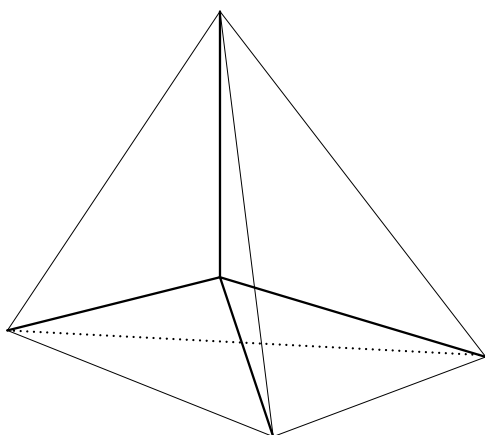


石ケン膜の幾つかの例

針金で作られた枠（例えば多面体の辺）を石ケン液に漬け静かに引き上げると枠を張る（枠の辺を周の一部とする曲面を少なくとも 1 個含む）石ケン膜ができる。この膜は極小曲面（連続的微小変形によってその表面積が極小となるもの）の具体的な例である。

写真ではその概形が分かりづらいので、ここではその概形（大きさ長さや角度は正確ではない）を挙げる。特に曲面が平面的に見えるが実際は、例外を除いて、石ケン膜は曲がった面達の和集合である。また接線（3 つの曲面が 120° で交わる曲線）を太線で表している。そして 4 つの接線が交わっている点で接線が角 θ 、（約 109° で $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ）、で交わり、その近傍には 6 個の面がある。

