

最終講義 資料

シャボン玉・泡・石ケン膜の数学

渡辺 金治

1 はじめに

シャボン玉：空間の有界閉凸集合で体積が1のものうち、その表面積が最小なもの、
空間の有界閉凸集合で表面積が1のものうち、その体積が最大なもの、
⇒ 球（球面）

面積を変えない微小変形によりその長さが増加しない平面曲線

⇒ 曲率一定な曲線 ⇒ 直線または円

体積を変えない微小変形によりその表面積が増加しない曲面

⇒ 表面積の（体積を変えない）第1変分がゼロ ⇒ 平均曲率一定な曲面

曲面 $z = u(x, y)$ の平均曲率が H であることは次の偏微分方程式を満たすこと

$$\left\{ \frac{u_x(x, y)}{\sqrt{1 + u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2}} \right\}_x + \left\{ \frac{u_y(x, y)}{\sqrt{1 + u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2}} \right\}_y = 2H$$

例 半径 r の球面の平均曲率 $\frac{1}{r}$, 半径 r の円柱の側面の平均曲率 $\frac{1}{2r}$,

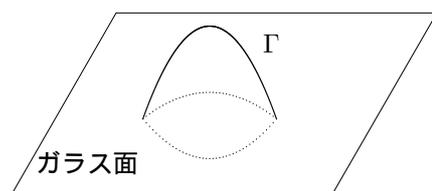
石ケン膜：微小変形によりその表面積が増加しない曲面 ⇒ 表面積の第1変分がゼロ

⇒ 平均曲率がゼロである曲面（極小曲面）

例 平面, 懸垂線 $y = \frac{e^{r(x-c)} + e^{-r(x-c)}}{2r}, r > 0$, を x 軸中心に回転して得られる回転面

泡：幾つかのシャボン玉が, 互いに接しあるいは壁等に接し, 体積を保存して変形した図形のうち,
そのシャボン液が作る曲面達の表面積の総和が最小, あるいは極小なもの

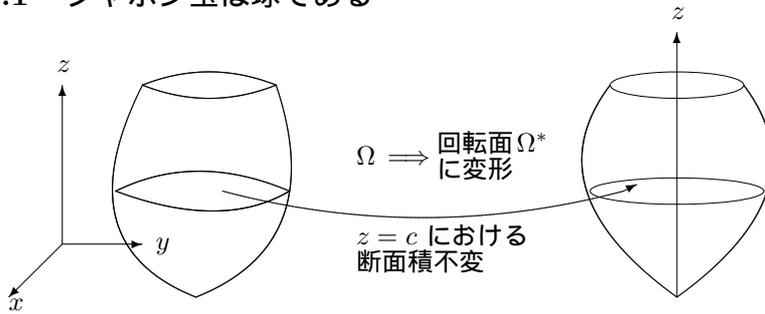
例 シャボン玉が平面状の濡れたガラス面に接して変形した泡は半球面である。



ガラス面と曲面 Γ で囲まれた部分の体積が
1である図形のうち, Γ の表面積が極小のもの

2 準備

2.1 シャボン玉は球である



補題 2.1. 内点をもつ有界閉凸集合 Ω , ただし

$$0 = \min \{z; (x, y, z) \in \Omega\}, \quad L = \max \{z; (x, y, z) \in \Omega\},$$

に対して回転体 Ω^* を次ぎで定める。

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \left\{ (r \cos[2\pi t], r \sin[2\pi t], c); 0 \leq r \leq r(c), c \in [0, L], t \in [0, 1] \right\}, \\ r(c) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (\Omega \cap \{z = c\}) \text{ の面積} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

このとき次ぎの 1 - 4 が成立する。

1. Ω^* は有界閉凸集合である。
2. Ω の体積 = Ω^* の体積
3. Ω の表面積 = Ω^* の表面積
4. Ω の表面積 = Ω^* の表面積ならば, Ω は xy 平面に直交するある直線を回転軸とする回転体である。

球であることの証明: 体積 1 の有界閉凸集合のうち, その表面積が最小のものを Ω とする。単位ベクトルを任意に与え, その方向を z 軸と考えれば, 補題 2.1 の主張 4 より Ω はその方向に, 従ってあらゆる方向に回転軸をもつ。このような集合は球のみである。

