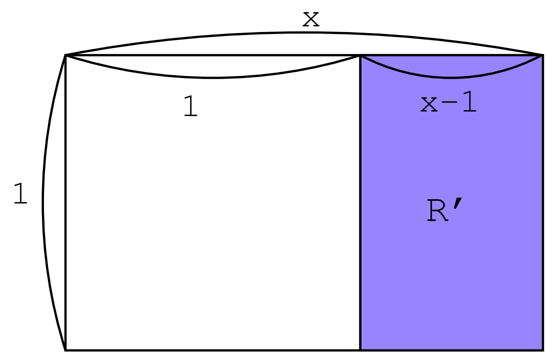
黄金比にまつわるエトセトラ

濱中 裕明

1．とりあえず、黄金比の導入

長方形 R から正方形を図のように切り取って残った長方形 R' がもとの長方形 R と相似になるとき、長方形 R の縦横の辺の長さの比を黄金比という。



縦の辺を1として、横の辺を x と置くと

$$\begin{aligned} 1 : x &= (x-1) : 1 \\ \frac{1}{x} &= \frac{(x-1)}{1} \\ x^2 - x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

を得る。

$x > 1$ だから $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$（以後、これを τ と表す。）

黄金比は $1 : \tau \simeq 1 : 1.6180339887$

この τ についての話をいろいろするわけです。

2．連分数展開

１つの実数が 小数で与えられたとき、それがどんな数なのか調べるにはどうしたらいいだろうか？

たとえば、与えられた小数が

$$3.142857142857142857...$$

と循環小数になっていれば、、、

では 循環してないときは どうするか？

正の実数γに対して、自然数$a_0, a_1, a_2, ...$と０以上１未満の数$b_0, b_1, ...$を 次のようにきめる。

$$\begin{aligned} \gamma = &\ a_0 + b_0 & \rightarrow &\ a_0 \\ = &\ a_0 + \frac{1}{a_1 + b_1} & \rightarrow &\ a_0 + \frac{1}{a_1} \\ = &\ a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + b_2}} & \rightarrow &\ a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \end{aligned}$$

右に作成した分数の列を γの連分数近似という。以後、連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}$$

のことを $\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$等と書くことにする。

初等的な計算で、

$$\gamma_0 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma \leq \cdots \gamma_3 \leq \gamma_1$$

となる。実は、連分数近似は 元の実数に収束する有理数列となっている。

例：$\sqrt{3}$を連分数展開してみる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1.73205\cdots & \to\ & 1 \\
&= 1+\frac{1}{1.36602\cdots} & \to\ & 1+\frac{1}{1} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2.73205\cdots}} & \to\ & 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1.36602\cdots}}} & \to\ & 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}
\end{aligned}$$

このように$\sqrt{3}$を連分数展開すると$\langle 1,1,2,1,2,1,2,\cdots\rangle$という、同じパターンが 繰り返すような「周期的」連分数になります。実は

正の実数γの連分数近似が周期的になるための必要十分条件は$\gamma = \frac{a\pm\sqrt{b}}{c}$($a,\ b,\ c$は整数、$b$は平方数でない。）と表せることである。

★黄金比τの連分数展開

τは $\tau^2 - \tau - 1 = 0$を満たすので、

$$\begin{aligned} \tau - 1 - \frac{1}{\tau} &= 0 \\ \tau &= 1 + \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

最後の式を 最後の式自身に代入して、

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}} \\ &= \cdots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} \end{aligned}$$

つまり、τは1だけしか現れない美しい連分数展開を持つということになります。

さて、実は連分数展開というのは ある意味において与えられた無理数γを最も良く近似する有理数列の一つです。

たとえば：

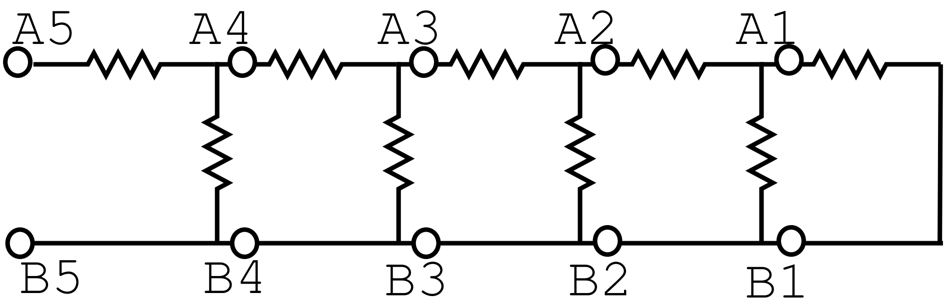
- 分母が N 以下のすべての分数を小さい順にならべたとき、そのなかで $\frac{a}{b} < \gamma < \frac{c}{d}$ となる２つの分数があるでしょう。その２つのうちのどちらかは 連分数近似に現れます。

