が成り立ち、

$$\sigma(g\psi) = 2i\left((g\psi)(g\psi)^* - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g\psi)(g\psi)^*\right) = \sigma(\psi)$$

よって、$F_A^+ = \sigma(\psi)$ もゲージ変換に不変である。 ∎

Seiberg–Witten 方程式の解と、スカラー曲率 s との関係を示しておく。

命題 3.6 $s = s(p)$ を $p \in M$ におけるスカラー曲率とする。M のすべての点で $s > 0$ であれば Seiberg–Witten 方程式は、$\psi \equiv 0$ 以外の解をもたない。また (A, ψ) が Seiberg–Witten 方程式の解であれば、

$$\int_M |F_A^+|^2 dV \leq \int_M \frac{s^2}{32} dV$$

が成り立つ。ただし、dV は M の体積要素 (volume form) である。

証明　$\mathcal{A}$ 上の汎関数 $\mathcal{S}:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ を次で定義する。

$$\mathcal{S}(A,\psi)=\int_M(|D_A\psi|^2+|F_A^+-\sigma(\psi)|^2)dV$$

Seiberg–Witten 方程式 (3.6) の解において、この汎関数は極小値 0 をとる。ここで D_A の形式的自己共役性 (命題 2.37) と Weitzenböck's formula(定理 2.35) により、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(A,\psi) &= \int_M(|D_A\psi|^2+|F_A^+|^2-2\langle F_A^+,\sigma(\psi)\rangle+|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(\langle D_A\psi,D_A\psi\rangle+|F_A^+|^2+\left\langle F_A^+,i\textstyle\sum_{i<j}\langle\psi,e_i\cdot e_j\psi\rangle e_i\cdot e_j\right\rangle+|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(\langle {D_A}^2\psi,\psi\rangle+\sum_{i<j}\langle F_A^+,e_i\cdot e_j\rangle\langle ie_i\cdot e_j\psi,\psi\rangle+|F_A^+|^2+|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(\left\langle {D_A}^2\psi+\textstyle\sum_{i<j}F_A^+(e_i,e_j)(ie_i\cdot e_j\psi),\psi\right\rangle+|F_A^+|^2+|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(\langle\Delta_A\psi+\tfrac{s}{4}\psi,\psi\rangle+|F_A^+|^2+|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(\langle d_A\psi,d_A\psi\rangle+\frac{s}{4}\langle\psi,\psi\rangle+|F_A^+|^2+|\sigma(\psi)|^2)dV\quad(\because\text{命題 2.38 より})\\
&= \int_M(|d_A\psi|^2+\frac{s}{4}|\psi|^2+|F_A^+|^2+|\sigma(\psi)|^2)dV
\end{aligned}$$

最後の式は $s>0$ のとき、すべての項が 0 でなければ $\mathcal{S}(A,\psi)=0$ とはならない。よって、$s>0$ ならば $\psi=0$。

また命題 3.2 より、$|\sigma(\psi)|^2=\frac{1}{2}|\psi|^4$ であるから、$\mathcal{S}(A,\psi)=0$ であれば、

$$\begin{aligned}
\int_M|F_A^+|^2dV &= \int_M(-|d_A\psi|^2-\frac{s}{4}|\psi|^2-|\sigma(\psi)|^2)dV\le\int_M(-\frac{s}{4}|\psi|^2-|\sigma(\psi)|^2)dV\\
&= \int_M(-\frac{s}{4}|\psi|^2-\frac{1}{2}|\psi|^4)dV=\int_M\left(-\frac{1}{2}\left(|\psi|^2-\frac{s}{4}\right)^2+\frac{s^2}{32}\right)dV\\
&\le \int_M\frac{s^2}{32}dV
\end{aligned}$$

∎

3.2　モジュライ空間 (Moduli space)

Seiberg–Witten 理論は、Seiberg–Witten 方程式の解全体の空間をゲージ群で割ることで良い性質の空間を得て、さらにその空間の性質を調べることで 4 次元多様体の性質を見つけようとするものである。これから数節は、その解全体の空間をゲージ群で割った モジュライ空間の性質について調べていく。

先の節で定義した、$\mathcal{A}$ は、定理 1.4 より、L の U(1)-接続 d_{A_0} を 1 つ固定すると、

$$\mathcal{A}=\{(d_{A_0}-ia,\psi)|a\in\Omega^1(M),\ \psi\in\Gamma(W_+\otimes L)\}$$

と表すことができ、$\mathcal{A}$ は$\Omega^1(M)\oplus\Gamma(W_+\otimes L)$ をモデルとするアファイン空間の構造を持つ。このとき、ゲージ変換 $g\in\mathcal{G}$ の作用は (1.9) で示されたように、

$$g(d_{A_0}-ia,\psi)=(d_{A_0}-ia+gdg^{-1},g\psi)$$

と表される。また M が単連結の場合 (1.10) で見たように $g=e^{iu}$ を満たす実数値関数 u がとれて、

$$g(d_{A_0}-ia,\psi)=(d_{A_0}-i(a+du),e^{iu}\psi)$$

と表すことができる。従って実定数 c をとって $g'=e^{i(u+c)}$ を考えれば、

$$g'(d_{A_0}-ia,\psi)=(d_{A_0}-i(a+du),e^{i(u+c)}\psi)=(d_{A_0}-i(a+du),e^{iu}e^{ic}\psi) \tag{3.9}$$

となりスピノル場への作用は接続への作用と独立に大きさ 1 の複素数定数倍の自由度を持っている。

まず基点付きゲージ変換で移りあう$\mathcal{A}$ の元どうしを同値とみなして同値関係を定義し、同値類の集合を

$$\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{A}/\mathcal{G}_0$$

とおく。この同値類の代表元の選び方に関して次が示される。

命題 3.7 M は単連結とする。$\widetilde{\mathcal{B}}$ の各元 $[d_{A_0}-ia,\psi]$ に対して、その代表元 $(d_{A_0}-ia_0,\psi_0)\in\mathcal{A}$ として $\delta a_0=0$ を満たすものが唯一存在する。

証明 $<$ 存在 $>$
$[d_{A_0}-ia,\psi]$ の代表元は、$(d_{A_0}-i(a+du),e^{iu}\psi)$ の形をしている。$\delta(a+du)=0$ を満たす関数 $u\in\Omega^0(M)$ が存在することを示す。この条件は、$\delta u=0$ であることから、

$$\Delta u=d\delta u+\delta du=\delta du=-\delta a$$

となり Poisson 方程式の解の存在の問題となる。$\mathcal{H}^0(M)$は定数関数の集合であるから、その基底 1 と δa の内積をとると、M は境界 ∂M を持たないので Stokes の定理より、

$$(1,\delta a)=\int_M 1\wedge *\delta a=\int_M *(-*d*)a=-\int_{\partial M} *a=0$$

となり δa は$\mathcal{H}^0(M)$の直交補空間に入る。Hodge の定理 (定理 1.29) より、$\Omega^0(M)=\mathcal{H}^0(M)\oplus\Delta\Omega^0(M)$ であったので、ある $u\in\Omega^0(M)$ がとれて、$\Delta u=-\delta a$ となる。よって、$a_0=a+du,\ \psi_0=e^{iu}\psi$ とすれば $a_0,\ \psi_0$ が存在することが示される。

$<$ 一意性 $>$
もし、2 つの$\mathcal{A}$ の元

$$(d_{A_0}-ia_1,\psi_1),(d_{A_0}-ia_2,\psi_2)\in\mathcal{A}$$

で $\delta a_1=\delta a_2=0$ を満たすものが、ゲージ変換 $g=e^{iu}\in\mathcal{G}_0$ により同値関係にあるとする。このとき、$a_1=a_2+du$ と表される。ここで a_1-a_2 同士の内積をとると、

$$(a_1-a_2,a_1-a_2)=(du,a_1-a_2)=(u,\delta(a_1-a_2))=0$$

となり、$a_1 = a_2$が示された。よって $du = 0$ であるから、u は定数関数となる。$g \in \mathcal{G}_0$ より $g(p_0) = 1$ なので、$u(p_0) = 0$。ゆえに $u \equiv 0$ となり $g \equiv 1$ であるから、

$$(d_{A_0} - ia_1, \psi_1) = (d_{A_0} - ia_2, \psi_2)$$

∎

この命題により、M が単連結の場合$\mathcal{A}$ の線形部分集合

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(d_{A_0} - ia, \psi) | a \in \Omega^1(M),\ \psi \in \Gamma(W_+ \otimes L), \delta a = 0\}$$

の元が $\widetilde{\mathcal{B}}$ の元と 1 対 1 に対応することが分かった。

次に、一般のゲージ変換で同値関係を考える。S^1 を定数ゲージ変換の集合としたとき、$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \times S^1$ であったので、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ を考えるには $\widetilde{\mathcal{B}}/S^1 \cong \widetilde{\mathcal{A}}/S^1$ を考えればよい。

命題 3.8 $g \in S^1 \subset \mathcal{G}$ は $(d_{A_0} - ia, 0)$ 以外の$\widetilde{\mathcal{A}}$ の元に自由に作用する。

証明 $g \in S^1 \subset \mathcal{G}$ が $g(d_{A_0} - ia, \psi) = (d_{A_0} - ia, \psi)$ を満たすとする。g は定数であるから系 1.12 より接続を変えない。$g\psi = \psi$ であるから、$g = 1$ または$\psi = 0$。よって、$\psi \not\equiv 0$ であれば、$g \equiv 1$。 ∎

従って、

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$$

とおくと、$\mathcal{B}$ は $[d_{A_0} - ia, 0]$ において特異性を持つ。よってその特異性を除いた集合を次のように表す。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &= \{(d_{A_0} - ia, \psi) \in \mathcal{A} | \psi \neq 0\} \\ \widetilde{\mathcal{B}}^* &= \mathcal{A}^*/\mathcal{G}_0 \cong \{(d_{A_0} - ia, \psi) \in \mathcal{A} | \psi \neq 0, \delta a = 0\} \\ \mathcal{B}^* &= \mathcal{A}^*/\mathcal{G} \cong \widetilde{\mathcal{B}}^*/S^1 \end{aligned}$$

この$\mathcal{B}^*$ を無限次元多様体と考える為には、関数解析の理論と同様に適当なノルムによって完備化された空間としての位相を考える必要がある。そのためには 2.6 節で説明した Sobolev ノルムによる完備化を行った Sobolev 空間 $L^p_k(E)$ を用いる。

$\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{G}$ を Sobolev ノルムにより完備化した空間をそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^p_k &= \{(d_{A_0} - ia, \psi) | a \in L^p_k(T^*M),\ \psi \in L^p_k(W_+ \otimes L)\} \\ \widetilde{\mathcal{B}}^p_k \cong \widetilde{\mathcal{A}}^p_k &= \{(d_{A_0} - ia, \psi) | a \in L^p_k(T^*M),\ \psi \in L^p_k(W_+ \otimes L), \delta a = 0\} \\ \mathcal{G}^p_{k+1} &= L^p_{k+1}(\mathrm{End}(W_+ \otimes L)) \cap C^0(M, U(1)) \end{aligned}$$

と定義する。

$k + 1 > \frac{4}{p}$ のとき、$\mathcal{G}^p_{k+1}$ は無限次元 Lie 群となり、$\mathcal{A}^p_k$ に滑らかに作用することがソボレフの積定理 (定理 2.51) と (3.8) の作用の形から容易に分かり、$\mathcal{B}^*, \widetilde{\mathcal{B}}^*$ が定義できる。

以降本論文では特に断らない限り $\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ などは適当な、p, k に対する完備化を行ったものとする。

$\widetilde{\mathcal{B}}^*$ を無限次元 Banach 多様体と考え、$\mathcal{B}^* = \widetilde{\mathcal{B}}^*/S^1$ により位相を定義すれば、$\widetilde{\mathcal{B}}^*$ は底空間$\mathcal{B}^*$ の S^1 束と見なすことができる。(Banach 多様体については [4, Appendix] 参照)

これらの空間の部分集合として Seiberg–Witten 方程式を満たすものを考える。

定義 3.9 次の集合を**モノポールモジュライ空間** (monopole moduli space) と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{[A,\psi]\in\mathcal{B} \mid D_A^+\psi=0,\ F_A^+=\sigma(\psi)\}\\ \mathcal{M}_\phi &= \{[A,\psi]\in\mathcal{B} \mid D_A^+\psi=0,\ F_A^+=\sigma(\psi)+\phi\}\end{aligned}$$

$\mathcal{M}_\phi$ は、

$$\widetilde{\mathcal{M}_\phi} = \{(A,\psi)\in\widetilde{\mathcal{A}} \mid D_A^+\psi=0,\ F_A^+=\sigma(\psi)+\phi, \delta a=0\}$$

としたとき、$\mathcal{M}_\phi = \widetilde{\mathcal{M}_\phi}/S^1$ とも考えられる。 □

命題 3.5 より Seiberg–Witten 方程式はゲージ変換に関して不変であるので$\mathcal{M}$,$\mathcal{M}_\phi$ は well-defined である。

3.3 モジュライ空間のコンパクト性 (Compactness of the moduli space)

Seiberg–Witten 理論が Donaldson の理論よりも簡単である最も大きな理由はモジュライ空間がコンパクトになることにある。

この節では$\mathcal{M}$,$\mathcal{M}_\phi$ がコンパクトになることを示すが、その証明は関数解析で使われる手法を援用する。

以下の$\mathcal{M}$ のコンパクト性の証明は、P.B.Kronheimer と T.S.Mrowka [9] によるものである。

補題 3.10 $(A,\psi)\in\mathcal{M}$ が$\psi\not\equiv 0$であるとする。$s(p)$ を $p\in M$ におけるスカラー曲率、$p_0\in M$ を $|\psi|$ が最大値をとる点、つまり $|\psi(p_0)|=\max_{p\in M}|\psi(p)|$ とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$|\psi(p_0)|^2 \le -\frac{1}{4}s(p_0)$$

証明 正規直交枠 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ を、点 $p\in M$ において、$\nabla^A_{e_i}e_j(p)=0$ となるようにとることができる。このとき、関数に対する Laplacian Δ と $\Gamma(W_+\otimes L)$ のベクトル束 Laplacian Δ_Aは、

$$\Delta = -\sum_{i=1}^4 e_i^2, \quad \Delta_A = -\sum_{i=1}^4 \nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}$$