存在定理の証明: x 軸を回転軸とした有界閉凸回転体で体積が 1 のもののうち, その表面積が最小のものは次ぎを満たす関数列 $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, r_n \in \mathcal{F}(L_n)$, のある部分列の極限関数による回転体として与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L) &= \left\{ r \in \text{Lip}([0, L]); 0 \leq r(x), r(0) = r(L) = 0, \text{上に凸}, \int_0^L \pi r(x)^2 dx = 1 \right\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{L_n} 2\pi r_n(x) \sqrt{1 + r_n'(x)^2} dx &= \inf \left\{ \int_0^L 2\pi r(x) \sqrt{1 + r'(x)^2} dx; L > 0, r \in \mathcal{F}(L) \right\} \end{aligned}$$

補題 2.1 において Ω は凸としたが, そうでない場合でも十分多くの集合に対して成立する。これを利用すれば最初に挙げた泡の例の場合, ガラス面と Γ とが囲む部分が凸でなくともその泡は回転面のうち表面積が極小なものとなることが分かり, 平均曲率一定な回転面の考察より半球面であることが示せる。

特にシャボン玉 (球面) は体積一定の有界閉集合 (滑らかな境界をもつ閉曲面) のうちその表面積が最小となるものであることも分かる。

2.2 平均曲率一定な回転面

x 軸を回転軸とした $y = u(x) > 0$ のグラフによる回転面の平均曲率 H

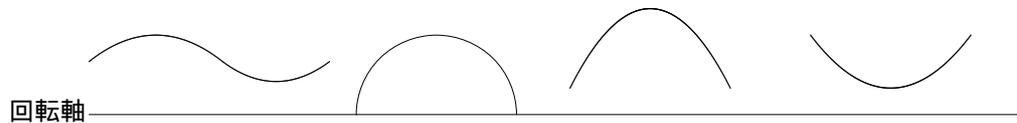
$$\frac{u_{xx}(x)}{\sqrt{[1+u_x(x)^2]^3}} = \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u_x(x)^2}} - 2H \quad (2.1)$$

$H = 0$ の場合, 解 $u(x)$ は懸垂線のみである。

平均曲率が一定値である回転面でその回転軸と交わるものは球面のみである。

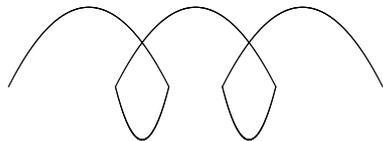
平均曲率が一定値 $H \neq 0$ である回転面の概形 ($C = \frac{u(0)}{\sqrt{1+u_x(0)^2}} - Hu(0)^2$ とおく)

$H > 0, C > 0$	$H > 0, C = 0$	$H > 0, C < 0$	$H < 0$ の場合
の場合周期的	の場合円周	の場合	



$u_x(p) = 0$ となる点が存在することが分かるので, パラメータ C を $u_x(0) = 0$ として取れば, $H > 0, C > 0$ の場合は $1/4H \geq C > 0$ の範囲にあり, $C = 1/4H$ のとき $u(x) =$ 正定数, 即ち円柱の側面の場合である。

後半の2つの場合その両端点の傾きは $\pm\infty$ で, 上図の平均曲率 H の曲線と平均曲率 $-H$ の曲線とを下図のようにその端点で連続的に結ぶことにより得られる周期的な曲線による回転面の平均曲率は (法線ベクトルを連続的に定めると) 一定になる。



体積を変えない微小変形: x 軸を回転軸とした $y = u(x) > 0, a \leq x \leq b$, による回転面の微小変形 (回転面に限定する) $\phi(\varepsilon, x)$ とは, $u(x) = \phi(0, x)$, であり, 回転体の体積 $\int_a^b \pi \phi(\varepsilon, x)^2 dx$ が ε に無関係な一定値なもの。特に $f(x) = \phi_\varepsilon(0, x)$ は $\int_a^b u(x)f(x) dx = 0$ を満たす。

$$J(\phi(\varepsilon)) = \int_a^b 2\pi \phi(\varepsilon, x) \sqrt{1 + \phi_x(\varepsilon, x)^2} dx,$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\phi(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b 2\pi \left\{ \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u_x(x)^2}} - \frac{u_{xx}(x)}{\sqrt{[1+u_x(x)^2]^3}} \right\} u(x)f(x) dx + \left[\frac{2\pi u u_x f}{\sqrt{1+u_x^2}} \right]_a^b,$$