- 有理数 $\frac{a}{b}$ のうち、$|\gamma - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$ を満たすものはかならず連分数近似に現れます。

ということは 連分数の収束の早さによって、無理数の「有理数からの離れ度合い」が分かるとしてもよいだろう。

連分数に１しか現れないので、 黄金比はもっとも収束が遅い。

次のような回路を考えます。抵抗の大きさはすべて1Ω
とします。



$x\Omega$ の抵抗と $y\Omega$ の抵抗を並列したとき、合成抵抗は
$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\Omega$だから、

A1-B1間の抵抗R_1： 1

A2-B2間の抵抗R_2： $1+\frac{1}{1+\frac{1}{R_1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$

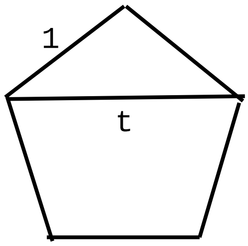
A3-B3間の抵抗R_3： $1+\frac{1}{1+\frac{1}{R_2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$

A4-B4間の抵抗R_4： $1+\frac{1}{1+\frac{1}{R_3}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$

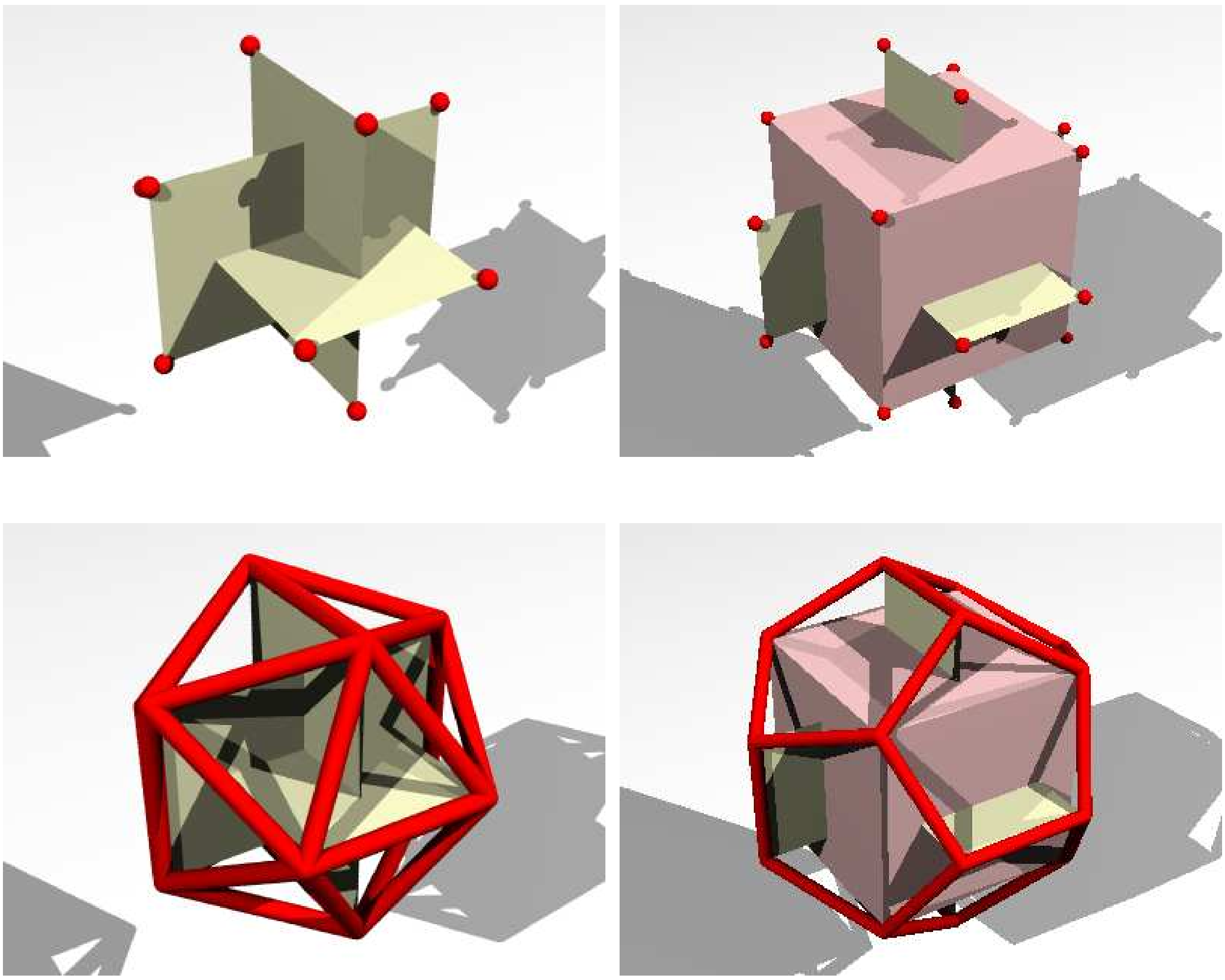
A5-B5間の抵抗R_5： $1+\frac{1}{1+\frac{1}{R_4}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$