と表される。$e_i\langle\psi,\psi\rangle = \left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\psi\right\rangle + \left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle$ であるから、

$$\begin{aligned}e_i^2\langle\psi,\psi\rangle &= e_i\left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\psi\right\rangle + e_i\left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle = \left\langle\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi,\psi\right\rangle + 2\left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle + \left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle\\ &= \left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle + \overline{\left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle} + 2\left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle\\ &= 2\mathrm{Re}\left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle + 2\left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle\end{aligned}$$

となり、

$$\frac{1}{2}\Delta|\psi|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 e_i^2\langle\psi,\psi\rangle = -\sum_{i=1}^4(\mathrm{Re}\left\langle\psi,\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle + \left\langle\nabla^A_{e_i}\psi,\nabla^A_{e_i}\psi\right\rangle) = -\langle d_A\psi,d_A\psi\rangle + \mathrm{Re}\left\langle\psi,\Delta_A\psi\right\rangle$$

p_0 で $|\psi|^2$ が最大値をとるので極大でもあり $\Delta|\psi(p_0)|^2 \geq 0$ となる。よって p_0 において、

$$\mathrm{Re}\ \langle\psi, \Delta_A\psi\rangle = \frac{1}{2}\Delta|\psi(p_0)|^2 + \langle d_A\psi, d_A\psi\rangle \geq \langle d_A\psi, d_A\psi\rangle \geq 0 \tag{3.10}$$

が成り立つ。

ψ は Seiberg–Witten 方程式の解なので、$D_A\psi = 0$。Weitzenböck の公式 (定理 2.35) より、

$$0 = {D_A}^2\psi = \Delta_A\psi + \frac{s}{4}\psi - \sum_{i<j} F_A(e_i \cdot e_j)(ie_i \cdot e_j \cdot \psi)$$

が成り立つ。ψ との内積をとれば Seiberg–Witten 方程式 (3.5) の第 2 式を使って、

$$\begin{aligned}
\langle\Delta_A\psi, \psi\rangle &= -\frac{s}{4}\langle\psi, \psi\rangle + \sum_{i<j} F_A^+(e_i \cdot e_j)\langle ie_i \cdot e_j \cdot \psi, \psi\rangle \\
&= -\frac{s}{4}\langle\psi, \psi\rangle + \sum_{i<j} F_A^+(e_i \cdot e_j)(-2\overline{F_A^+(e_i \cdot e_j)}) \\
&= -\frac{s}{4}|\psi|^2 - 2\sum_{i<j} |F_A^+(e_i \cdot e_j)|^2
\end{aligned}$$

となる。最後の式は各項が実数であるから $\langle\Delta_A\psi, \psi\rangle$ も実数であり、$\langle\Delta_A\psi, \psi\rangle = \mathrm{Re}\ \langle\Delta_A\psi, \psi\rangle$ が成り立ち (3.10) が適用できるので

$$-\frac{s}{4}|\psi|^2 - 2\sum_{i<j} |F_A^+(e_i \cdot e_j)|^2 \geq 0$$

が成り立つ。よって、命題 3.2 より $|\sigma(\psi)(p_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi(p_0)|^2$ であるから、

$$-\frac{s(p_0)}{4}|\psi(p_0)|^2 \geq 2|F_A^+(p_0)|^2 = 2|\sigma(\psi)(p_0)|^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi(p_0)|^2\right)^2 = |\psi(p_0)|^4$$

よって、$-\frac{s(p_0)}{4} \geq |\psi(p_0)|^2$ が成り立つ。 ∎

系 3.11 $\{|\psi|\ |(A, \psi) \in \mathcal{M}\ \}$ は有界である。

証明 $s(p)$ は M 上の実数値関数で、M はコンパクトであるから最小値 s_0 が存在する。よって補題 3.10 より任意の $(A, \psi) \in \mathcal{M}$ に対して $|\psi|$ が p_0 で最大値をとるとすれば、

$$|\psi|^2 \leq |\psi(p_0)|^2 \leq -\frac{s(p_0)}{4} \leq -\frac{s_0}{4}$$

となり題意が示される。 ∎

定理 3.12 (コンパクト性定理 (Compactness Theorem)) M を単連結コンパクト 4 次元リーマン多様体とする。任意の $\phi \in \Omega_+^2(M)$ に対して、$\mathcal{M}_\phi$ はコンパクトである。

証明　d_{A_0} なる接続を固定する。$\mathcal{A}{}_k^p$ は可分で第２加算公理を満たすので点列コンパクトであればコンパクトである。よって摂動 Seiberg–Witten 方程式の解の任意の列 $\{[d_{A_0} - ia_j, \psi_j]\}$ が収束する部分列を持つことを示せばよい。

ゲージ条件 $\delta a = 0$ を摂動 Seiberg–Witten 方程式 (3.7) に付け加えて $\widetilde{\mathcal{A}}/S^1$ における方程式と考えると、定理 1.8, 命題 2.40 より、

$$\begin{cases} D_{A_0}\psi - ia\psi = 0 \\ F_{A_0}^+ + (da)^+ = \sigma(\psi) + \phi \\ \delta a = 0 \end{cases}$$

なる連立方程式となる。これを書き換えると、

$$\begin{cases} D_{A_0}\psi = ia\psi \\ (da)^+ = \sigma(\psi) + \phi - F_{A_0}^+ \\ \delta a = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

となる。各式の左辺を見ると、L 係数の Dirac 作用素D_{A_0}と、W_+ 係数の Dirac 作用素

$$\delta + d^+ : \Omega^1(M) \to \Omega^0(M) \oplus \Omega^2_+(M)$$

が現れている。

系 1.35 より、

$$\ker(d^+ + \delta) = \mathcal{H}^1(M)$$

M は単連結で $H^1(M;\mathbb{R}) = 0$ なので Hodge の定理 (定理 1.29) より、

$$\ker(d^+ + \delta) = \mathcal{H}^1(M) = H^1(M;\mathbb{R}) = 0 \tag{3.12}$$

となる。

ここで、Seiberg–Witten 方程式 (3.11) の解の列、$\{(a_i, \psi_i)\}$ が L_k^p において有界であることを、数学的帰納法の一種 (bootstrap 法) で証明する。

そのために必要な帰納的性質を準備しておく。

定理 2.52 を (3.11) の第２式、第３式に適応すると、(3.12) より ker が自明な場合となり、

$$\|a_j\|_{p,k+1} \le c\|(d^+ + \delta)a_j\|_{p,k} = c\|\sigma(\psi_j) + \phi - F_{A_0}^+\|_{p,k} \le c(\|\sigma(\psi_j)\|_{p,k} + \|\phi\|_{p,k} + \|F_{A_0}^+\|_{p,k}) \tag{3.13}$$

が任意の p, k について成り立つ。$\|\phi\|_{p,k}, \|F_{A_0}^+\|_{p,k}$ は定数であるから、

(A)「$\sigma(\psi_j)$ が L_k^p で有界 $\Rightarrow$ a_j は L_{k+1}^p で有界」

であることが言える。

定理 2.52 を (3.11) の第１式に適応すると、

$$\|\psi_j\|_{p,k+1} \le c(\|D_{A_0}\psi_j\|_{p,k} + \|\psi_j\|_{p,k}) = c(\|ia_j\psi_j\|_{p,k} + \|\psi_j\|_{p,k})$$

が成り立ち、

$$\text{(B)「}a_j\psi_j \text{ と } \psi_j \text{ が } L^p_k \text{ で有界} \Rightarrow \psi_j \text{ は } L^p_{k+1} \text{ で有界」}$$

であることが言える。

$p>4$ のとき、$k\geq 1$ であれば、$k-\frac{4}{p}>0$ が成り立ち、Sobolev の積定理 (定理 2.51) により、

$$\text{(C)「}a_j \text{ と } \psi_j \text{ が } L^p_k \text{ で有界} \Rightarrow a_j\psi_j \text{ は } L^p_k \text{ で有界」}$$

が成り立つ。

(3.1) より、

$$\|\sigma(\psi_j)\|_{p,k} = \|2i(\psi_j\psi_j^* - \frac{1}{2}|\psi_j|^2 I)\|_{p,k} \leq 2\|\psi_j\psi_j^*\|_{p,k} + \frac{1}{2}|\psi_j|^2\|I\|_{p,k}$$

が成り立つ。よって $p>4$ のとき、$k\geq 1$ であれば、$k-\frac{4}{p}>0$ が成り立ち、Sobolev の積定理 (定理 2.51) により、ψ_j が L^p_k で有界であれば $\psi_j\psi_j^*$ も L^p_k で有界となり、$|\psi_j|$ は系 3.11 より有界であったから

$$\text{(D)「}\psi_j \text{ が } L^p_k \text{ で有界} \Rightarrow \sigma(\psi_j) \text{ は } L^p_k \text{ で有界」}$$

が言える。

また一般に C^0 で有界であれば、$\|\cdot\|_{p,0}$ の定義から L^p_0 においても有界である。

さて実際の bootstrap 法の証明に入る。

系 3.11 より、ψ_j は、C^0 で有界であり任意の p について L^p_0 においても有界となる。(D) により $\sigma(\psi_j)$ も L^p_0 においても有界となり、(A) により a_j は L^p_1 において有界となる。

Sobolev の埋め込み定理 (定理 2.49) より、$p>4$ のとき $1-\frac{4}{p}>0$ で、$\|a_j\|_{C^0}\leq c\|a_j\|_{L^p_1}$ となり a_j は C^0 において有界となる。従って a_j, ψ_j が共に C^0 で有界となったので、積 $a_j\psi_j$ は C^0 において有界となり L^p_0 においても有界である。

$a_j\psi_j$ と ψ_j が L^p_0 で有界となったので (B) により ψ_j は L^p_1 で有界となる。

a_j,ψ_j が L^p_1 で有界となったので、$p>4, k\geq 1$ で成り立つ次の論理展開

$$a_j,\psi_j \text{が } L^p_k \text{で有界} \overset{(C)(D)}{\Longrightarrow} \psi_j, a_j\psi_j, \sigma(\psi_j) \text{ が } L^p_k \text{で有界} \overset{(A)(B)}{\Longrightarrow} a_j,\psi_j \text{が } L^p_{k+1} \text{で有界}$$

を繰り返し適応して、a_j,ψ_j は $p>4, k\geq 1$ である全ての p,k に対して L^p_k で有界となる。

各 k に対して、a_j,ψ_j は L^p_{k+1} で有界であるから、Rellich の定理 (定理 2.50) により L^p_k で収束する部分列 $\{(d_{A_0}-ia_{j_k},\psi_{j_k})\}$ がとれる。

従って、摂動 Seiberg–Witten 方程式 (3.11) の解の任意の列 $S=\{(d_{A_0}-ia_j,\psi_j)\}$ は L^p_1 で有界であるから L^p_0 で収束する部分列 $S_0=\{(d_{A_0}-ia_{j_0},\psi_{j_0})\}$ がとれる。S_0 は L^p_2 で有界であるから L^p_0 で収束する部分列 $S_1=\{(d_{A_0}-ia_{j_1},\psi_{j_1})\}$ がとれる。同様の操作を繰り返し、L^p_k で収束する部分列 $S_k=\{(d_{A_0}-ia_{j_k},\psi_{j_k})\}$ がとれる。

このとき、$S_\infty=\{(d_{A_0}-ia_{j_j},\psi_{j_j})\}$ をとれば、任意の L^p_k で収束する部分列となる。Sobolev の埋め込み定理 (定理 2.49) より、L^p_k で収束する列は C^ℓ でも収束する。従って S_∞ は任意の ℓ で収束するので C^∞ でも収束する。ゆえに任意の C^∞ クラスの列 S が収束する部分列を持つので $\mathcal{M}_\phi$ はコンパクトである。 ∎

この定理の証明では単連結を仮定していたが、単連結でなくても $\mathcal{M}_\phi$ はコンパクトとなることが知られている。

3.4 モジュライ空間の構造 (Structure of the moduli space)

$\mathcal{M}_\phi$ がコンパクトであることは Seiberg–Witten 理論において重要な性質であるが、もう一つの重要な性質として$\mathcal{M}_\phi$ が多様体の構造を持つことがあげられる。

この節では、ほとんどすべての $\psi \in \Omega^2_+(M)$ に対して、$\mathcal{M}_\phi$ が C^∞ 多様体となることを示す。そのために、有限次元の場合の類似の議論を行う。つまりサード の定理 (Sard Theorem)

定理 3.13 $M^m,\ N^n$ をそれぞれ次元が m,n の C^∞ 多様体とする。

$$F : M^m \to N^n \quad C^\infty\text{写像}$$

の臨界値の集合は測度 0 である。 □

により、ほとんどすべての点 $p \in N^n$ は正則値 (regular value) であり、そのとき陰関数定理により、$F^{-1}(p)$ は M^m の部分多様体となるという議論である。

しかし我々が対象とする$\mathcal{A}$ などは無限次元 Banach 多様体であり Lebesgue 測度が定義できず、Sard の定理もそのままでは成り立たないそのためいくつかの準備を行う。

まず測度 0 の代わりとなる generic を定義する。

定義 3.14 集合 A は開稠密集合の族 $\{A_i\}_{i\in I}$ $(I \subset \mathbb{N})$ により、

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

と表されるとき**ベール集合** (Baire set) と呼ぶ。 □

Baire 集合については次の定理が成り立つ。

定理 3.15 (ベールのカテゴリー定理 (Baire's category Theorem)) 完備距離空間内の Baire 集合は稠密である。 □

定義 3.16 集合 A の要素 a に関する性質 P に対して、集合 $\{a \in A | a$ で P が成り立つ $\}$ が A のある Baire 集合を部分集合として持つとき「P は **generic**(な性質) である」とか「generic な要素 $a \in A$ で P が成り立つ」という。 □

さらに Fredholm 写像の概念が必要となる。まず Banach 空間の間の Fredholm 作用素を定義する。

定義 3.17 E_1, E_2 を係数体 $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ の反射的バナッハ空間 (reflexive Banach space) とする。(i.e. $(E_i^*)^* = E_i$)

$$T : E_1 \to E_2 \quad \text{連続線形写像}$$

が次の性質をすべて満たすとき線形**フレド ホルム作用素** (Fredholm operator) と言う。

1. $\dim(\ker T) < +\infty$
2. $\mathrm{Im}\ T$ が閉集合
3. $\dim(\mathrm{coker} T) = \dim(E_2/\mathrm{Im}\ T) < +\infty$

□

定義 3.18 $T : E_1 \to E_2$ を Fredholm 作用素とするとき、係数体 $\mathbb{K}$ の**フレド ホルム指標** (Fredholm index) は、

$$\mathrm{index}_F\ T = \dim_{\mathbb{K}}(\ker T) - \mathrm{codim}\ _{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\ T)$$