この第1変分が両端を固定する ($f(a) = f(b) = 0$) すべての微小変形 $\phi(\varepsilon, x)$ に対してゼロのとき, ある定数 H に対して $u(x)$ は微分方程式 (2.1) を満たす。また第1変分がすべての微小変形 $\phi(\varepsilon, x)$ に対してゼロのとき, $u_x(a) = u_x(b) = 0$ であり, その第2変分は次ぎで与えられる:

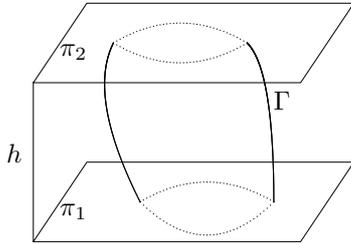
$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(\phi(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = 2\pi \int_a^b \left\{ \frac{u(x)}{\sqrt{[1+u_x(x)^2]^3}} f_x(x)^2 - \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u_x(x)^2}} f(x)^2 \right\} dx,$$

$f \neq 0$ であるすべての微小変形 $\phi(\varepsilon, x)$ に対して $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(\phi(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} > 0$ のとき, 安定 (極小)

ある微小変形 $\phi(\varepsilon, x)$ に対して $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(\phi(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} < 0$ のとき, 不安定 (極小でない)

3 幾つかの例

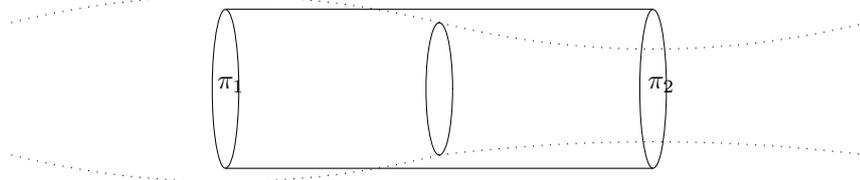
例 3.1. シャボン玉が幅 h の平行な 2 平面に接して変形した泡



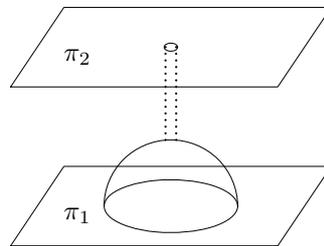
平行な平面 $\pi_k, k = 1, 2$, と曲面 Γ とで囲まれた部分の体積が与えられた定数値の図形のうち, Γ の表面積が最小のものが存在すれば, それは円柱の側面である。

半径 r の円を底面, 高さ h の円柱の側面は,
 $\pi r < h$ のとき不安定 (極小でない),
 $h < \pi r$ のとき安定 (表面積の第 2 変分が正, 極小である),
 $\frac{9r}{4} < h < \pi r$ のとき最小でなく,
 $0 < h < \frac{9r}{4}$ のとき最小である。

$\pi r < h$ のとき, $\phi(\varepsilon, x) = \frac{r + \varepsilon \cos[\pi x/h]}{\sqrt{1 + \varepsilon^2/2r^2}}, 0 \leq x \leq h$, の x 軸中心の回転体の体積は $\pi r^2 h$ で, 表面積は十分小な $\varepsilon > 0$ に対して $2\pi r h$ 未満



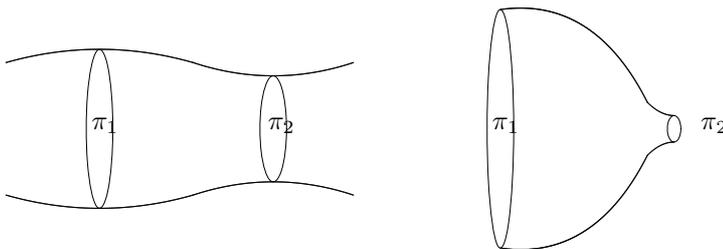
$\frac{9r}{4} < h$ のとき, 体積 $\pi r^2 h$ の半球の表面積 $2\pi \sqrt[3]{(9r^4 h^2)/4}$ は $2\pi r h$ 未満