３．多面体と黄金比

正５角形と黄金比は深い関係があることは よく知られている。

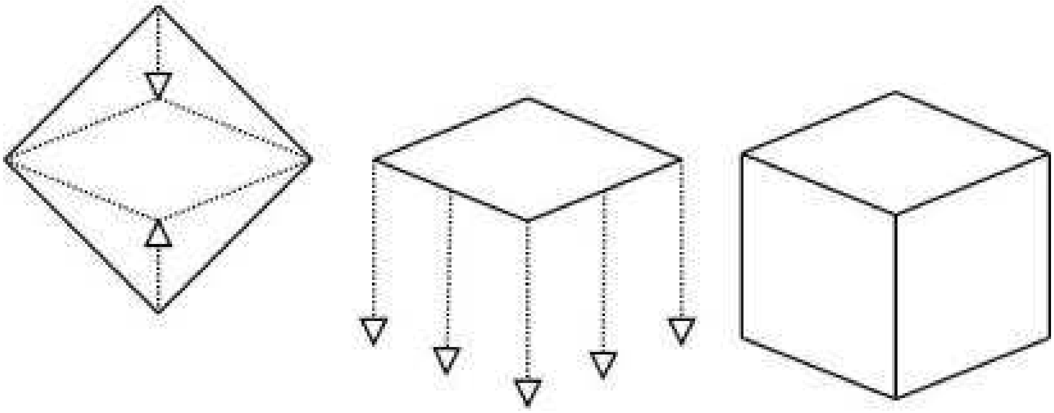


そのため ５角形と関係の深い 多面体、正１２面体と正２０面体も黄金比と関係が深い。



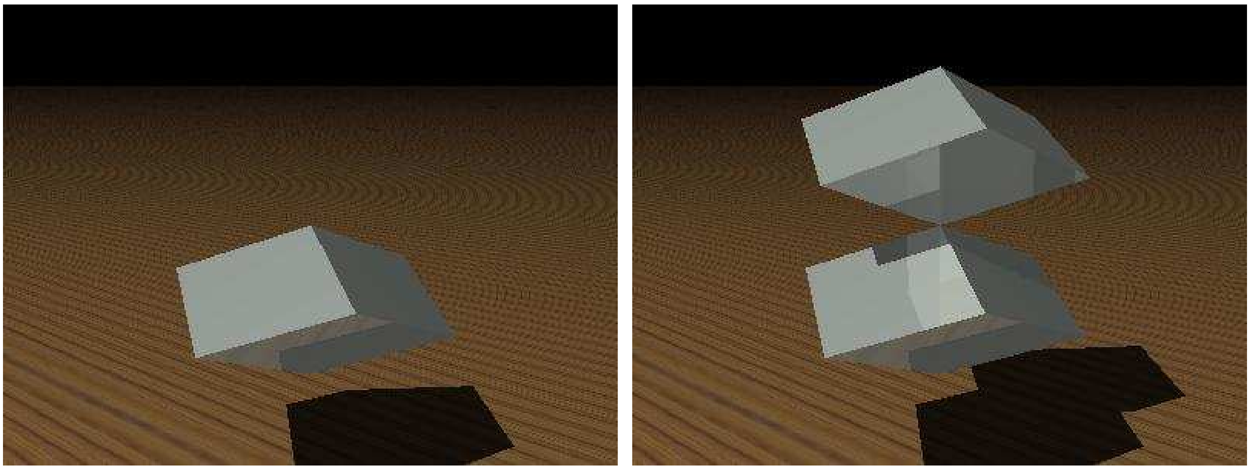
★高次元立方体の影

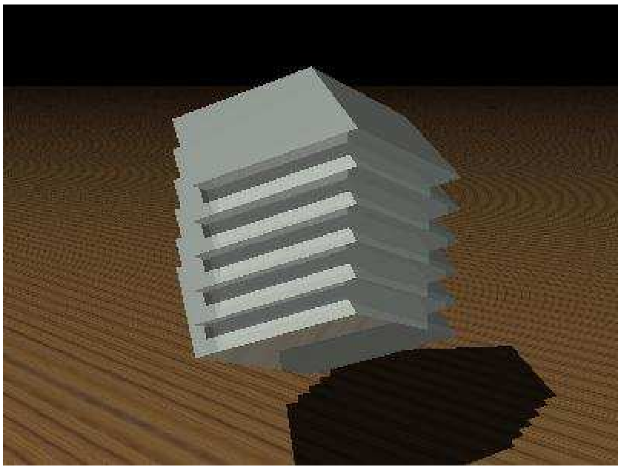