で定義される整数のことである。 □

例えば前節で考えた、$\Gamma(W_+ \otimes L)$ を Sobolev ノルムにより完備化した $L^p_k(W_+ \otimes L)$ 上に拡張した Dirac 作用素

$$D_A : L^p_{k+1}(W_+ \otimes L) \to L^p_k(W_- \otimes L)$$

は任意の p, k に対して Fredholm 作用素となることが知られている。さらにその際の実数上の次元の Fredholm index は、Atiyah-Singer Index 定理 (定理 2.55) で計算した複素数上の次元の index のちょうど 2 倍となる。より一般に次の定理が成り立つ。([10]Theorem5.2 参照)

定理 3.19 コンパクト多様体 M 上のベクトル束を E, F とする。$T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ を m 階楕円型微分作用素とすると m 以上の任意の整数 s に対してその完備化

$$T : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}$$

は Fredholm 作用素で index は s に依らない。 □

次に上の定義を用いて Banach 多様体の間の Fredholm 写像を定義する。

定義 3.20 M_1, M_2 を Banach 多様体とする。C^∞写像

$$F : M_1 \to M_2$$

は、任意の $p \in M_1$ に対し、

$$dF(p) : T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$$

が $\mathrm{index}_F\ dF = k$ の線形 Fredholm 作用素になるとする。このとき F を指標 k の**フレド ホルム写像** (Fredholm map) であると言う。
M_1, M_2 が有限次元であれば F は自動的に Fredholm 写像で、$\mathrm{index}_F\ F = \dim M_1 - \dim M_2$ となる。 □

さらに次の用語を定義しておく。

定義 3.21 M_1, M_2 を Banach 多様体とする。C^∞写像 $F : M_1 \to M_2$ において、$q \in M_2$ に対して $dF(p)$ が全射にならないような $p \in F^{-1}(q)$ が存在するとき q は**臨界値** (critical value) であるという。また $q \in M_2$ が臨界値でないとき**正則値** (regular value) であるという。従って $F^{-1}(q) = \emptyset$ であるような q は正則値である。 □

これらの準備の元に次の Banach 多様体に拡張された Sard の定理を示す。

定理 3.22 (サード-スメールの定理 (Sard-Smale Theorem)[15]) M_1, M_2 を可分 Banach 多様体、$F : M_1 \to M_2$を C^k-Fredholm 写像とする。ただし、$k > \max(0, \mathrm{index}_F\ F)$ とする。このとき、正則値全体の集合は M_2 において Baire 集合となる。 □

定理 3.22 は同じ条件の下で「M_2 の generic な点は正則値である。」とも言える。
次に以降の証明において頻繁に使う微分方程式の理論における定理を引用しておく。

定理 3.23 (一意接続定理 (Unique Continuation Theorem)) M を連結な多様体とする。$\psi \in \Gamma(W \otimes L)$ が $D_A\psi = 0$ を満たすとする。ある開集合 $U \subset M$ がとれて、U の任意の点 $p \in U$ において $\psi(p) = 0$が成り立つならば、$\psi \equiv 0$である。
また $\psi \in \Gamma(W_\pm \otimes L)$ で $D_A^\pm \psi = 0$ を満たすものについても同様に成り立つ。 □

証明は [1] 及び [2] 参照のこと。
これらの準備により$\mathcal{M}_\phi$ が多様体となることを証明する。

補題 3.24 generic な接続 A に対して、

$$\mathrm{index}\ D_A^+ \geq 0 \Rightarrow D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes L) \to \Gamma(W_- \otimes L) \text{は全射}$$

が成り立つ。

証明 多様体$\mathcal{A}$ 上の写像

$$F_0 : \mathcal{A}^* \to \Gamma(W_- \otimes L), \quad F_0(A, \psi) = D_A^+\psi$$

を考える。D_A^+ は Fredholm 写像だったので、F_0 も Fredholm 写像である。(A, ψ) における F_0 の微分は、

$$\begin{aligned} dF_0(A,\psi)(a,\psi') &= \frac{d}{dt} D_{A+ita}^+(\psi + t\psi')\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(D_A^+(\psi + t\psi') - ita(\psi + t\psi'))\Big|_{t=0} \\ &= (D_A^+\psi' - ia(\psi + 2t\psi'))\Big|_{t=0} \\ &= D_A^+\psi' - ia \cdot \psi \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。
⟨ **STEP1**⟩ $(A, \psi) \in F_0^{-1}(0) \subset \mathcal{A}^*$ (つまり Seiberg–Witten 方程式の第 1 式 (3.6-a) の解で $\psi \not\equiv 0$) に対して $dF_0(A, \psi)$ は全射になることを示す。
写像

$$h : T^*M \to W_- \otimes L, \quad h(a) = a \cdot \psi$$

を考える。Clifford 積の性質より、$a \cdot a \cdot \psi = -|a|^2\psi$ なので $a \cdot \psi = 0$ かつ$\psi \neq 0$ ならば $|a|^2\psi = 0$ から $|a|^2 = 0$ となるので $a = 0$が示される。したがって、$\psi(p) \neq 0$ なる点 p においては $h|_{T_p^*M}$ はファイバー間で単射である。さらに T^*M のファイバーの次元は実 4 次元で $W_+ \otimes L$ はファイバーの次元が複素 2 次元だったので線形写像 $h|_{T_p^*M}$ はファイバー間の同型となる。
ψ の連続性より $\psi \not\equiv 0$ であれば、ある開集合 $U \subset M$ がとれて、任意の $p \in U$ に対して $\psi(p) \neq 0$ とすることができる。このような U を台とする切断に関して $h|_U$ は切断の同型を導く。

任意に$\sigma \in (\mathrm{Im}\ dF_0(A,\psi))^{\perp} \subset L^2(W_-\otimes L)$をとる。$D_A^+\psi' = 0$なる$\psi'$に対しては、$dF_0(A,\psi)(a,\psi') = -ia\cdot\psi \in \mathrm{Im}\ dF_0(A,\psi)$となるので$U$上で0でない任意の1次微分形式$a$に対して$L^2$内積によって

$$(-a\cdot\psi,\sigma) = 0 \tag{3.15}$$

が成り立つ。hにより$\Omega^1(M)|_U$と$L^2(W_-\otimes L|_U)$が同型であったので、(3.15)はU上で0でない任意の$\tau \in L^2(W_-\otimes L|_U)$に対して

$$(\tau,\sigma) = 0 \tag{3.16}$$

と書き直せる。0でない任意の元と内積をとって0なので、$\sigma \equiv 0$ (on U)であることがわかる。

また$dF_0(A,\psi)(0,\psi') = D_A^+\psi' \in \mathrm{Im}\ dF_0(A,\psi)$であるから任意の$\psi' \in L^2(W_-\otimes L)$に対して$D_A^+\psi' \perp \sigma$であるので

$$(D_A^+\psi',\sigma) = (\psi', D_A^-\sigma) = 0$$

任意の元と内積をとって0かつ、F_0はFredholm写像だったので$\mathrm{Im}\ dF_0(A,\psi)$は閉集合となり、$D_A^-\sigma \equiv 0(\text{on } M)$となる。よって一意接続定理(定理3.23)より、$\sigma \equiv 0$ (on M)が示されるので、$dF_0(A,\psi)$は全射となる。

これにより$0 \in \Gamma(W_-\otimes L)$は$F$の正則値となったので陰関数定理により

$$\mathcal{N}_0 = \{(A,\psi) \in \mathcal{A}^*\ |F_0(A,\psi) = D_A^+\psi = 0\}$$

は$\mathcal{A}$の部分多様体となり、$(A,\psi)\quad(\psi \not\equiv 0)$における接ベクトル空間は、

$$T_{(A,\psi)}\mathcal{N}_0 = \{(a,\psi') \in \Omega^1(M)\oplus\Gamma(W_+\otimes L)|D_A^+\psi' - ia\cdot\psi = 0\}$$

となる。

〈 **STEP2**〉射影

$$\pi_0 : \mathcal{N}_0 \to \overline{\mathcal{A}}\ , \quad \pi_0(A,\psi) = A$$

がFredholmであることを示す。

$$\ker(d\pi_{0(A,\psi)}) = \{(a,\psi') \in T_{(A,\psi)}\mathcal{N}_0 | a \equiv 0\}$$

であるが、$a \equiv 0$であれば$D_A^+\psi' - ia\cdot\psi = 0$より直ちに$D_A^+\psi' = 0$である。逆に$D_A^+\psi' = 0$であれば$a\cdot\psi = 0$となるが、$D_A\psi = 0$が成り立っているので開集合上で$\psi \equiv 0$となれば、一意接続定理より$M$全体で$\psi \equiv 0$となる。よって$\psi \equiv 0$となるような開集合は存在しないので$a \equiv 0$となる。従って、

$$\ker(d\pi_{0(A,\psi)}) = \ker D_A^+$$

である。

ここで、各空間の完備化の次元を明確にして議論を進める。$F_0 : \mathcal{A}^*\ {}^2_{k+1} \to L^2_k(W_-\otimes L)$とすると$h$は0階の写像なので、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\ d\pi_{0(A,\psi)} &= \{a \in L^2_{k+1}(T^*M)|a\cdot\psi(=\frac{1}{i}D_A^+\psi') \in \mathrm{Im}\ D_A^+ \subset L^2_k(W_-\otimes L)\} \\
&= \{a \in L^2_{k+1}(T^*M)|h(a) \in \mathrm{Im}\ D_A^+ \subset L^2_k(W_-\otimes L)\} \\
&= L^2_{k+1}(T^*M)\cap h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+1} \to L^2_k))
\end{aligned}$$

$L^2_{k+1} \subset L^2_k$ であるから、

$$h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+2} \to L^2_{k+1})) \subset L^2_{k+1}(T^*M) \cap h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+1} \to L^2_k))$$

は明らか。任意に $a \in L^2_{k+1}(T^*M) \cap h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+1} \to L^2_k))$ をとると $h(a) = D_A^+\psi$ なる $\psi \in L^2_{k+1}(W_+ \otimes L)$ がとれて

$$h(a) = D_A^+\psi \in L^2_{k+1}(W_- \otimes L)$$

が成り立つ。よって系 2.53 より $\psi \in L^2_{k+2}(W_- \otimes L)$ となり、

$$a \in h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+2} \to L^2_{k+1}))$$

が成り立つ。よって

$$h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+2} \to L^2_{k+1})) = L^2_{k+1}(T^*M) \cap h^{-1}(\mathrm{Im}\ (D_A^+ : L^2_{k+1} \to L^2_k)) = \mathrm{Im}\ d\pi_{0(A,\psi)}$$

つまり $\mathrm{Im}\ d\pi_{0(A,\psi)} \cong \mathrm{Im}\ D_A^+$ が成り立つ。

D_A^+ は Fredholm 作用素だったので、$d\pi_{0(A,\psi)}$ も Fredholm 作用素となり、π_0 は Fredholm 写像となる。またその指数は、

$$\mathrm{index}_F\ d\pi_{0(A,\psi)} = \mathrm{index}_F\ D_A^+$$

である。

A をπ_0の正則値とすると${\pi_0}^{-1}(A)$ は$\mathcal{N}_0$の部分多様体か空集合となる。

${\pi_0}^{-1}(A) = \emptyset$ の場合は ${\pi_0}^{-1}(A) = \ker D_A^+ - \{0\}$ より $\ker D_A^+ = \{0\}$ となる。仮定より $\mathrm{index}\ D_A^+ \geq 0$ であるから

$$2\mathrm{index}\ D_A^+ = \mathrm{index}_F\ D_A^+ = 0 - \dim\mathrm{coker}\ D_A^+ \geq 0$$

より $\mathrm{coker}\ D_A^+ = \{0\}$ が言える。

$\mathcal{N}_0$の部分多様体の場合は仮定より $\mathrm{index}_F\ D_A^+ \geq 0$ であるから$\mathcal{N}_0$の次元は $\mathrm{index}_F\ D_A^+$ であり、${\pi_0}^{-1}(A) \cup \{A, 0\}$ が $D_A^+\psi = 0$ の解空間となる。よって

$$\dim\ker D_A^+ = \dim({\pi_0}^{-1}(A) \cup \{A, 0\}) = \mathrm{index}_F\ D_A^+ = \dim\ker D_A^+ - \dim\mathrm{coker}\ D_A^+$$

なので、$\mathrm{coker}\ D_A^+ = \{0\}$ が言える。

よって D_A^+ は全射となる。

∎

次に $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ が向き付けられた多様体であることを示す。

定理 3.25 (横断正則性定理 (Transversality Theorem)) M を向き付けられたコンパクト単連結４次元リーマン多様体で$Spin^c$-構造 を持つとする。M は $b_+ \geq 1$ かつ、$Spin^c$-構造 から得られた Dirac 作用素 D_A についての指数 $\mathrm{index}\ D_A^+ > 0$ であるとする。このとき generic な自己双対２次微分形式 $\phi \in \Omega^2_+(M)$ に対して、$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ は空集合か滑らかな多様体で、その次元は

$$\dim\widetilde{\mathcal{M}}_\phi = 2\mathrm{index}\ D_A^+ - b_+ = -\frac{\tau(M)}{4} + c_1^2(L)[M] - b_+$$

で与えられる。

証明　【$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ が多様体であることの証明】　写像 $F:\widetilde{\mathcal{B}}\ \times\Omega^2_+(M)\to\Gamma(W_-\otimes L)\times\Omega^2_+(M)$ を

$$F(A,\psi,\phi)=(D_A^+\psi,F_A^+-\sigma(\psi)-\phi)$$

で定義すると、摂動 Seiberg–Witten 方程式の解は $F(A,\psi,\phi)=0$ を満たす。(A,ψ,ϕ) における F の微分を計算すると、第 1 成分は (3.14) と同じで、第 2 成分は、