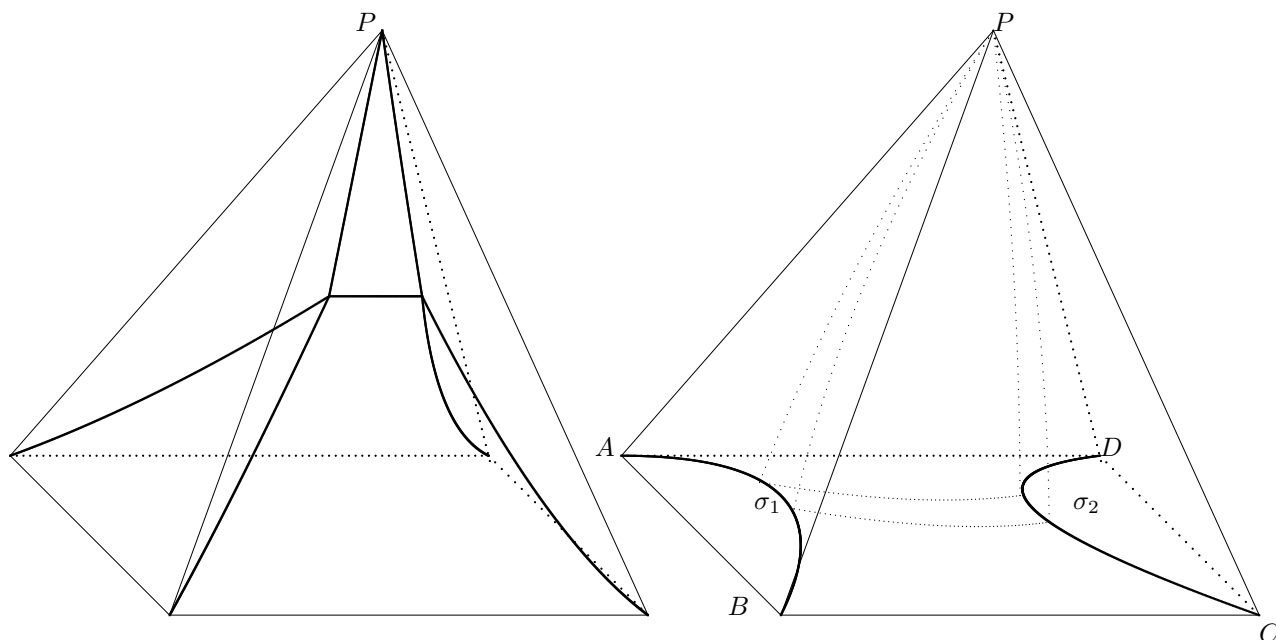
1 正4面体の6辺を枠とする石ケン膜



正4面体の隣接する2頂点とその重心を
頂点とする6個の三角形の面からなる膜

2 4角錐の8辺を枠とする石ケン膜

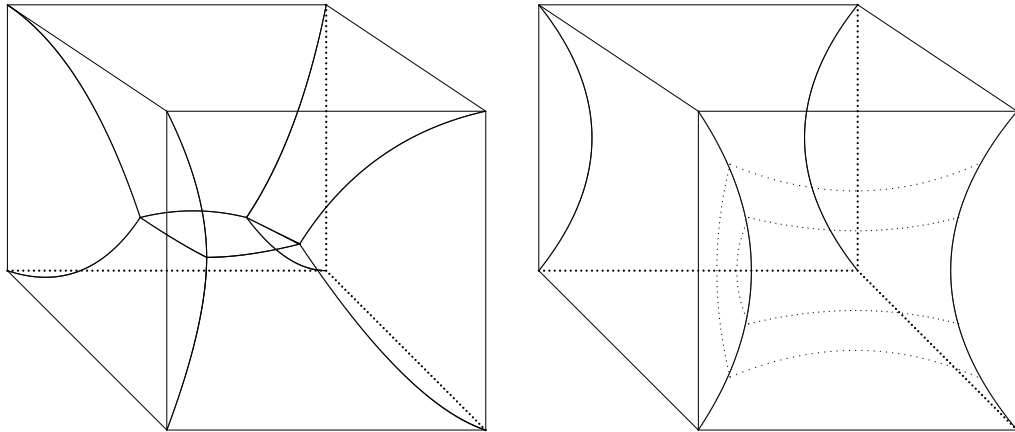
頂点 P を端点とする多面体の辺を共有する2つの面のなす角度がすべて 120° 以上の場合は、多面体の4つの三角形の面が膜となる。それらの角度がすべて 120° 未満の場合は、下図の膜となる。右図の膜は、辺 AB と接続線 σ_1 で囲まれる面、 CD と接続線 σ_2 で囲まれる面、 PA, PB と接続線 σ_1 で囲まれる面、 PC, PD と σ_2 で囲まれる面、および $BC, \sigma_2, DA, \sigma_1$ で囲まれる面からなるものである。これは三角形 QAB, PCD と四角形 $ABCD$ の辺を張る膜を、 Q を P に近づけた場合の極限的状況の膜と見ることができる。



左図の膜にどのような面があるか考えよう。さらに頂点 P を端点とする接続線が1個でなく2個である理由を考えよう。

3 立方体の12辺を枠とする石ケン膜

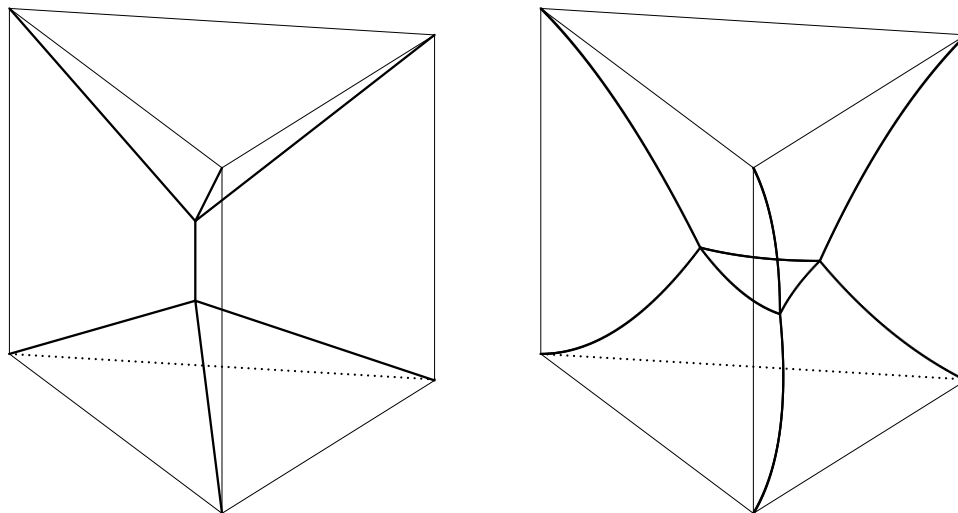
左図の膜は、三辺形状の面4個、等脚台形状の面8個と4辺形状の面1個のもの。右図の膜は、立方体の1辺と接続線1個で囲まれる面4個と、立方体の2辺と接続線2個で囲まれる4辺形状の面4個からなるもの。これは立方体の4個の正方形の側面を変形し表面積のより小さい膜を作ると得られる。実際の石ケン膜では左図のもののみができるが、その中央にある4辺形状の面を "破壊" すると右図のものができる。