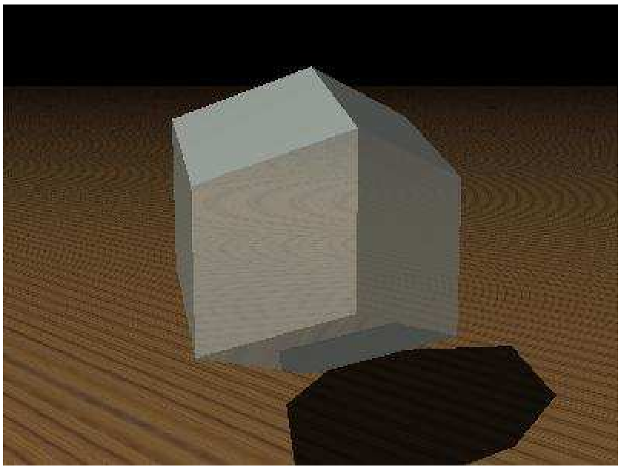
ここでは すこし変わった多面体を紹介する。



立方体の見取り図は 正方形をつぶして 平行移動した軌跡と考えられる。

実は、同じ方法で ４次元立方体の３次元への影のひとつが得られる。

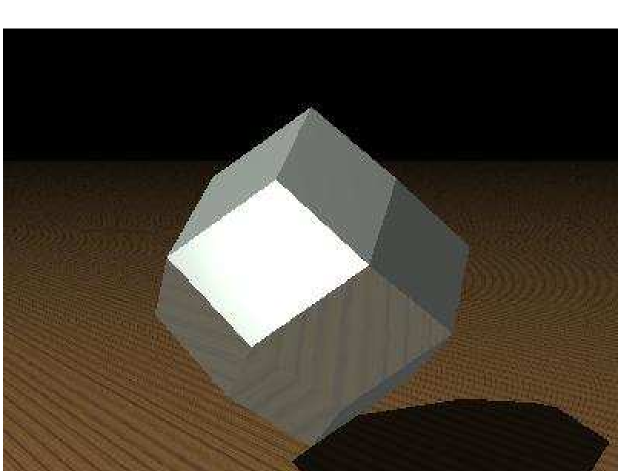
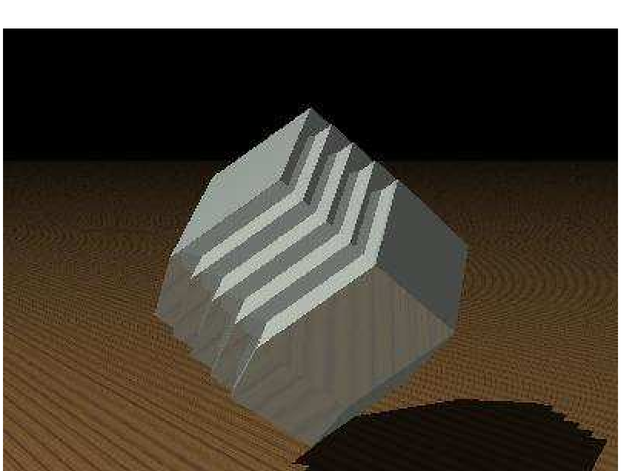