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(F^+_{A-ita}) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(F^+_A+tda^+)=da^+\\
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\phi+t\phi') &= \phi'\\
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\psi+t\psi')(\psi+t\psi')^* &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\begin{pmatrix}\psi_1+t\psi_1'\\ \psi_2+t\psi_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\psi_1+t\psi_1'} & \overline{\psi_2+t\psi_2'}\end{pmatrix}\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\begin{pmatrix}|\psi_1|^2+t(\psi_1\bar{\psi}_1'+\psi_1'\bar{\psi}_1)+t^2|\psi_1'|^2 & \psi_1\bar{\psi}_2+t(\psi_1\bar{\psi}_2'+\psi_1'\bar{\psi}_2)+t^2\psi_1'\bar{\psi}_2'\\ \psi_2\bar{\psi}_1+t(\psi_2\bar{\psi}_1'+\psi_2'\bar{\psi}_1)+t^2\psi_2'\bar{\psi}_1' & |\psi_2|^2+t(\psi_2\bar{\psi}_2'+\psi_2'\bar{\psi}_2)+t^2|\psi_2'|^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\psi_1\bar{\psi}_1'+\psi_1'\bar{\psi}_1 & \psi_1\bar{\psi}_2'+\psi_1'\bar{\psi}_2\\ \psi_2\bar{\psi}_1'+\psi_2'\bar{\psi}_1 & \psi_2\bar{\psi}_2'+\psi_2'\bar{\psi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\psi}_1' & \bar{\psi}_2'\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\psi}_1' & \bar{\psi}_2'\end{pmatrix}\right)^*\\
&= 2(\text{Hermit part }\psi\psi'^*)\\
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\sigma(\psi+t\psi') &= 2i(\text{Trace free part }\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\psi+t\psi')(\psi+t\psi')^*)\\
&= 4i(\text{Trace free Hermit part }\psi\psi'^*)\\
&= 2i\begin{pmatrix}\frac{(\psi_1\bar{\psi}_1'+\psi_1'\bar{\psi}_1)-(\psi_2\bar{\psi}_2'+\psi_2'\bar{\psi}_2)}{2} & \psi_1\bar{\psi}_2'+\psi_1'\bar{\psi}_2\\ \psi_2\bar{\psi}_1'+\psi_2'\bar{\psi}_1 & \frac{(\psi_2\bar{\psi}_2'+\psi_2'\bar{\psi}_2)-(\psi_1\bar{\psi}_1'+\psi_1'\bar{\psi}_1)}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と計算されるので、

$$\sigma(\psi,\psi')=2i(\text{Trace free Hermit part }\psi\psi'^*)$$

なる写像を定義すると、

$$dF(A,\psi,\phi)(a',\psi',\phi')=(D_A^+\psi'-ia\cdot\psi,(da)^+-2\sigma(\psi,\psi')-\phi')$$

と表される。

　まず適当な条件の下で、0 が F の正則値となることを示す。

　(A,ψ,ϕ) が $\psi\not\equiv 0$ で $F(A,\psi,\phi)=0$ の解であれば、$dF(A,\psi,\phi)$ は全射であることを示す。$a=\psi'=0$ で固定して ϕ' を動かせば、$dF(A,\psi,\phi)$ は

$$dF(A,\psi,\phi)(0,0,\phi')=(0,-\phi')$$

となるので $\{0\}\times\Omega^2_+(M)$ の上への写像となる。よって $dF(A,\psi,\phi)$ の第 1 成分が $\Gamma(W_-\otimes L)$ の上への写像であることを示せばよい。

　切断 $(\sigma,0)\in L^2((W_-\otimes L)\oplus\wedge^2_+)$ が L^2 内積に関して

$$(\sigma,0)\perp dF(A,\psi,\phi)(T_{[A,\psi]}\widetilde{\mathcal{B}}\ \times\{0\})$$

を満たすとする。補題 3.24 の $\langle$ **STEP1**$\rangle$ の議論により、M 上で $\sigma\equiv 0$ が成り立つ。よって $dF(A,\psi,\phi)$ の第 1 成分が $\Gamma(W_-\otimes L)$ の上への写像となり、$dF(A,\psi,\phi)$ は $\psi\not\equiv 0$ のとき全射である。

ここで、命題 1.36 で定義した $\Pi = \{\phi \in \Omega^2_+(M) | \exists d_{2A} : L^2$の接続 s.t. $\phi = F^+_A\}$ を考えると、仮定から $b_+ > 0$ なので命題 1.36 より Π は$\Omega^2_+(M)$ より次元が低いアフィン空間となり $\Omega^2_+(M) - \Pi$ は開集合で稠密となる。$\mathcal{U} = \Omega^2_+(M) - \Pi$ とおくと、$\phi \in \mathcal{U}$ に対して $F(A,\psi,\phi) = 0$ であれば、$F^+_A - \sigma(\psi) - \phi = 0$ となるが、$\mathcal{U}$ の元に対しては $F^+_A - \phi = 0$ とはならないので、$\psi \not\equiv 0$ である。

$\psi \not\equiv 0$ なる $(A,\psi,\phi) \in F^{-1}(0)$ については dF は全射であったから、$dF(A,\psi,\phi)$ は任意の $(A,\psi,\phi) \in F^{-1}_{\widetilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{U}}(0)$ について全射となる。よって陰関数定理より

$$\mathcal{N} = \{(A,\psi,\phi) \in \widetilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{U} | F(A,\psi,\phi) = 0\}$$

なる$\mathcal{N}$ は $\widetilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{U}$ の部分多様体となる。ただし、実際は $(A,\psi,\phi) \in \mathcal{N}$ については $\psi \not\equiv 0$ であり、$\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{B}}^* \times \mathcal{U}$ である。

$\mathcal{N}$ の (A,ψ,ϕ) における接ベクトル空間は $\{(a,\psi',\phi') | dF(A,\psi,\phi)(a,\psi',\phi') = 0\}$ であるから、

$$T_{(A,\psi,\phi)}\mathcal{N} = \{(a,\psi',\phi') | D^+_A\psi' - ia\cdot\psi = 0, (da)^+ - 2\sigma(\psi,\psi') - \phi' = 0, \delta a = 0\}$$

と表される。

次に

$$\pi : \mathcal{N} \to \Omega^2_+(M), \quad \pi(A,\psi,\phi) = \phi \tag{3.17}$$

なる写像を考える。この π により π の正則値 ϕ に対して $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi = \pi^{-1}(\phi)$ と表すことができるようになる。

【$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ の次元の計算】

π が Fredohlm 写像となることを示す。

写像 $L : \Gamma(W_+ \otimes L) \oplus \Omega^1(M) \to \Gamma(W_- \otimes L) \oplus \tilde{\Omega}^0(M) \oplus \Omega^2_+(M)$ を

$$L(a,\psi') = (D^+_A\psi' - ia\cdot\psi, \delta a, (da)^+ - 2\sigma(\psi,\psi')) \tag{3.18}$$

で定義する、ただし

$$\tilde{\Omega}^0(M) = \{f \in C^\infty(M) | \int_M f dV = 0\}$$

である。実際、

$$\int_M \delta a dV = -\int_M d(*a) = -\int_{\partial M} *a = 0$$

であり、$\delta a \in \tilde{\Omega}^0(M)$ となり well-defined である。この L を用いれば$\mathcal{N}$ の (a,ψ',ϕ') における接ベクトル空間は

$$T_{(A,\psi,\phi)}\mathcal{N} = \{(a,\psi',\phi') | L(a,\psi') = (0,0,\phi')\}$$

と表すことができる。$\delta a = 0$ なる条件は $\widetilde{\mathcal{B}}$ の元ならば自動的に満たされるのであるが、この成分を考えることで $\delta \oplus (d^+ - 2\sigma(\psi,\cdot))$ が楕円型微分作用素になり $D^+_A \cdot - ia\cdot\psi$ も楕円型微分作用素であるから, 定理 3.19 より L は Fredholm 作用素となる。

$\ker d\pi$ を考えると、

$$\ker d\pi = \{(a,\psi',\phi') \in T_{(A,\psi,\phi)}\mathcal{N}\ |\phi' = 0\} = \{(a,\psi',\phi') \in T_{(A,\psi,\phi)}\mathcal{N}\ |L(a,\psi') = (0,0,0)\} = \ker L$$

よって L が Fredholm 作用素であったので $\ker d\pi$ は有限次元となる。

Im $d\pi$ を考えると

$$\mathrm{Im}\ d\pi = \{\phi' \in \Omega^2_+(M)|\exists a,\psi',(0,0,\phi') = L(a,\psi')\} = \mathrm{Im}\ L \cap (0,0,\Omega^2_+(M))$$

となり Im $d\pi$ は閉集合かつ次元は有限となる。よって π は Fredholm 写像である。

次に $\dim \mathrm{coker}\ d\pi = \dim \mathrm{coker}\ L$ となることを示す。

そのためには、

$$(\Gamma(W_- \otimes L) \oplus \tilde{\Omega}^0(M) \oplus \{0\}) \cap (\mathrm{Im}\ L)^\perp = \{0\} \tag{3.19}$$

であることを示せばよい。

$(\sigma,u,0) \in \Gamma(W_- \otimes L) \oplus \tilde{\Omega}^0(M) \oplus \Omega^2_+(M)$ が $(\sigma,u,0) \perp \mathrm{Im}\ L$ を満たすとする。任意の $\psi \in \Omega^1(M)$ に対して $(D_A^+\psi, 0, *)$ の形の Im L の元があり、$((\sigma,u,0),(D_A^+\psi,0,*)) = (\sigma, D_A^+\psi) = 0$ である。Dirac 作用素の形式的自己双対性より, $(D_A^+\psi,\sigma) = (\psi, D_A^-\sigma) = 0$ が成り立ち

$$D_A^-\sigma = 0 \tag{3.20}$$

となる。また任意の $a \in \Omega^1(M)$ に対して $(-ia\cdot\psi, \delta a, *) \in \mathrm{Im}\ L$ となり $(\sigma,u,0)$ と垂直である。よって $((\sigma,u,0),(-ia\cdot\psi,\delta a,*)) = (\sigma,-ia\cdot\psi) + (u,\delta a) = 0$ となり任意の $a \in \Omega^1(M)$ に対して

$$(\sigma, ia\cdot\psi) = (u,\delta a) \tag{3.21}$$

が成り立つ。特に $\delta b = 0$ を満たす $b \in \Omega^1(M)$ に対しては $(\sigma, ib\cdot\psi) = 0$ が成り立つ。

一方、1 次微分形式 b を命題 2.37 の証明と同様に、任意の $a \in \Omega^1(M)$ に対して、

$$\langle b,a\rangle = \langle \sigma, ia\cdot\psi\rangle \tag{3.22}$$

を満たすものとして定義する。(2.20) より $\left\langle D_A^+\psi,\sigma\right\rangle - \left\langle \psi, D_A^-\sigma\right\rangle = -\delta b$ が成り立ち、ψ は Seiberg–Witten 方程式を満たし、また (3.20) から $\delta b = 0$ となる。よって $\langle b,b\rangle = \langle\sigma, ib\cdot\psi\rangle = 0$ であるから $b \equiv 0$ となる。

b の定義式 (3.22) から、$b \equiv 0$ であれば、任意の $p \in M$ で $\sigma(p) = 0$ または $\psi(p) = 0$ が成り立つ。$(A,\psi,\phi) \in \mathcal{N}$ については $\psi \not\equiv 0$ かつ $D_A^+\psi = 0$ であったから、一意接続性定理より、任意の開集合上で $\psi \equiv 0$ とはならない。よってある開集合上で $\sigma \equiv 0$ となり、(3.20) より一意接続定理が成り立ち M 上で $\sigma \equiv 0$ となる。(3.21) にこれを代入すると、任意の $a \in \Omega^1(M)$ に対して $(u,\delta a) = (du,a) = 0$ が成り立ち $du = 0$ となる。よって u は定数となるが、$u \in \tilde{\Omega}^0(M)$ であったから $u \equiv 0$ となる。以上より (3.19) が示されたので、$\dim\mathrm{coker}\ d\pi = \dim\mathrm{coker}\ L$ となる。

π の正則値 ϕ に対して $\pi^{-1}(\phi)$ は$\mathcal{N}$ の部分多様体となり、π が Fredholm 写像の場合その次元は $\mathrm{index}_F\ d\pi$ となる。上の計算より $\mathrm{index}_F\ d\pi = \mathrm{index}_F\ L$ であり、$L_0 = D_A^+ \oplus \delta \oplus d^+$ とおくと Fredholm 作用素の指数は摂動で不変なので ([10, p.204] 参照)、$\mathrm{index}_F\ L = \mathrm{index}_F\ L_0$ となる。

$\mathrm{index}_F\ L_0$ を計算する。まず $\ker(\delta + d^+)$ については系 1.35 より $\ker(\delta + d^+) = \mathcal{H}^1(M)$ である。Hodge の定理 (定理 1.29) により $\mathcal{H}^1(M) \cong H^1(M,\mathbb{R})$ であるが M は単連結と仮定しているので

$H^1(M;\mathbb{R})=0$であり$\dim\ker(\delta+d^+)=0$となる。coker $(\delta+d^+)=$ coker $\delta\oplus$ coker d^+ については、(1.18) より coker $d^+\cong\mathcal{H}^2_+(M)$が成り立つ。また$f\in\mathrm{Im}\ \delta^\perp\subset\tilde{\Omega}^0(M)$をとると、任意の１次微分形式$a\in\Omega^1(M)$に対して、

$$\langle df,a\rangle=\langle f,\delta a\rangle=0$$

となり$df=0$となる。よってfは定数であるが$f\in\tilde{\Omega}^0(M)$なので$\int_M fdV=0$が成り立つので$f=0$となり coker $\delta=0$である。いま$\mathbb{R}$上の次元を考えたいので、$\mathrm{index}_F\ D_A^+=2\mathrm{index}\ D_A^+$であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{index}_F\ L_0 &= \mathrm{index}_F\ D_A^+ + \mathrm{index}_F\ (\delta+d^+)\\ &= 2\mathrm{index}\ D_A^+ + \dim\ker(\delta+d^+) - \dim\mathrm{coker}\ (\delta+d^+) = 2\mathrm{index}\ D_A^+ + 0 - (0+b^+)\\ &= 2\mathrm{index}\ D_A^+ - b_+\end{aligned}$$

定理 2.57 より index D_A^+ を置き換えると

$$\mathrm{index}_F\ L_0 = -\frac{\tau(M)}{4}+c_1^2(L)[M]-b_+$$

となる。

以上より$\dim\widetilde{\mathcal{M}}_\phi=\dim\pi^{-1}(\phi)=\mathrm{index}_F\ d\pi=\mathrm{index}_F\ L_0$であるから$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$は空集合でなければ次元

$$\dim\widetilde{\mathcal{M}}_\phi = 2\mathrm{index}_F\ D_A^+ - b_+ = -\frac{\tau(M)}{4}+c_1^2(L)[M]-b_+$$

の滑らかな多様体となることが分かった。 ∎

実際には$-\frac{\tau(M)}{4}+c_1^2(L)[M]-b_+$が非負のとき、$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$は空集合でなく滑らかな多様体となることが知られている。

次に多様体$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$が向き付け可能であることを示す。そのためにある直線束を定義するのであるが、その定義には Fredholm 写像について次の性質が必要となる。