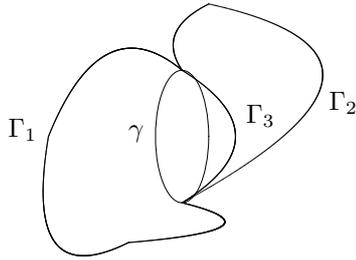
上の平面と半球面とをつなぐ細い筒を付けて曲面を作る

円柱の側面以外の曲面で極小となるものの候補は, 平均曲率一定な回転面で周期的なもの (前例の $H > 0, C > 0$ の場合) で最大値最小値に達する隣接する点 (その間隔は周期の半分) を端点とするもののみである。

C が $1/4H$ (円柱の側面の場合) に十分近いとき, および C が 0 (半球面の場合) に十分近いとき, それらの回転面は極小ではない。



例 3.2. 2つのシャボン玉が接して変形した泡



$V_k, k = 1, 2$ を正定数とする。

条件 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \Gamma_3 \cap \Gamma_1 = \gamma$ は平面単純閉曲線
 および $k = 1, 2$ に対して曲面 Γ_k と Γ_3 によって囲まれる
 部分の体積が V_k のもとで

曲面 $\Gamma_k, k = 1, 2, 3$, の表面積の総和が最小となるものは
 下図で与えられる。

下図1のように泡は3つの球面の切片（これを球面帽子という）からなり、隔壁は半径の大きい切片の方に膨らんでおり、それらの共通点でそれらは互いに120度で交わる。さらに球面の切片の中心は一直線上にあり、半径を r_1, r_2 , 隔壁のそれを r_3 とすれば、 $r_1 \neq r_2$ であり $r_1 > r_2$ とすると、 $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}$ が成立する。あるいは下図2のように泡は円である隔壁とそれに関して対称な2つの球面の切片から成り、それらの共通点でそれらは互いに120度で交わる。

図1

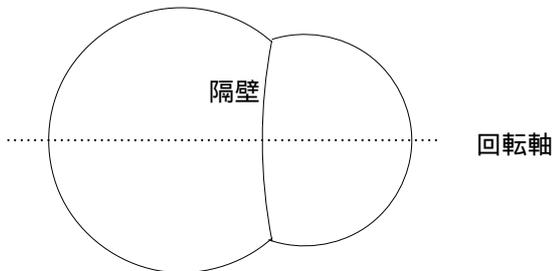
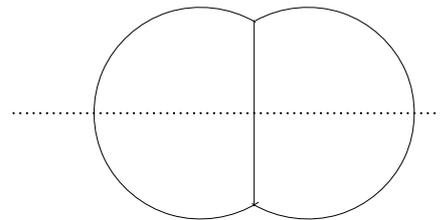
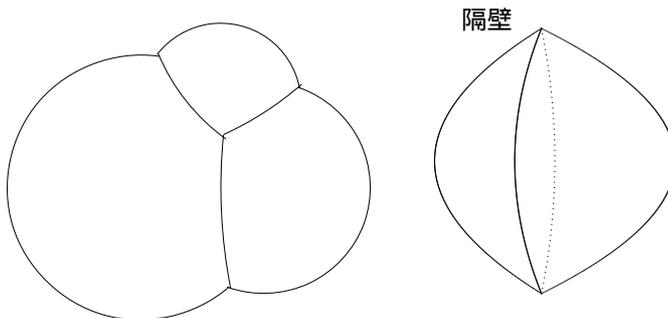