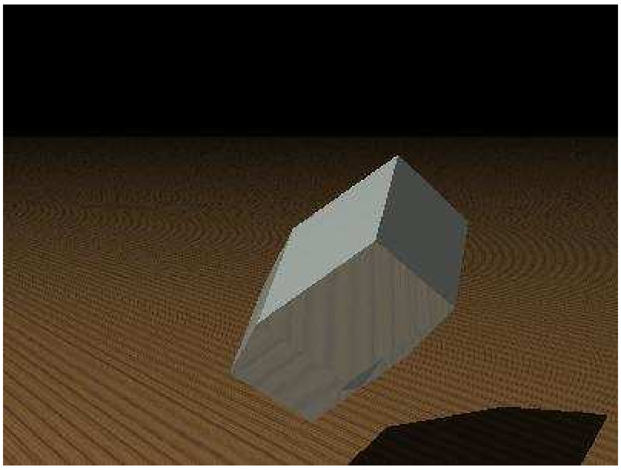
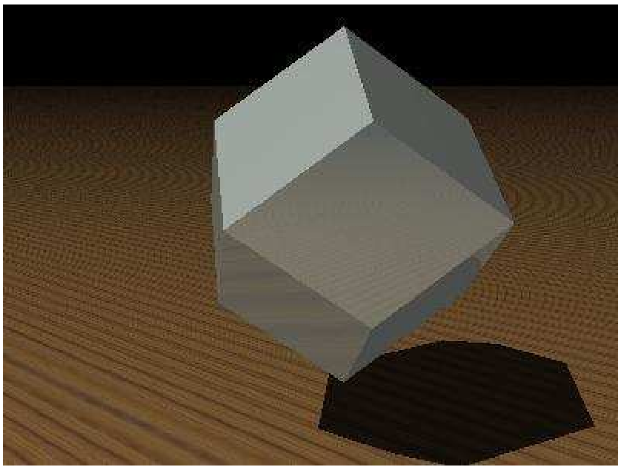
上記 右の立体は４次元立方体の３次元への影のうち、もっとも対称性の高いものの１つで すべての面が合同な菱形になり、菱形12面体と言われる。