命題 3.26 Mを有限次元多様体、H_1,H_2を Hilbert 空間とする。$\{L(p):H_1\to H_2\}_{p\in M}$を$p$に関して連続な Fredholm 写像の族とする。このとき、H_1の線形閉部分空間$V\subset H_1$で次の性質を満たすものがとれる。

1. codim V は有限
2. 任意の$p\in M$に対して$V\cap\ker L(p)=\{0\}$
3. codim $L(p)(V)$ は一定の定数となり、$M\to\bigcup_{p\in M}H_2/L(p)(V)$ はM上の有限次元ベクトル束Eとなる。
4. 線形写像$L(p)$は束写像$\tilde{L}:(H_1/V)\times M\to E$を誘導する。

□

証明については [10]Lemma7.2 参照。

この命題により次のベクトル束が定義できる。

定義 3.27 命題 3.26 の状況のもと、ベクトル束

$$\det(L) = \wedge^{max}((H_1/V) \times M) \otimes [\wedge^{max} E]^*$$

を**行列式直線束** (determinant line bundle) と呼ぶ。ただし $\wedge^{max}$ はベクトル束の次元だけ外積を取ると言う意味である。つまり W をベクトル束としたとき $\wedge^{max} W = \wedge^{\dim W} W$ でありその次元は 1 次元となる。 □

この行列式直線束の定義には一意的に定まらない V が含まれているが、次の命題から well-defined となる。

命題 3.28 行列式直線束 $\det(L)$ は V の取り方に依らない。

証明 V, V' が命題 3.26 の条件を満たすとし、性質 3. で作られるベクトル束をそれぞれ E, E' とする。$V' \subset V$ して一般性を失わない。このとき、$H_1/V' \cong (H_1/V) \oplus (V/V')$ が成り立つ。また

$$\begin{aligned} E' &= \bigcup_{p \in M} H_2/L(p)(V') = \bigcup_{p \in M} \big(H_2/L(p)(V) \oplus L(p)(V)/L(p)(V')\big) \\ &= \bigcup_{p \in M} H_2/L(p)(V) \oplus \bigcup_{p \in M} L(p)(V)/L(p)(V') = E \oplus \bigcup_{p \in M} L(p)(V)/L(p)(V') \cong E \oplus (V/V' \times M) \end{aligned}$$

が成り立つ。一般に多様体 M 上のベクトル束 W_1, W_2 について点 $p \in M$ 上のファイバー $W_1(p), W_2(p)$ の正規直交基を $v_1, \ldots, v_m$ と $u_1, \ldots, u_n$ とすると、$(\wedge^{max} W_1)(p), (\wedge^{max} W_2)(p)$ の基底はそれぞれ、$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ と $u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ となる。$\wedge^{max}(W_1 \oplus W_2)$ のファイバー $(\wedge^{max}(W_1 \oplus W_2))(p)$ の基底は同様に $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ となる。

ここで、$\wedge^{max} W_1 \otimes \wedge^{max} W_2 \to \wedge^{max}(W_1 \oplus W_2)$ なる写像を、

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \otimes u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \longrightarrow (v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \wedge (u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)$$

で定めると同型写像となり、

$$(\wedge^{max}(W_1 \oplus W_2))(p) \cong (\wedge^{max} W_1)(p) \otimes (\wedge^{max} W_2)(p)$$

から

$$\wedge^{max}(W_1 \oplus W_2) \cong \wedge^{max} W_1 \otimes \wedge^{max} W_2$$

が成り立つ。また $A \in O(m)$ によって $\{v_i\}$ が $\{v_i'\}$ に移されるとする。$\{v_i\}, \{v_i'\}$ の双対基を $\{v_i^*\}, \{v_i'^*\}$ とすると、

$$v_1' \wedge \cdots \wedge v_m' = \det(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_m, \quad {v_1'}^* \wedge \cdots \wedge {v_m'}^* = \det({}^t A) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*$$

よって

$$\begin{aligned} (v_1' \wedge \cdots \wedge v_m') \otimes ({v_1'}^* \wedge \cdots \wedge {v_m'}^*) &= (\det(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \otimes (\det({}^t A) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*) \\ &= \det(A) \det({}^t A)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \otimes (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*) \\ &= (\pm 1)^2 (v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \otimes (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*) \end{aligned}$$

$$= \quad (v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \otimes (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*)$$

となるので、$\wedge^{max} W_1$ の任意の $O(m)$ 値変換関数系に対して $\wedge^{max} W_1 \otimes (\wedge^{max} W_1)^*$ の変換関数系は 1 となる。よって、Θ を自明直線束として

$$\wedge^{max} W_1 \otimes (\wedge^{max} W_1)^* \cong \Theta$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}
\wedge^{max}((H_1/V') \times M) \otimes [\wedge^{max} E']^* &\cong \wedge^{max}((H_1/V \oplus V/V') \times M) \otimes [\wedge^{max} E \oplus ((V/V') \times M)]^* \\
&\cong \wedge^{max}((H_1/V)_2 \times M) \otimes \wedge^{max}((V/V') \times M) \\
&\qquad \otimes (\wedge^{max} E)^* \otimes (\wedge^{max}((V/V') \times M))^* \\
&\cong \wedge^{max}((H_1/V) \times M) \otimes (\wedge^{max} E)^*
\end{aligned}$$

よって $\det(L)$ は V の取り方に依らない。 ∎

この行列式直線束を用いて $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ が向き付け可能であることを示すのであるが、そのために次の補題を用意しておく。

補題 3.29 行列式直線束 $\det(L)$ は M 上の各点 p のファイバーに関して次の同型が成り立つ。

$$\det(L)(P) \cong \wedge^{max}(\ker(L(p))) \otimes (\wedge^{max}(\mathrm{coker}\ (L(p))))^*$$

証明　まず次の完全列が成り立つことを示す。

$$0 \longrightarrow \ker(L(p)) \xrightarrow{i} \frac{H_1}{V} \xrightarrow{L(p)} \frac{H_2}{L(p)(V)} \xrightarrow{j} \frac{H_2}{L(p)(H_1)} \longrightarrow 0 \tag{3.23}$$

ただし、i は包含写像、j は自然な写像である。

まず $\ker(L(p)) \cap V = \{0\}$ より $\ker i = \{0\}$ である。

$[v] \in \mathrm{Im}\ i$ を取ると $v \in \ker(L(p))$ である。よって、$L(p)[v] = [L(p)v] = [0]$ となり $[v] \in \ker L(p)$。

$[v] \in \mathrm{Im}\ L(p)$ を取ると $v = L(p)v'$ なる $v' \in H_1$ が存在する。$j[v] = L(p)(v') + L(p)(H_1) = L(p)(H_1) = [0]$ となり $j[v] \in \ker j$。

j が全射なのは明らか。

以上より (3.23) は完全列となる。

この完全列より、$H_1/V \cong \ker L(p) \oplus W$ と直和分解すると、$H_2/L(p)(V) \cong W \oplus H_2/L(p)(H_1)$ なる同型が成り立つ。$H_2/L(p)(H_1) = \mathrm{coker}\ L(p)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\det(L)(p) &= \wedge^{max}((H_1/V)) \otimes [\wedge^{max} H_2/L(p)(V)]^* \\
&\cong \wedge^{max}(\ker L(p) \oplus W) \otimes [\wedge^{max} W \oplus H_2/L(p)(H_1)]^* \\
&\cong \wedge^{max} \ker L(p) \otimes \wedge^{max} W \otimes (\wedge^{max} W)^* \otimes (\wedge^{max} \mathrm{coker}\ L(p))^* \\
&\cong \wedge^{max} \ker L(p) \otimes (\wedge^{max} \mathrm{coker}\ L(p))^*
\end{aligned}$$

∎

次に $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ が向き付け可能であることを証明する。

定理 3.30 $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ は向き付け可能である。

証明 (3.18)で定義した L より $(A,\psi)\in\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ でパラメータ付けされた Fredholm 写像の族 $\{L_{A,\psi}\}_{(A,\psi)\in\widetilde{\mathcal{M}}_\phi}$ が得られる。このとき

$$\ker(L_{A,\psi})=T_{(A,\psi)}(\widetilde{\mathcal{M}}_\phi\ )$$

が成り立つ。

$L_{A,\psi}$ は全射で coker $L_{A,\psi}=\{0\}$ なので、$d=\dim\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ と置くと、

$$\det(L)=\bigcup_{A,\psi\in\widetilde{\mathcal{M}}_\phi}\wedge^{max}\ker L_{A,\psi}\otimes(\wedge^{max}\text{coker }L_{A,\psi})^*=\bigcup_{A,\psi\in\widetilde{\mathcal{M}}_\phi}\wedge^{d}\ker L_{A,\psi}=\wedge^{d}T\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$$

これにより、$\det(L)$ の至る所 0 でない切断が、$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ の向きを与える。

ここで楕円型微分作用素の族 $\{L_t\}_{t\in[0,1]}$ を

$$L_t(a,\psi')=(D_A^+\psi'-ita\cdot\psi,\delta a,(da)^+-2t\sigma(\psi,\psi'))$$

で定義すると各 $t\in[0,1]$ に対して行列式直線束 $\det(L_t)$ が定義できる。t について連続なので任意の t について $\det(L)\cong\det(L_t)$。よって $\det(L)$ の至る所 0 でない切断を作るには、$\det(L_0)$ の至る所 0 でない切断を与えればよい。

$L_0=D_A^+\oplus\delta\oplus d^+$ なので

$$\det(L_0)=\det(D_A^+)\otimes\det(\delta\oplus d^+)$$

ベクトル束 $\ker D_A^+,\text{coker }D_A^+$ は複素ベクトル束であるから複素構造から向きが決まり、それにより $\det(D_A^+)$ に至る所 0 でない切断が与えられる。また $\ker(\delta\oplus d^+)=0,\text{coker }(\delta\oplus d^+)=\mathcal{H}_+^2(M)$ であるから $\det(\delta\oplus d^+)$ は A,ψ に依らず定まり自明束となり、至る所 0 でない切断を持つ。よって $\det(L_0)$ は至る所 0 でない切断を持ち、$\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ は向き付け可能である。 ∎

これで $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ が向き付け可能な有限次元 C^∞ 多様体となることが示された。このことから直ちに $\mathcal{M}_\phi$ が同様の多様体となることが示される。

定理 3.31 (Transversality Theorem) M を向き付けられたコンパクト単連結 4 次元リーマン多様体で $Spin^c$-構造 を持つとする。M は $b_+\geq 1$ かつ、$Spin^c$-構造 から得られた Dirac 作用素 D_A についての指数 index $D_A^+\geq 0$ であるとする。このとき generic な自己双対 2 次微分形式 $\phi\in\Omega_+^2(M)$ に対して、$\mathcal{M}_\phi$ は向き付け可能な滑らかな多様体で、その次元は

$$\dim\mathcal{M}_\phi\ =2\text{index }D_A^+-b_+-1=c_1^2(L)[M]-\frac{1}{4}(2\chi(M)+3\tau(M))$$

で与えられる。

証明 generic な ϕ に対して摂動 Seiberg–Witten 方程式が $\psi=0$ なる解を持たないことを示す。

$\psi=0$ である摂動 Seiberg–Witten 方程式の解を持つためには $F_A^+=\phi$ が成り立つような接続 d_{2A} を直線束 L^2 が持っていなくてはならない。そして ϕ がある接続の曲率を表すとき、命題 1.36 より ϕ は $\Omega_+^2(M)$ のアフィン部分空間 Π の元であり、codim $\Pi=b_+\geq 1$ であるから $\Omega_+^2(M)-\Pi$ は $\Omega_+^2(M)$

の Baire 集合である。$\phi \in \Omega^2_+(M) - \Pi$ のとき摂動 Seiberg–Witten 方程式が $\psi = 0$ なる解を持たないので、generic な ϕ に対して摂動 Seiberg–Witten 方程式が $\psi = 0$ なる解を持たないことが分かる。よって generic な ϕ に対して $\mathcal{M}_\phi$ は向き付け可能な滑らかな多様体となる。

定義 3.9 で述べたように、$\mathcal{M}_\phi = \widetilde{\mathcal{M}}_\phi / S^1$ であるから、$\dim \mathcal{M}_\phi = \dim \widetilde{\mathcal{M}}_\phi - 1$ となる。よって、

$$\dim \mathcal{M}_\phi = 2\mathrm{index} - b_+ - 1$$

となる。Poincaré 双対定理 (定理 1.30) より $b_i = b_{4-i}$ であり、M が単連結な多様体との仮定より $b_0 = 1, b_1 = 0$ であるから Euler 数 $\chi(M)$ は

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 2b_0 - 2b_1 + b_+ + b_- = 2 + b_+ + b_-$$

であり、$\tau(M) = b_+ - b_-$ と併せて $\chi(M) + \tau(M) = 2 + 2b_+$ が成り立つ。よって定理 3.25 の 2 つめの次元の式より

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_\phi &= c_1^2(L)[M] - \frac{\tau(M)}{4} - b_+ - 1 \\ &= c_1^2(L)[M] - \frac{\tau(M)}{4} - \frac{1}{2}(\chi(M) + \tau(M)) \\ &= c_1^2(L)[M] - \frac{2\chi(M) + 3\tau(M)}{4} \end{aligned}$$

∎

これで Seiberg–Witten 理論の中心となる定理を証明できたのであるが、定理 3.25 および定理 3.31 の M が単連結と言う条件は外すことができることが知られている。その際も多様体の次元は定理で与えられているとおりである。

4章　Seiberg–Witten 不変量

前章で Seiberg–Witten 方程式を定義し、そのモジュライ空間$\mathcal{M}_\phi$ がコンパクトで向き付け可能な滑らかな有限次元多様体になることを見た。これにより$\mathcal{M}_\phi$ 上の積分が定義でき、その積分により微分構造に関する不変量を定義する。その不変量を計算することにより簡単に微分構造の違いを示すことができるのであるが、その簡単さと強力さが Seiberg–Witten 理論の偉大な点である。

4.1　Seiberg–Witten 不変量 (Seiberg–Witten invariants)

M を 4 次元コンパクト単連結リーマン多様体で $b_+ \geq 1$ とする。$Spin^c$-構造 からスピン束 $W_+ \otimes L$ が構成され、このときバーチャルな場合も含めベクトル束 L が得られる。この L と摂動 ϕ の摂動 Seiberg–Witten 方程式のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{L,\phi}$ とおく。

$\mathcal{M}_{L,\phi}$ を $\mathcal{B}^*$ のホモロジーの代表元とみて$\mathcal{B}^*$ の整係数コホモロジーの元とカップリングして得られる整数によって M の不変量を定義したい。