図2



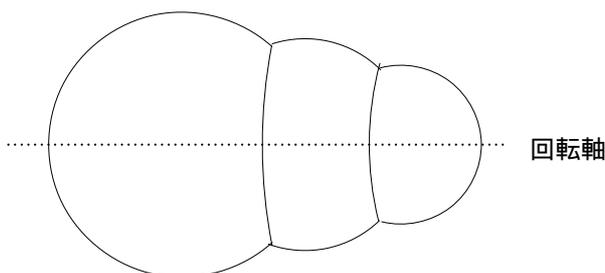
例 3.3. 3・4個のシャボン玉が接して変形した泡の例

3個のシャボン玉が変形した泡の例



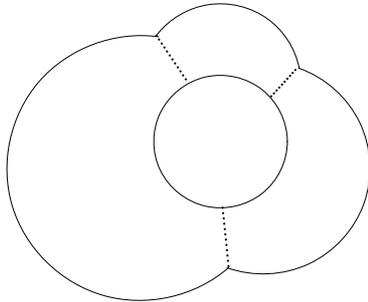
左図の泡の表面の3つの球面と
 隔壁である3つの球面は
 その交線上で120度で交わる。
 点線は3個の球面（隔壁）の
 共通部分で、円周の弧
 （あるいは線分）である。

上図の形と下図の形の泡とでは、それぞれの体積が等しいとき、その表面積はどちらが小さいか。



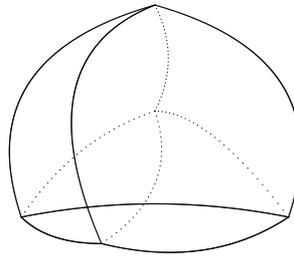
4個シャボン玉が変形した泡の例

真上から見る



点線は2つの球面の交線

隔壁



点線は隔壁である3つの球面の交線

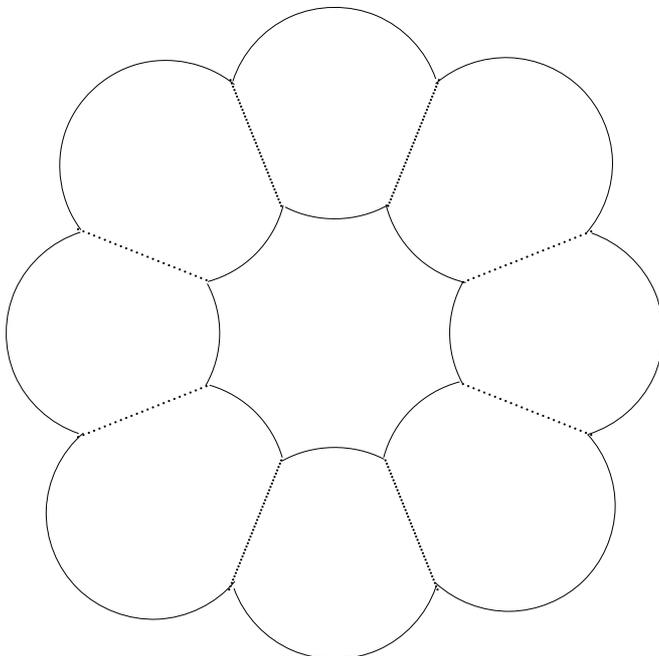
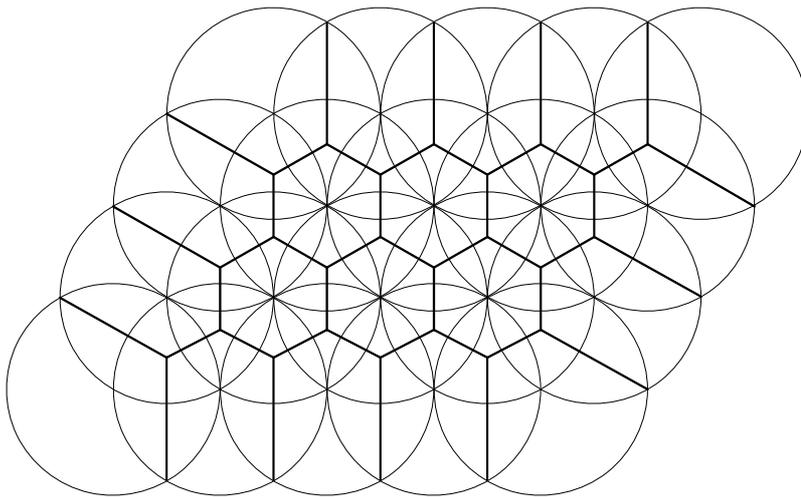
左図の泡の表面の4つの球面と隔壁である6つの球面はその交線上で120度で交わる。