さて、5次元立方体についても、つぎのような行列で表される ５次元から３次元への正射影で影を落とすと、

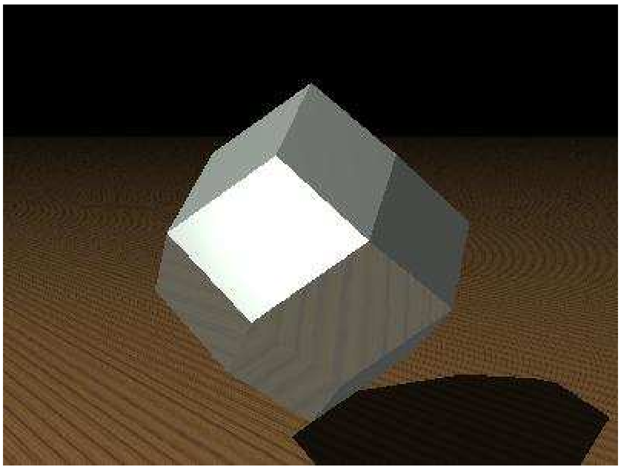
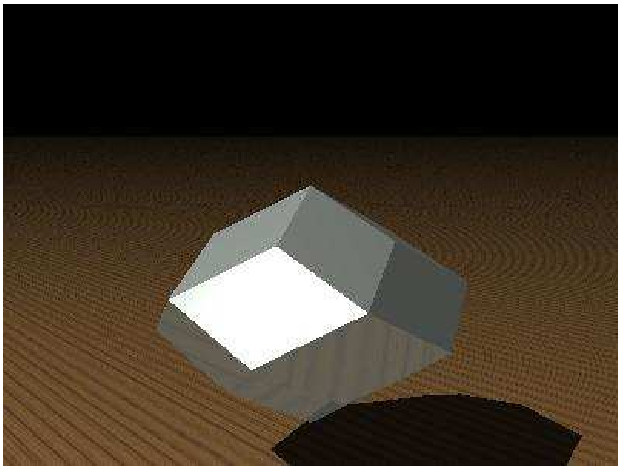
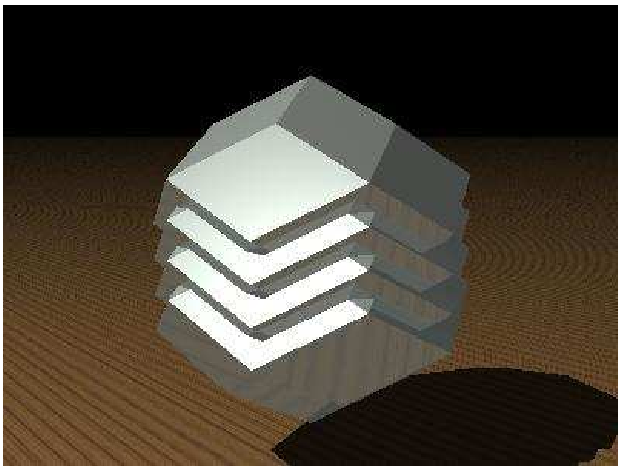
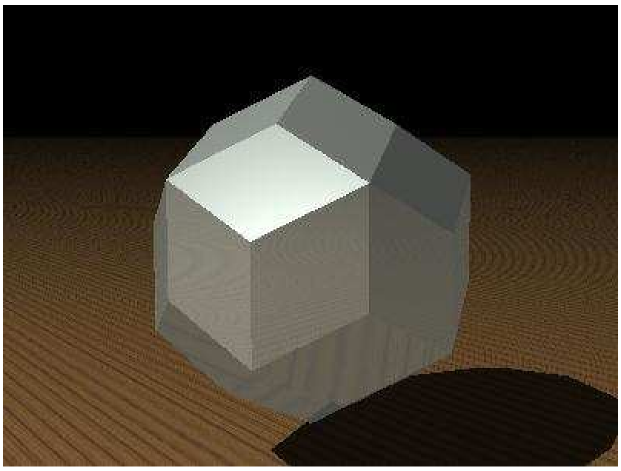
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\cos(0), & 2\cos(\frac{2}{5}\pi), & 2\cos(\frac{4}{5}\pi), & 2\cos(\frac{6}{5}\pi), & 2\cos(\frac{8}{5}\pi) \\ 2\sin(0), & 2\sin(\frac{2}{5}\pi), & 2\sin(\frac{2}{5}\pi), & 2\sin(\frac{2}{5}\pi), & 2\sin(\frac{2}{5}\pi) \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$