$d = \dim \mathcal{M}_{L,\phi}$ とすると、$\mathcal{B}^*$ の d 次のコホモロジーの元を選ばなければいけないが、M の性質を反映したものとして Chern 類を考える。$\widetilde{\mathcal{B}}^* \to \mathcal{B}^*$ は S^1 束であったので、これを主バンドルとして誘導される $\mathcal{B}^*$ 上の複素直線束を $\mathcal{L}$ とする。この $\mathcal{L}$ の第 1 Chern 類 $c_1(\mathcal{L})$ は $H^2(\mathcal{B}^*;\mathbb{Z})$ の元となるので、d が偶数であれば $c_1(\mathcal{L})^{d/2} \in H^d(\mathcal{B}^*;\mathbb{Z})$ となる。

これらを踏まえて Seiberg–Witten 不変量を次のように定義する。

定義 4.1 $b_+ \geq 2$ とする。L を M の$Spin^c$-構造 から構成される複素直線束、$\mathcal{L}$ を S^1 束 $\widetilde{\mathcal{B}}^* \to \mathcal{B}^*$ から誘導される複素直線束とする。$d = \dim \mathcal{M}_{L,\phi}$ とし、d は偶数であるとする。このとき

$$SW(L) = \left\langle c_1(\mathcal{L})^{d/2}, \mathcal{M}_{L,\phi} \right\rangle = \int_{\mathcal{M}_{L,\phi}} c_1(\mathcal{L})^{d/2} \in \mathbb{Z}$$

を L の**サイバーグ–ウィッテン不変量** (Seiberg–Witten invariant) と呼ぶ。 □

$c_1(\mathcal{L})$ は一意的に定まるが、$\mathcal{M}_{L,\phi}$ は ϕ とリーマン計量の選び方に依存する。

命題 4.2 $b_+ \geq 2$ とする。定理 3.25 で定義した $\mathcal{U}$ に含まれる $\phi_1, \phi_2 \in \Omega^2_+(M)$ を取ると、任意の $[\alpha] \in H^d(\mathcal{B}^*;\mathbb{Z})$ に対して

$$\langle [\alpha], \mathcal{M}_{L,\phi_1} \rangle = \langle [\alpha], \mathcal{M}_{L,\phi_2} \rangle$$

が成り立つ。

証明　$\mathcal{U} = \Omega^2_+(M) - \Pi$ であり、命題 1.36 により Π は $\operatorname{codim} \Pi = b_+ \geq 2$ であるから、ϕ_1, ϕ_2 を両端とする路 $\gamma : [0,1] \to \Omega^2_+(M)$ で $\Pi \cap \gamma = \emptyset$ であるものが取れる。(3.17) で定義した π を用いて

$\mathcal{W}=\pi^{-1}(\gamma)$ とおくと、[15, Theorems3.1 and 3.3] より $\mathcal{W}$ は $\mathcal{N}$ の向き付け可能な境界を持つ部分多様体となる。このとき境界は

$$\partial\mathcal{W}=\mathcal{M}_{L,\phi_1}-\mathcal{M}_{L,\phi_2}$$

となり、$[\mathcal{M}_{L,\phi_1}-\mathcal{M}_{L,\phi_2}]=0\in H_d(\mathcal{B}^*\,;\mathbb{Z})$ であるからホモロジーの元として $[\mathcal{M}_{L,\phi_1}]=[\mathcal{M}_{L,\phi_2}]$ よって

$$\langle[\alpha],\mathcal{M}_{L,\phi_1}\rangle=\langle[\alpha],\mathcal{M}_{L,\phi_2}\rangle$$

が成り立つ。 ∎

この値はリーマン計量に依らないことも同様に示される。よって Seiberg–Witten 不変量は well-defined となる。

4.2 Seiberg–Witten 理論の応用 (Application of Seiberg–Witten theory)

この節では前節で定義した Seiberg–Witten 不変量を利用して得られる結果を見ていく。

4.2.1 正のスカラー曲率を持つリーマン多様体 (Reimannian manifold with positive curvature)

まず Seiberg–Witten 不変量の定義から次の定理が直ちに示される。

定理 4.3 (Witten[16]) M を向き付けられたリーマン多様体でいたるところ正のスカラー曲率を持つとする。このとき M 上の任意の直線束 L について Seiberg–Witten 不変量 $SW(L)$ は 0 である。

証明 補題 3.10 より Seiberg–Witten 方程式の解 ψ が存在すれば各点 $p\in M$ で

$$|\psi(p)|^2\leq-\frac{1}{4}s(p_0)$$

が成り立つ。仮定より $s(p_0)>0$ より $|\psi(p)|^2<0$ となり矛盾。よって Seiberg–Witten 方程式の解は存在しないので、$\mathcal{M}_{L,\phi}=\emptyset$。ゆえに $SW(L)=0$ となる。 ∎

Seiberg–Witten 不変量が微分構造に依存することと、0 でない Seiberg–Witten 不変量を持つ多様体が知られていることから、この定理の系として

系 4.4 コンパクト単連結 4 次元リーマン多様体が正のスカラー曲率をもつような計量が存在するための条件は 4 次元多様体の位相構造によらず、微分構造に依存しており、正のスカラー曲率を持ち得ない微分構造が存在する。

がただちに分かる。

この系はリーマン幾何で最も研究されている問題の一つである曲率とリーマン多様体の位相との関連についての問題のひとつの解答である。つまり「どんなコンパクト単連結リーマン多様体が正のスカラー曲率をもつような計量を入れることができるのか？」という問題に対する重要な部分的解答を与えているのである。

正のスカラー曲率を持つコンパクト単連結4次元リーマン多様体としては、$S^4, P^2\mathbb{C}$ 及び $P^2\mathbb{C}$ の向きを逆にした $\overline{P^2\mathbb{C}}$ などが知られている。また [6] により正のスカラー曲率を持つ多様体の連結和も正のスカラー曲率を持つことが知られている。よって、次の系がただちに示される。

系 4.5 複素2次射影空間 $P^2\mathbb{C}$ と向きを逆にした $\overline{P^2\mathbb{C}}$ をそれぞれ k, l 個連結和をとった多様体

$$kP^2\mathbb{C}\#l\overline{P^2\mathbb{C}}$$

はすべて Seiberg–Witten 不変量が 0 である。

4.2.2 Kähler 多様体の Seiberg–Witten 不変量 (Seiberg–Witten invariant on Kähler manifold)

Kähler 多様体という良い性質を持った多様体上には、標準束と呼ばれる複素直線束が存在する。この標準束に対する Seiberg–Witten 不変量は ± 1 となることを示す。

まず複素微分形式に関する事項を定義しておく。

定義 4.6 n 次元複素多様体上で局所座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ によって、

$$\sum f_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

で表される微分形式を (p,q)-**形式** (p,q-form) と呼ぶ。(p,q)-形式全体の集合を$\Omega^{p,q}(M)$と表す。 □

ここで、この複素微分形式をベクトル束の切断として見るために、複素接ベクトル空間を詳しく考察しておく。

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を複素 Riemann 多様体、J を複素構造とし、$\langle\ ,\ \rangle$は Hermit 計量であるとする。接ベクトル束 TM は Riemann 計量により、実ベクトル束として双対束 T^*M と同型、つまり $TM \cong T^*M$ となる。

この同型により、TM の複素構造 J を T^*M 上に移すことができこれを J^* と表すことにする。実際 J^* は任意の $v \in TM,\ \phi \in T^*M$ に対して、

$$(J^*\phi)v = \phi(Jv)$$

で定義すればよい。このとき、局所座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ $(z_k = x_k + iy_k)$ に対して、$J\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i},\quad J\frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ であるから、$J^*dx_i = -dy_i,\quad J^*dy_i = -dx_i$ となる。これより、複素ベクトル束としては

$$T^*M \cong \overline{TM} \tag{4.1}$$

なる同型が成り立つことになる。

次に $T^*M \otimes \mathbb{C}$ 上の自己同型

$$-iJ^* : T^*M \otimes \mathbb{C} \to T^*M \otimes \mathbb{C}$$

を考える。

$$(-iJ^*)^2 = i^2 J^{*2} = 1$$

であるから、$-iJ^*$ の各ファイバー上での固有値は ± 1 となる。実際、任意の $T^*M\otimes\mathbb{C}$ の元 $x+iy$ $(x,y\in T^*M)$ は、

$$x+iy=\left(\frac{x+J^*y}{2}-iJ^*\frac{x+J^*y}{2}\right)+\left(\frac{x-J^*y}{2}+iJ^*\frac{x-J^*y}{2}\right)$$

と分解されるので、

$$T^*M_{\mathbb{C}}^{+}=\{v-iJ^*v|\ v\in T^*M\},\quad T^*M_{\mathbb{C}}^{-}=\{v+iJ^*v|\ v\in T^*M\}$$

とおくと、$T^*M_{\mathbb{C}}^{+},T^*M_{\mathbb{C}}^{-}$ がそれぞれ固有値 $1,-1$ に対する固有空間となり

$$T^*M\otimes\mathbb{C}=T^*M_{\mathbb{C}}^{+}\oplus T^*M_{\mathbb{C}}^{-}$$

と直和分解される。

局所座標 $(z_1,\dots,z_n)$ おいて $z_j=x_j+iy_j$ とすると、

$$\begin{aligned}dz_j &= dx_j+idy_j=dx_j-iJ^*dx_j\in T^*M_{\mathbb{C}}^{+}\\ d\bar{z}_j &= dx_j-idy_j=dx_j+iJ^*dx_j\in T^*M_{\mathbb{C}}^{-}\end{aligned}$$

となることが分かる。

よって $\Omega^k(M)\otimes\mathbb{C}$ は、

$$\begin{aligned}\Omega^k(M)\otimes\mathbb{C} &= \Gamma(\wedge^k T^*M\otimes\mathbb{C})=\Gamma(\wedge^k(T^*M_{\mathbb{C}}^{+}\oplus T^*M_{\mathbb{C}}^{-}))\\ &= \sum_{p+q=k}\Gamma(\wedge^p T^*M_{\mathbb{C}}^{+}\oplus\wedge^q T^*M_{\mathbb{C}}^{-})\\ &= \sum_{p+q=k}\Omega^{p,q}(M)\end{aligned}$$

と $\Omega^{p,q}(M)$ により分解できることが分かる。

さらに、ここで J^* を複素構造とする複素ベクトル束として T^*M を見ると

$$T^*M\cong T^*M_{\mathbb{C}}^{+},\quad \overline{T^*M}\cong T^*M_{\mathbb{C}}^{-} \tag{4.2}$$

であることに注意しておく。実際、写像

$$h:T^*M\to T^*M_{\mathbb{C}}^{+},\quad h(v)=v-iJ^*v$$

を考えれば

$$h(J^*v)=J^*v-i(J^*v)^2v=J^*v+iv=i(v-iJ^*v)$$

が成り立ち複素ベクトル束としての同型写像となっている。

さて、次に複素微分形式に対する幾つかの作用素の説明をしておく。まず Hodge 作用素は次の性質を持つ。

命題 4.7 $\{z_1,\dots,z_n\}$ を複素座標系とすると、

$$*(dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q})=\mathrm{sgn}\ (i_1,\dots,i_n)\mathrm{sgn}\ (j_1,\dots,j_n)d\bar{z}_{i_{p+1}x}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{i_n}\wedge dz_{j_{q+1}}\wedge\cdots\wedge dz_{j_n}$$

が成り立つ。ただし $(i_1,\dots,i_n),(j_1,\dots,j_n)$ は置換、sgn はその符号である。

外微分 d は

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad \partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M), \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$$

に分解されその双対として、

$$\partial^* = - * \bar{\partial} * : \Omega^{p+1,q}(M) \to \Omega^{p,q}(M), \quad \bar{\partial}^* = - * \partial * : \Omega^{p,q+1}(M) \to \Omega^{p,q}(M)$$

が取れる。

詳細は [21] 参照のこと。

ここで本節の舞台となる Kähler 多様体を定義する。

定義 4.8 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を複素 Riemann 多様体、J を複素構造とし、$\langle\ ,\ \rangle$は Hermit 計量であるとする。任意のベクトル場 x, y に対して

$$\omega(x, y) = \langle Jx, y \rangle$$

で定義される 2 次微分形式を**ケーラー形式** (Kähler form) と呼ぶ。 □

ω が歪対称であることは、

$$\omega(y, x) = \langle Jy, x \rangle = \left\langle J^2 y, Jx \right\rangle = -\langle y, Jx \rangle = -\langle Jx, y \rangle = -\omega(x, y)$$

から分かる。

定義 4.9 M を Hermit 計量$\langle\ ,\ \rangle$を持つ複素多様体とする。M の Kähler 形式 ω が閉 $(d\omega = 0)$ であるとき、M を Kähler 多様体と呼ぶ。 □

例えば 2 次元の場合、M の正規直交枠 (e_1, e_2, e_3, e_4) が $Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$ を満たすとする。このとき Kähler 形式 ω は

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \tag{4.3}$$

と表される。これより明らかに $\omega \in \Omega^2_+(M)$ であり、

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow d * \omega = 0 \Leftrightarrow \delta\omega = 0$$

となるので $\omega \in \mathcal{H}^2_+(M)$ である。

Kähler 多様体の例としては、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ が挙げられる。また Kähler 多様体の複素部分多様体は Kähler 多様体となることから、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の部分多様体である特異点を持たない代数多様体は、すべて Kähler 多様体である。

次に Kähler 多様体において重要な働きをするベクトル束を定義しておく。

定義 4.10 M を複素 2 次元の Kähler 多様体とし、TM を接ベクトル束、T^*M を余接ベクトル束とする。

$$K = \wedge^2_{\mathbb{C}} T^*M$$

なる複素 1 次元のベクトル束 K を**標準束** (canonical bundle) と呼ぶ。さらに $\wedge^2_{\mathbb{C}} TM$ を**反標準束** (anti–canonical bundle) と呼び、K^{-1} と表す。 □

これらのベクトル束の変換関数系を見てみると、TM の変換関数系

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(2)$$

に対して、T^*M の変換関数系が

$${}^t g_{\alpha\beta}{}^{-1} = \overline{g_{\alpha\beta}} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(2)$$

となるので、K の変換関数系は

$$\det \circ {}^t g_{\alpha\beta}{}^{-1} = \det \circ \overline{g_{\alpha\beta}} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(1)$$

K^{-1} の変換関数系は

$$\det \circ g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(1) \tag{4.4}$$