石ケン膜の面の総数、多面体の辺の総数 + 接続線の総数、多面体の頂点の総数 + 接続点の総数、これら3つの数になんらかの関係があるか、他の例も参考にして、考えよう。

4 正三角柱の9辺を枠とする石ケン膜

左図の膜は三角形の面6個と等脚台形の面3個からなるもの。右図の膜は三辺形状の面4個と等脚台形状の面6個からなるもの。正三角形の1辺と高さの比の値により両方が、あるいは一方のみができる。正三角柱の3つの長方形の面を変形して得られる膜（立方体の場合の右図と類似のもの）もある。

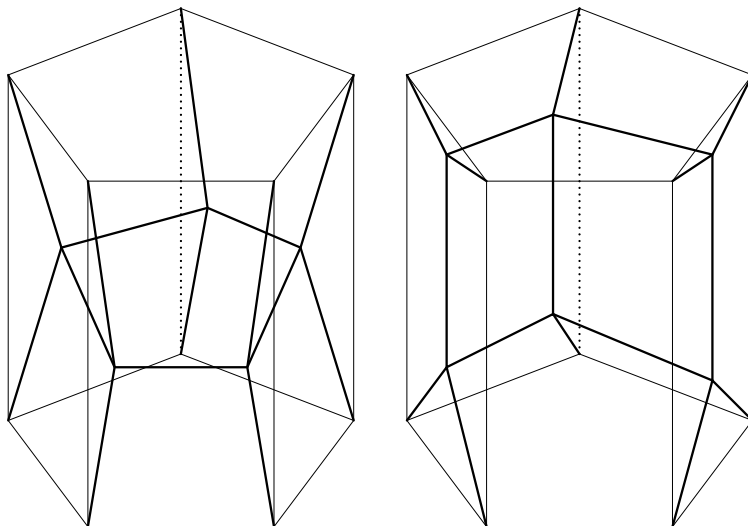


枠のつくる多面体の対称性（面对称・点对称・ある軸に関する回転・それらの合成）と石ケン膜の対称性との関係について考えよう。

5 正5角柱の15辺を枠とする石ケン膜

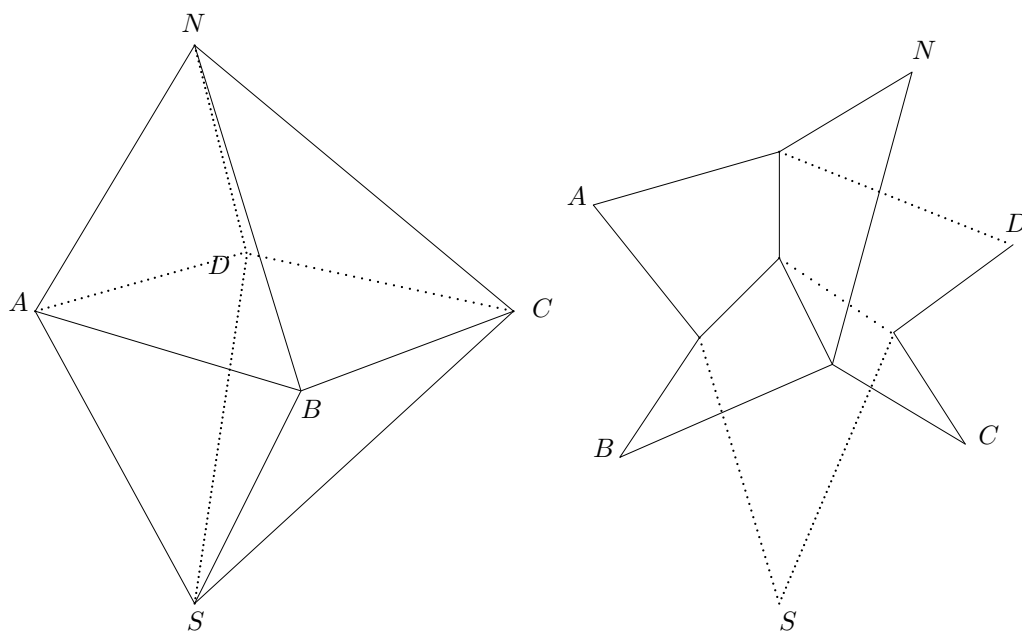
接続線を直線的に書いたが実際は曲線であり面も曲面である。

正5角形の1辺の長さと高さの比によって、両方の膜あるいは一方の膜のみができる。

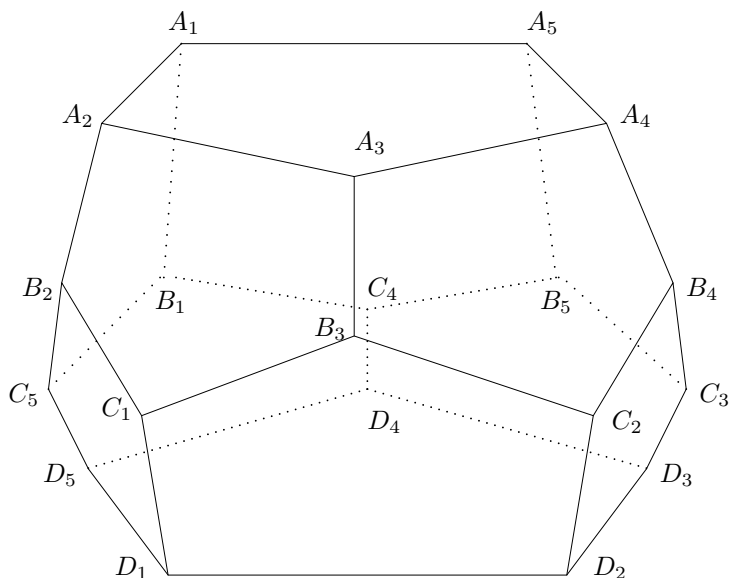


6 正8面体の12辺を枠とする石ケン膜