上記 ５次元立方体の影は ４次元立方体の影をつぶして動かした軌跡になっている。

さらに 同様の手法で６次元立方体の影を ５次元立方体の影から構成できる。

この最後の多面体もすべての面が合同な菱形となり、
菱形３０面体と呼ばれる。

菱形３０面体の菱形の対角線の長さの比が黄金比

菱形１２面体の菱形の対角線の長さの比が１：$\sqrt{2}$

立方体の面の対角線の長さの比が１：１

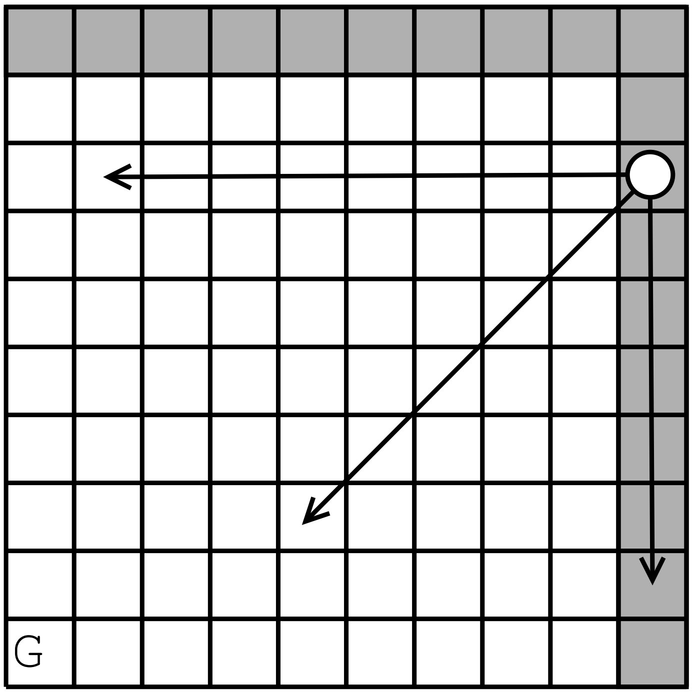
正５角形の辺と対角線の長さが黄金比

正方形の辺と対角線の長さが１：$\sqrt{2}$

正３角形の辺と「対角線」の長さが１：１

１：$\sqrt{2}$は シルバー比と呼ばれることもあるらしい。

４．ゲームの話 ～ 一見全然違う話 ～

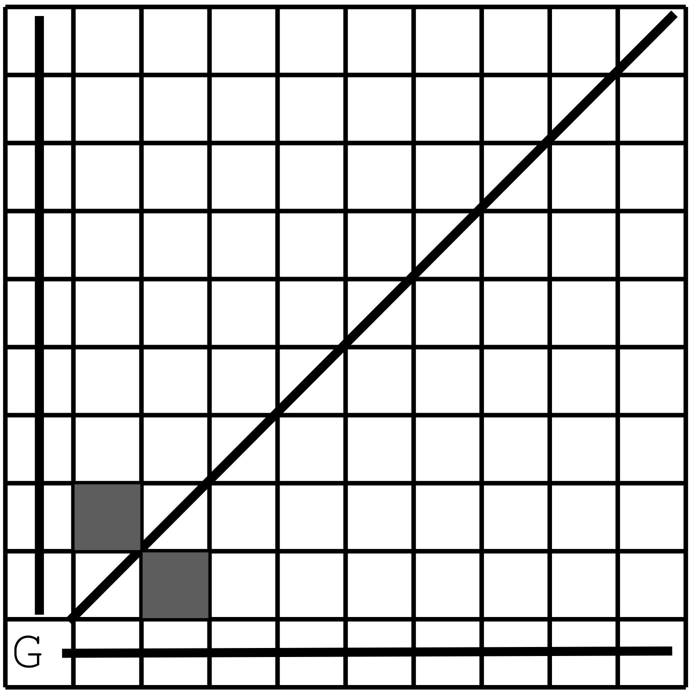


ルール：

- 図のような盤面と 駒を１つ使う。
- 先手は 灰色のエリアのどこかに 駒を置く。
- 以下、後手、先手と交互に駒を動かす。
- Ｇの地点に駒を持っていった者が勝利。
- 駒は左か、下か、斜め左下か どれか１つの方向に 好きなだけ動かせる。