となる。ここで命題 2.21 で示した概複素構造からきまる自然な$Spin^c$-構造 から構成される $W_+ \otimes L$ の変換関数系 (2.18) 及び (2.15) と、この K^{-1} の変換関数系 (4.4) を比較すると、$L^2 \cong K^{-1}$ が分かる。この関係より $L = K^{-\frac{1}{2}}$ と表すことにする。これにより (2.19) は

$$W_+ \otimes L \cong \Theta \oplus K^{-1}, \quad W_- \otimes L \cong TM$$

と表すことができる。

TM 上の Levi–Civita 接続 (w_{ij}) 及び、局所的に $d + 2ia$ で表される L^2 上の接続に対応するベクトル束 $W \otimes L$ 上の$Spin^c(4)$-接続 d_A は、TM の正規直交枠 $\{e_i\}$ $(e_2 = Je_1, e_4 = Je_3)$ をとると局所的に

$$\begin{aligned}
d_A &= d - iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij} e_i \cdot e_j \\
&= d - iaI - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i(w_{12}+w_{34}) & (w_{13}+w_{42}) - i(w_{14}+w_{23}) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -(w_{13}+w_{42}) - i(w_{14}+w_{23}) & i(w_{12}+w_{34}) & & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & * & * \\ & & * & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表される。

d_{LC} を Levi–Civita 接続 とすると、Kähler 形式 ω は Levi–Civita 接続 に平行で $d_{LC}\omega = 0$ である。Kähler 多様体では $d_{LC}J = 0$が成り立ち ([8] 参照)、$d_{LC}Je_i = Jd_{LC}e_i$ であるから、$d_{LC}e_i = \sum_k w_{ik}e_k$ を用いて、

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(e_i, e_j) = d\langle Je_i, e_j\rangle \\
&= \langle Jd_{LC}e_i, e_j\rangle + \langle Je_i, d_{LC}e_j\rangle \\
&= \sum_k w_{ik}\langle Je_k, e_j\rangle + \sum_k w_{jk}\langle Je_i, e_k\rangle
\end{aligned}$$

最後の式に $i = 1, j = 4$ を代入すると

$$0 = \sum_k w_{1k}\langle Je_k, e_4\rangle + \sum_k w_{4k}\langle Je_1, e_k\rangle = w_{13} + w_{42}$$

となる、同様に $i=1, j=3$ を代入すると $w_{14}+w_{23}=0$ となり

$$d_A = d - iaI - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i(w_{12}+w_{34}) & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & i(w_{12}+w_{34}) & & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & * & * \\ & & * & * \end{pmatrix}$$

と表されることになる。

定義 4.11 概複素構造から自然にできる$Spin^c$-構造 により構成される複素直線束 $L = K^{-\frac{1}{2}}$ 上の接続 d_{A_0} を局所的に

$$d_{A_0} = d + \frac{1}{2}i(w_{12}+w_{34})$$

で表されるものとする。またこの接続に対応する $W_+ \otimes L$ 上の$Spin^c(4)$-接続を同じ記号 d_{A_0} で表す。この$Spin^c(4)$-接続は局所的に

$$d_{A_0} = d - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & i(w_{12}+w_{34}) & & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & * & * \\ & & * & * \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

と表される。 □

局所表示を見ると $W_+ \otimes L \cong \Theta \oplus K^{-1}$ なる分解に対して、d_{A_0}は Θ 上では自明な接続となり、K^{-1} 上では局所的に $d - i(w_{12}+w_{34})$ と表される。$z_1 = e_1 + e_2, z_2 = e_3 + e_4$ とおくと $K^{-1} = \wedge^2_{\mathbb{C}} TM$ の基底は $z_1 \wedge z_2$ となる。今 TM 上には複素構造があり、Levi–Civita 接続 の接続形式 $(w_{ij}) \in M(4,\mathbb{R}) \otimes \Omega^1$ は $U(2)$-接続なので $M(2,\mathbb{C}) \otimes \Omega^1$ の元と見なすと、

$$(w_{ij}) \cong \begin{pmatrix} iw_{12} & w_{13} - iw_{14} \\ w_{13} + iw_{14} & iw_{34} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \otimes \Omega^1$$

となる。よって Levi–Civita 接続 から $\wedge^2_{\mathbb{C}} TM$ に誘導された接続 d_{LC} は

$$\begin{aligned} d_{LC}(z_1 \wedge z_2) &= (d_{LC} z_1) \wedge z_2 + z_1 \wedge (d_{LC} z_2) \\ &= (iw_{12} z_1 + (w_{13} - iw_{14}) z_2) \wedge z_2 + z_1 \wedge ((w_{13} + iw_{14}) z_1 + iw_{34} z_2) \\ &= i(w_{12} + w_{34})(z_1 \wedge z_2) \end{aligned}$$

となり d_{A_0} は K^{-1} では Levi–Civita 接続 から誘導された接続と一致する。

次に、この接続による L 係数の Dirac 作用素を考える。その際に、(4.2) より

$$\begin{aligned} \Gamma(K^{-1}) &\cong \Gamma(\wedge^2_{\mathbb{C}} TM) \cong \Gamma(\wedge^2_{\mathbb{C}} \overline{T^*M}) \\ &\cong \Gamma(\wedge^2_{\mathbb{C}} T^*M^-_{\mathbb{C}}) = \Omega^{0,2}(M) \\ \Gamma(TM) &\cong \Gamma(\overline{T^*M}) \cong \Gamma(T^*M^-_{\mathbb{C}}) \\ &= \Omega^{0,1}(M) \end{aligned}$$

となることを注意しておく。

命題 4.12 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を複素 2 次元 Kähler 多様体とする。d_{A_0} を定義 4.11 で導入した$Spin^c(4)$-接続とし、$\Gamma(W_+ \otimes L) \cong \Gamma(\Theta \oplus K^{-1}) \cong \Omega^{0,0}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M), \Gamma(W_- \otimes L) \cong \Gamma(TM) \cong \Omega^{0,1}(M)$ とみたとき、Dirac 作用素 $D^+_{A_0}$ は

$$D^+_{A_0} = \sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*) : \Gamma(\Theta \oplus K^{-1}) \to \Gamma(TM)$$

と表される。

証明 各点$p \in M$において両辺が等しくなることを示す。局所的に複素座標$z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$ を、$p \in M$ において $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$ となるように取る。$e_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ と置くと、切断 $\sum \xi_j e_j$ ($\xi_j \in C^\infty(M)$) に対して

$$\nabla^A_{e_i}(\sum_j \xi_j e_j) = \sum_j (e_i \xi_j) e_j + \sum_{jk} \xi_j \Gamma^i_{jk} e_k = \sum_j (\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_j) e_j$$

となる。よって p において切断の成分表示に対するD_{A_0}は

$$D_{A_0} = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot \nabla^A_{e_i} = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} & -\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される。$\binom{f}{0} \in W_+ \otimes L$ に対しては、

$$D_{A_0}\begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} + i\frac{\partial f}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$

であるが、これを$\Omega^{0,2}(M)$の元と見れば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} + i\frac{\partial f}{\partial x_4} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)d\bar z_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} + i\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)d\bar z_2\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z_1}d\bar z_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar z_2}d\bar z_2\right) \\ &= \sqrt{2}\bar\partial f \end{aligned}$$

$\binom{0}{g} \in W_+ \otimes L$ に対しては、

$$D_{A_0}\begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} + i\frac{\partial g}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} - i\frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

であるが、これを$\Omega^{0,2}(M)$の元と見れば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x_3} + i\frac{\partial g}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} - i\frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-\frac{\partial g}{\partial x_3} + i\frac{\partial g}{\partial x_4}\right)d\bar z_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - i\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)d\bar z_2\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\partial g}{\partial z_2}d\bar z_1 + \frac{\partial g}{\partial z_1}d\bar z_2\right) \\ &= -*\sqrt{2}\left(\frac{\partial g}{\partial z_2}dz_2 \wedge d\bar z_1 \wedge d\bar z_2 + \frac{\partial g}{\partial z_1}dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge d\bar z_2\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -* \sqrt{2}\partial g d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \\
&= -* \sqrt{2}\partial * g d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \\
&= \sqrt{2}\bar{\partial}^* g d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2
\end{aligned}
$$

となり、

$$D^+_{A_0} = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$$

が成り立つ。 ∎

この d_{A_0} を用いると、L 上の任意の接続は $d_{A_0} + ia$ の形で表される。このとき上の命題と同様の計算で次の系が示せる。

系 4.13 a を M 上の 1 次微分形式とするとき、$d_A = d_{A_0} + ia$ と表される接続 d_A に対応する Dirac 作用素 D_A を考える。$\binom{f}{0} \in W_+ \otimes L$ に対しては、

$$D^+_A \binom{f}{0} = \sqrt{2}(\bar{\partial} f - (ia)_{(0,1)} \cdot f)$$

となる。ただし、$(ia)_{(0,1)}$ は ia の $(0,1)$ 成分である。

証明 命題 4.12 と同様に座標系を取れば、Dirac 作用素は

$$
\begin{aligned}
D_A &= \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\left\langle a, \tfrac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right) \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \# & \# \\
0 & 0 & \# & \# \\
\frac{\partial}{\partial x_1} - i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle + i\frac{\partial}{\partial x_2} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & -\frac{\partial}{\partial x_3} + i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle + i\frac{\partial}{\partial x_4} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\rangle & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial x_3} - i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle + i\frac{\partial}{\partial x_4} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\rangle & \frac{\partial}{\partial x_1} - i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle - i\frac{\partial}{\partial x_2} - \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
D_A \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle f + i\frac{\partial f}{\partial x_2} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle f \\
\frac{\partial f}{\partial x_3} - i\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle f + i\frac{\partial f}{\partial x_4} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\rangle f
\end{pmatrix} = \sqrt{2}\left(\bar{\partial} f - i\left\langle a, \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right\rangle f d\bar{z}_1 - i\left\langle a, \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right\rangle f d\bar{z}_2\right) \\
&= \sqrt{2}(\bar{\partial} f - (ia)_{(0,1)} \cdot f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 ∎

以上の準備のもと $L = K^{-1/2}$ について Seiberg–Witten 不変量を計算する。

定理 4.14 M は単連結な Kähler 多様体で、$b_+ \geq 2$ とする。このとき M の標準束 K とすると、

$$SW(K^{-1/2}) = \pm 1$$

である。

証明　d_{A_0}を 4.11 で定義した L 上の接続、ω を Kähler 形式とする。$\phi = F_{A_0}^+ + \omega$ なる摂動項の摂動 Seiberg–Witten 方程式

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi) + F_{A_0}^+ + \omega \tag{4.6}$$

を考えると、この方程式は次の解

$$A = A_0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

を持つ。実際 $\sigma(\psi) = \left(\begin{smallmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{smallmatrix}\right)$ で Kähler 形式は (4.3) から $\omega = \left(\begin{smallmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{smallmatrix}\right)$ であるから、$F_{A_0}^+ = \sigma(\psi) + F_{A_0}^+ + \omega$ が成り立つ。また ψ は定数 section であるから $D_A^+\psi = 0$ となり (4.6) を満たす。

この解が唯一の非退化な解であることを示せば、$\mathcal{M}_\phi$ は 1 点のみの多様体となり $SW(K^{-1/2}) = \pm 1$ が示される。

(A, ψ) を (4.6) の任意の解とする。$\alpha \in \Gamma(\Theta), \beta \in \Gamma(K^{-1})$ によって $\psi = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$ と表すことができる。

ここで、

$$A \to A, \quad \alpha \to \alpha, \quad \beta \to -\beta \tag{4.8}$$

なる変換を考えると、この変換は (4.6) の解を他の解に移すことを示す。汎関数

$$S_\phi(A, \psi) = \int_M (|D_A\psi|^2 + |F_A^+ - \sigma(\psi) - \phi|^2) dV$$

を考えると、$d_A = d_{A_0} - ia$ と表したとき定理 1.8 により、曲率は $F_A^+ = F_{A_0}^+ + (da)^+$ と表され、

$$F_A^+ - \sigma(\psi) - \phi = F_{A_0}^+ + (da)^+ - \sigma(\psi) - (F_{A_0}^+ + \omega) = (da)^+ - \sigma(\psi) - \omega \tag{4.9}$$

なる置き換えができる。命題 3.6 の証明と同様に、

$$\begin{aligned} S_\phi(A, \psi) &= \int_M (|D_A\psi|^2 - 2\left\langle F_A^+, \sigma(\psi)\right\rangle + 2\left\langle F_A^+, \sigma(\psi)\right\rangle + |(da)^+ - \sigma(\psi) - \omega|^2) dV \\ &= \int_M (|d_A\psi|^2 + \frac{s}{2}|\psi|^2 + 2\left\langle F_A^+, \sigma(\psi)\right\rangle + |(da)^+ - \sigma(\psi) - \omega|^2) dV \end{aligned}$$

となる。ここで、$W_+ = \Theta \oplus K^{-1}$ と直和分解されるので、

$$\begin{aligned} S_\phi(A, \psi) &= \int_M (|d_A\alpha|^2 + |d_A\beta|^2 + \frac{s}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 2\left\langle F_A^+, \sigma(\psi)\right\rangle + |((da)^+ - \omega) - \sigma(\psi)|^2) dV \\ &= \int_M (|d_A\alpha|^2 + |d_A\beta|^2 + \frac{s}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \\ &\quad + 2\left\langle F_A^+, \sigma(\psi)\right\rangle + |(da)^+ - \omega|^2 - 2\langle (da)^+ - \omega, \sigma(\psi)\rangle + |\sigma(\psi)|^2) dV \\ &= \int_M (|d_A\alpha|^2 + |d_A\beta|^2 + \frac{s}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \\ &\quad + |(da)^+ - \omega|^2 + |\sigma(\psi)|^2 + 2\left\langle F_A^+ - (da)^+ + \omega, \sigma(\psi)\right\rangle) dV \\ &= \int_M (|d_A\alpha|^2 + |d_A\beta|^2 + \frac{s}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + |(da)^+ - \omega|^2 + |\sigma(\psi)|^2 + 2\left\langle F_{A_0}^+ + \omega, \sigma(\psi)\right\rangle) dV \end{aligned}$$

となる。

$$\sigma(\psi)=i\begin{pmatrix} |\alpha|^2-|\beta|^2 & 2\alpha\bar{\beta} & 0 & 0\\ 2\bar{\alpha}\beta & |\beta|^2-|\alpha|^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2)(e_1e_2+e_3e_4)+\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}\beta(e_1e_3+e_4e_2)-\mathrm{Re}\ \bar{\alpha}\beta(e_1e_4+e_2e_3) \tag{4.10}$$