各頂点を端点とする2つの接続線が存在する特徴を持った膜である。右図で、線分は実際は曲線である接続線を表しており、正8面体の1辺と2つの接続線で囲まれた面12個は描いていない。



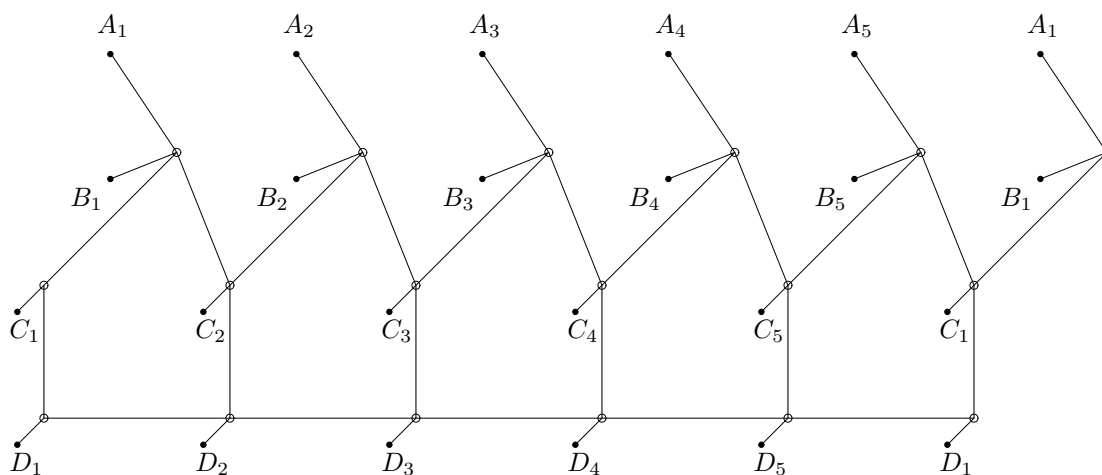
7 正12面体の30辺を枠とする石ケン膜



上図には描ききれないので石ケン膜を平面的に描く。どのような膜が想像しよう。条件は

1. 正12面体の各辺を周の一部とする面が1個ある。
2. 接続線は3つの面の周の一部となっている。
3. 接続点の近くには6個の面がある。

・は正12面体の頂点, ◯は接続点, 線分は実際は曲線である接続線を表している。



正20面体の1辺を共有する2つの面のなす角度は120度以上であることに注意し, 正20面体の30個の辺を枠とする石ケン膜はどのようなものか考えよう。

8 懸垂曲面

懸垂線

$$y = \frac{1}{2r} \left\{ e^{rx} + e^{-rx} \right\}, \quad r > 0,$$

を x 軸中心に回転して得られる曲面を懸垂曲面と言う。これは2つの円を針金で作り重ねて石ケン液に漬け引き上げ2つの円を引き離すと得られる石ケン膜として実現される。2つの円を離しすぎると膜は壊れる。

右図のように中央に小円（その周は接統線）の面とその左右に懸垂曲面ができる膜もある。