右図における隔壁の交線4つは1点で交わる。その交角 θ は $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ を満たし約109度である。

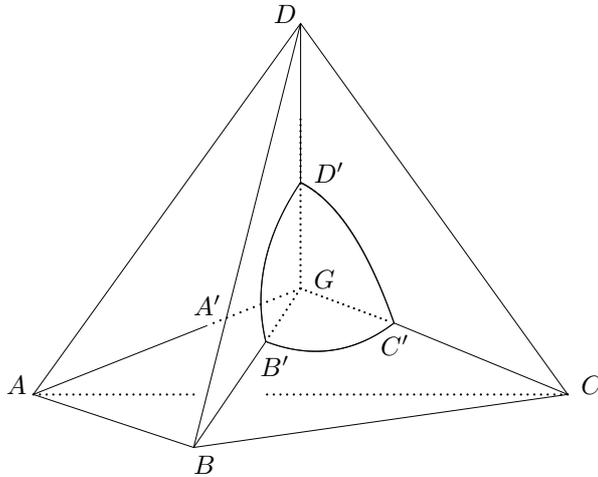
半径の等しい球面帽子同士の隔壁は円の一部となる。

例 3.4. 120度で交わる球面達の例

蜜蜂の巣状の泡



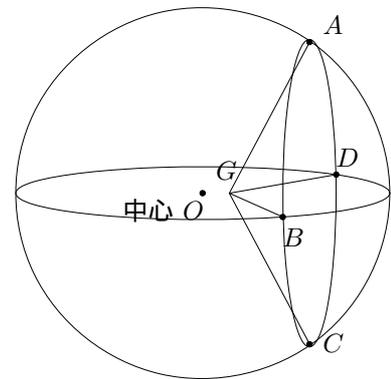
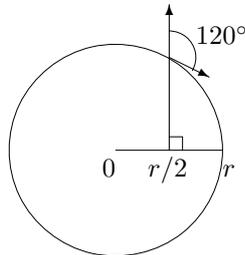
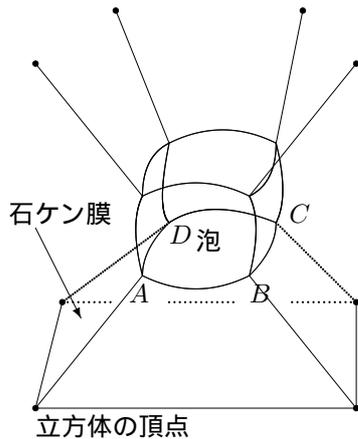
例 3.5. シャボン玉が正四面体の6辺を張る石ケン膜に接して変形した泡



正四面体 $ABCD$ の重心を G として、
 線分 GA, GB, GC, GD 上に
 $GA' = GB' = GC' = GD'$
 となる点 A', B', C', D' を取る。
 このとき中心 A' 半径 $A'B'$ の球面が
 三角形 GBC, GBD, GCD によって
 切り取られる部分（左図）が泡の一部である。
 このような球面の部分4個が泡の表面である。
 全体の石ケン膜はこの泡と線分 $B'B, BC, CC'$
 と円弧 $C'B'$ で囲まれた $\triangle GBC$ の部分
 と合同な図形6個からなる。

円弧 $B'C'$ の各点で2つの球面の一部 $B'C'D', B'C'A'$ と $\triangle GBC$ の一部 $B'C'CB$ は互いに 120° で交わっている。

立方体の6辺を張る石ケン膜の中央にシャボン玉が接して泡が生じた場合その形状は？平面状の石ケン膜12個と球面状の膜6個からなる泡がそれらの交線上で互いに 120° で交わるものを見つけよう。



A, B, C, D は立方体の頂点, G は立方体の対角線の交点, 半径 r の球面の中心 O と3点 G, A, B を通る平面との最短距離が $r/2$ となるように A, B の位置を定める。