であるから局所的には、

$$|\sigma(\psi)|^2=(\frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2))^2+(\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}\beta)^2+(\mathrm{Re}\ \bar{\alpha}\beta)^2$$

となり $|\sigma(\psi)|^2$ は (4.8) に関して不変である。また (4.5) の形から $F_{A_0}^+\in\langle e_1e_2+e_3e_4\rangle$ なので

$$\left\langle F_{A_0}^++\omega,\sigma(\psi)\right\rangle=\frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2)\left\langle F_{A_0}^++\omega,e_1e_2+e_3e_4\right\rangle$$

となり $\left\langle F_{A_0}^++\omega,\sigma(\psi)\right\rangle$ も (4.8) に関して不変である。よって、$S_\phi(A,\psi)$ は (4.8) に関して不変である。

(4.6) の解 (A,ψ) が変換 (4.8) によって (A,ψ') に移ったとすると $S_\phi(A,\psi)=S_\phi(A,\psi')=0$ となり (A,ψ') も解となる。

次に $\beta\equiv 0$ であることを示す。

(4.6) の第 2 式は、(4.9) の置き換えにより、

$$(da)^+-\omega=\sigma(\psi)$$

と表される。この式の解を変換 (4.8) で移してもこの式は満たされるはずであるが $(da)^+-\omega$ は変換に関して不変であるのに (4.10) における $\sigma(\psi)$ の非対角成分 $\bar{\alpha}\beta$ などは、変換により $\bar{\alpha}(-\beta)=-\bar{\alpha}\beta$ で符号が変わっている。よって、$\bar{\alpha}\beta=0$ となり、$\alpha=0$ または$\beta=0$ である。

Kähler 形式は $\omega=e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4$ であり、$\Omega^2_+(M)$の基底 (1.14) は異なるもので外積をとると 0 になるので、(4.10) の表示から

$$\sigma(\psi)\wedge\omega=\frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2)\omega\wedge\omega$$

となる。また $F_A-F_{A_0}=da$ であるから F_A,F_{A_0} は同じコホモロジー類に入り、ω と$\Omega^2_-(M)$の基底 (1.15) の外積はすべて 0 となるので、

$$F_A\wedge\omega=F_A^+\wedge\omega,\quad F_{A_0}\wedge\omega=F_{A_0}^+\wedge\omega$$

である。従って、

$$\begin{aligned}0 &= \int_M(F_A-F_{A_0})\wedge\omega=\int_M(F_A^+-F_{A_0}^+)\wedge\omega\\ &= \int_M(da)^+\wedge\omega=\int_M(\sigma(\psi)+\omega)\wedge\omega\\ &= \int_M\left(1+\frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2)\right)\omega\wedge\omega\end{aligned}$$

$\omega\wedge\omega=dV$(体積要素) なので $\int_M 1(\omega\wedge\omega)$ は正となり

$$\int_M(|\beta|^2-|\alpha|^2)\omega\wedge\omega<0$$

が成り立つので、$\alpha=0$ または$\beta=0$であったから $\beta\equiv 0$ となる。

次に $|\alpha|\equiv\sqrt{2}$ であることを示す。

$\beta=0$ より $\sigma(\psi)=i\begin{pmatrix}|\alpha|^2 & 0\\ 0 & -|\alpha|^2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}|\alpha|^2\omega$ と表せるので、

$$(da)^+=\sigma(\psi)+\omega=(1-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\omega$$

が成り立つ。また一意接続定理及び $\alpha\not\equiv 0$ であることから $\alpha=0$ となる点は離散的となり、系 4.13 より $\alpha\neq 0$ である領域において

$$D_A^+\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}=\sqrt{2}(\bar{\partial}\alpha-(ia)_{(0,1)}\alpha)=\sqrt{2}(\frac{1}{\alpha}\bar{\partial}\alpha-(ia)_{(0,1)})\alpha=\sqrt{2}(\bar{\partial}(\log\alpha)-(ia)_{(0,1)})\alpha$$

なる関係式が成り立つ。よって Seiberg–Witten 方程式 (4.6) は、ゲージ条件を加えて

$$\bar{\partial}(\log\alpha)=(ia)_{(0,1)},\quad (da)^+=(1-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\omega,\quad \delta a=0 \tag{4.11}$$

と表されることになる。

この (4.11) を使って、変形すると $\Delta\log|\alpha|^2$ が α の簡単な式で表されることを見る。式変形にあたっては ω との内積が現れるので $dx_1\wedge dy_1+dx_2\wedge dy_2$ の成分だけに注目すれば良いことを注意しておく。

一般に複素数 $z=|z|e^{i\theta}$ に対して $\log z=\log|z|+i\theta$ より Re $\log z=\log|z|$ であるから、

$$\Delta\log|\alpha|^2=2\mathrm{Re}\ (\Delta\log\alpha)$$

である。一方局所的に $e_1=dx_1,e_2=dy_1,e_3=dx_2,e_4=dy_2$ かつ $dz_k=dx_k+idy_k,d\bar{z}_k=dx_k-idy_k$, とすると、$i\neq j$ の場合 $\langle\omega,dz_i\wedge d\bar{z}_j\rangle=0$ となることと、

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_i}^2}\right),\quad dz_i\wedge d\bar{z}_i=-i2dx_i\wedge dy_i$$

なる関係式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
i\partial\bar{\partial}\log\alpha &= i\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial\bar{z_j}}\log\alpha dz_i\wedge d\bar{z_j}\\
&= \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}\right)\log\alpha(-i2dx_1\wedge dy_1)+\frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2}\right)\log\alpha(-i2dx_2\wedge dy_2)+i\sum_{i\neq j}\cdots\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2}\right)\log\alpha(dx_1\wedge dy_1+dx_2\wedge dy_2)\\
&\quad +\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2}\right)\right)\log\alpha(dx_1\wedge dy_1-(dx_2\wedge dy_2))+i\left\{\sum_{i\neq j}\cdots\right\}\\
&= -\frac{1}{4}(\Delta\log\alpha)\omega+(\omega\text{と直交する成分})
\end{aligned}$$

となる。$\langle\omega,\omega\rangle=2$ であるから $-2\big\langle\omega,i\partial\bar{\partial}\log\alpha\big\rangle=\Delta\log\alpha$ となって

$$\begin{aligned}
\Delta\log|\alpha|^2 &= 2\mathrm{Re}\ (\Delta\log\alpha)\\
&= -4\mathrm{Re}\ \big\langle\omega,i\partial\bar{\partial}\log\alpha\big\rangle=-4\mathrm{Re}\ \big\langle\omega,i\partial(ia)_{(0,1)}\big\rangle
\end{aligned}\tag{4.12}$$

となる。

$ia = a_1 dz_1 + a_2 dz_2 + a_1' d\bar{z}_1 + a_2' d\bar{z}_2$ とおくと ia は純虚数値 1 次微分形式なので $a_1' = -\overline{a_1}, a_2' = -\overline{a_2}$ となり $a_1 = p_1 + iq_1, a_2 = p_2 + iq_2$ とおくと $a = 2q_1 dx_1 + 2p_1 dy_1 + 2q_2 dx_2 + 2p_2 dy_2$ と表される。$(ia)_{(0,1)} = a_1' d\bar{z}_1 + a_2' d\bar{z}_2$ なので、

$$\begin{aligned} i\partial(ia)_{(0,1)} &= i\left(\frac{\partial a_1'}{\partial z_1}dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \frac{\partial a_1'}{\partial z_2}dz_2 \wedge d\bar{z}_1 + \frac{\partial a_2'}{\partial z_1}dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + \frac{\partial a_2'}{\partial z_2}dz_2 \wedge d\bar{z}_2\right) \\ &= \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial a_1'}{\partial z_1} + \frac{\partial a_2'}{\partial z_2}\right)(-2i(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)) + (\omega\text{と直交する成分}) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\langle \omega, i\partial(ia)_{(0,1)}\rangle &= \mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial a_1'}{\partial z_1} + \frac{\partial a_2'}{\partial z_2}\right)\langle\omega,\omega\rangle \\ &= \left(-\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial y_2}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。一方

$$\begin{aligned} da &= 2\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial p_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dy_i + \frac{\partial q_i}{\partial y_j}dy_j \wedge dx_i + \frac{\partial p_i}{\partial y_j}dy_j \wedge dy_i\right) \\ &= 2\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}dx_1 \wedge dy_1 + \frac{\partial q_1}{\partial y_1}dy_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial p_2}{\partial x_2}dx_2 \wedge dy_2 + \frac{\partial q_2}{\partial y_2}dy_2 \wedge dx_2 + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial y_2}\right)(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) + (\omega\text{と直交する成分}) \end{aligned}$$

より $\langle\omega, da\rangle = 2\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial y_2}\right)$ が成り立ち、

$$\mathrm{Re}\,\langle \omega, i\partial(ia)_{(0,1)}\rangle = -\frac{1}{2}\langle\omega, da\rangle = -\frac{1}{2}\langle\omega, (da)^+\rangle \tag{4.13}$$

となる。(4.12) と (4.13) をまとめて、(4.11) の第 2 式を代入すると

$$\Delta\log|\alpha|^2 = 2\langle\omega, (da)^+\rangle = (2 - |\alpha|^2)|\omega|^2 = 2(2 - |\alpha|^2)$$

を得る。

$\log|\alpha|^2$ はコンパクトな多様体上の関数で、最大値と最小値を持つ。最大値をとる点では $\Delta\log|\alpha|^2 \geq 0$ であるが、このとき $|\alpha| \leq \sqrt{2}$ となる。同様に最小値をとる点では $|\alpha| \geq \sqrt{2}$ となる。これが同時に成り立つので $|\alpha| \equiv \sqrt{2}$ である。

最後に $A = A_0$ と $\alpha \equiv \sqrt{2}$ を示す。(4.11) の第 2 式から $(da)^+ \equiv 0$ である。$(da)^+ = 0$ かつ $\delta a = 0$ であれば a は調和形式であったが M が単連結なので Hodge の定理 (定理 1.29) より $\mathcal{H}^1(M) \cong H^1(M;\mathbb{R}) = \{0\}$ であり $a = 0$ となる。よって $A = A_0$ が言える。

このとき、$D_A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{2}\bar{\partial}\alpha = 0$ であるから α は正則となり、最大値原理より α は定数関数となる。M が単連結であれば、大きさ 1 の複素数倍をのぞいて決定される。(3.9) で見たようにスピノル場への作用は接続への作用と独立に大きさ 1 の複素数定数倍の自由度を持っていたので、$\alpha \equiv \sqrt{2}$ である。以上より $\mathcal{M}_\phi$ は (4.7) を代表元とする 1 点からなるので題意が示せた。 ∎

系 4.5 よりただちに次の系が得られる。

系 4.15 単連結で $b_+ \geq 2$ である 2 次元 Kähler 多様体は、

$$kP^2\mathbb{C}\#l\overline{P^2\mathbb{C}}$$

の形の多様体と可微分同相にはならない。

この系により、位相同相であるが可微分同相でない多様体の例が簡単に示される。例えば

$$M = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in CP^3 | z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = 0\}$$

なる代数多様体は単連結な Kähler 多様体で代数幾何の理論から、

$$b_+ = 9, \quad b_- = 44$$

であることが計算できる。([4] 参照)
このとき交叉形式の理論から

$$M \overset{\text{位相}}{\cong} 9P^2\mathbb{C}\#44\overline{P^2\mathbb{C}}$$

であることが知られているが系 4.15 より

$$M \overset{\text{可微分}}{\ncong} 9P^2\mathbb{C}\#44\overline{P^2\mathbb{C}}$$

である。

参考文献

[1] N. Aronszahn. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of the second order. *J.Math.Pure Appl*, Vol. 36, pp. 235–249, 1957.

[2] B. Booss-Bavnek and K.P. Wojciechowski. *Elliptic boundary problems for Dirac operators.* Birkhäuser, 1993.

[3] G.F. Bredon. *Topology and Geometory.* Graduate texts in mathematics 139. Springer-Verlag, 1993.

[4] S. Donaldson and P.B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds.* Oxford Univ. Press, 1984.

[5] R. Freidman and J.W. Morgan. On the diffeomorphism type of certain algebraic surface 1,2. *Differential Geometry 27*, pp. 297–369, 1988.

[6] M. Gromov and H.B. Lawson. The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature. *Annals of Math.111*, pp. 423–434, 1980.

[7] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry volume I.* Interscience, 1963.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry volume II.* Interscience, 1969.

[9] P.B. Kronheimer and T.S. Mrowka. The genus of embedded surfaces in the projective plane. *Math.Reserch Letters 1*, pp. 797–808, 1997.

[10] B. Lawson and M L. Michelson. *Spin Geometry.* Princeton University Press, 1989.

[11] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes.* Annals of mathematics studies 76. Princeton University press, 1974.

[12] J.D. Moore. *Lectures on Seiberg-Witten Invariants.* Lecture notes in mathematics. Springer, 1996.

[13] J.W. Morgan. *The Seiberg-Witten equation and application to the topology of smooth four-maniforlds.* Mathematical notes 44. Princeton University Press, 1996.

[14] C. Okonek and A. Van de Ven. Stable vector bundles and differentiable structures on certain elliptic surfaces. *Inventiones Math.86*, pp. 357–370, 1986.

[15] S. Smale. An infinite-dimensional version of Sard's theorem. *Amer.J.Math.87*, pp. 861–866, 1966.

[16] E. Witten. Monopoles and four-manifolds. *Math.Reserch Letters 1*, pp. 769–796, 1994.

[17] 太田啓史. トポロジー、位相的場の理論そして表現論. 数理科学 3, pp. 26–32, 3 1996.

[18] 深谷賢治. ゲージ理論とトポロジー. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

[19] 小松醇郎, 中岡稔, 菅原正博. 位相幾何学 I . 岩波書店, 1967.

[20] 小林昭七. 接続の幾何学とゲージ理論. 裳華房, 1989.

[21] 小林昭七. 複素幾何学 2. 岩波講座 現代数学の基礎 30. 岩波書店, 1998.

[22] 村上信吾. 多様体. 共立数学講座 19. 共立出版, 1969.

[23] 中岡稔. 位相幾何学（ホモロジー論）. 共立数学講座. 共立出版, 1970.

[24] 茂木勇, 伊藤光弘. 微分幾何学とゲージ理論. 共立数学講座. 共立出版, 1986.

[25] 松島与三. 多様体入門. 数学選書 5. 裳華房, 1965.