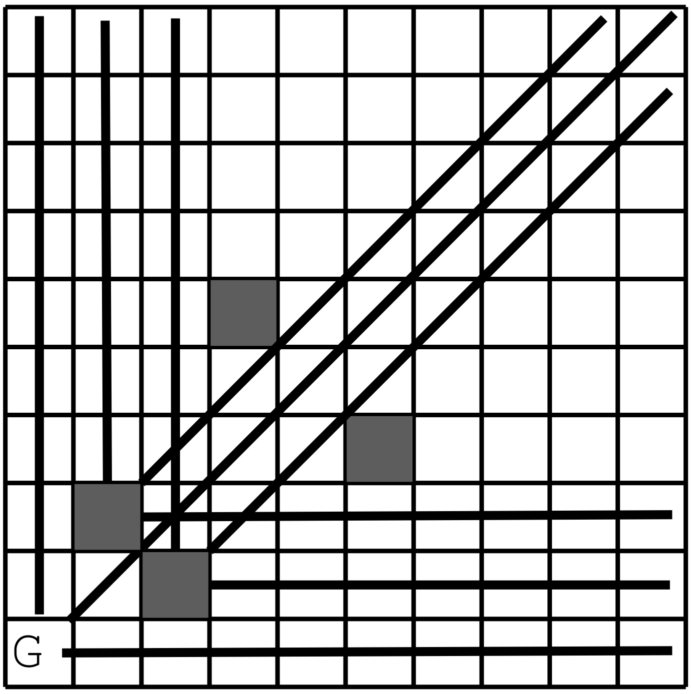
G									

すぐにGに行ける場所に置くと、負ける。



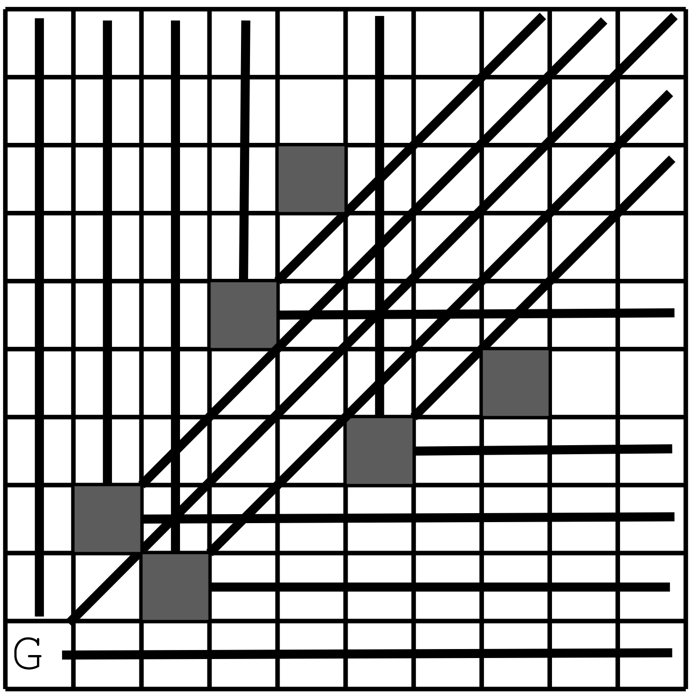
自分の番のときに、■の場所に置かれてしまうと 負けてしまう。

すぐに■に行ける場所に置くと、負ける。

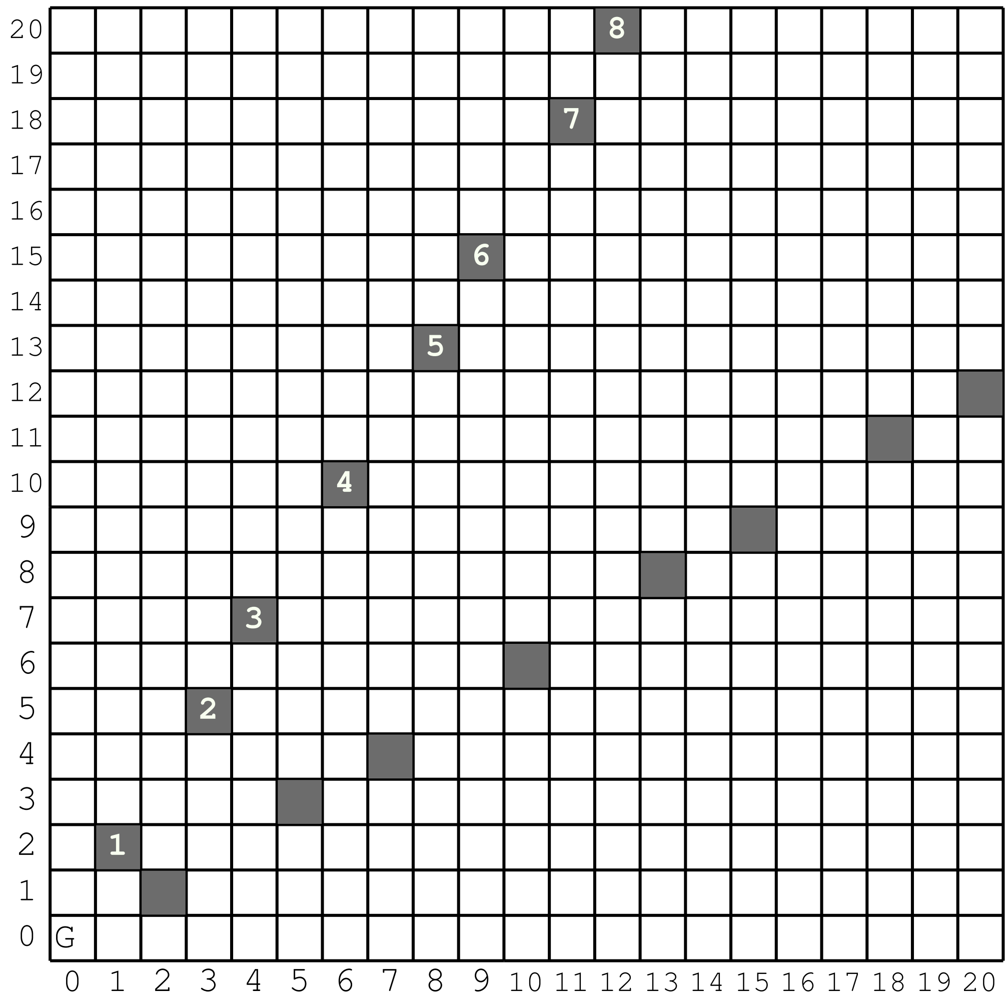


以下繰り返し。

次の図のように どうやっても 後手の勝ちとなる。

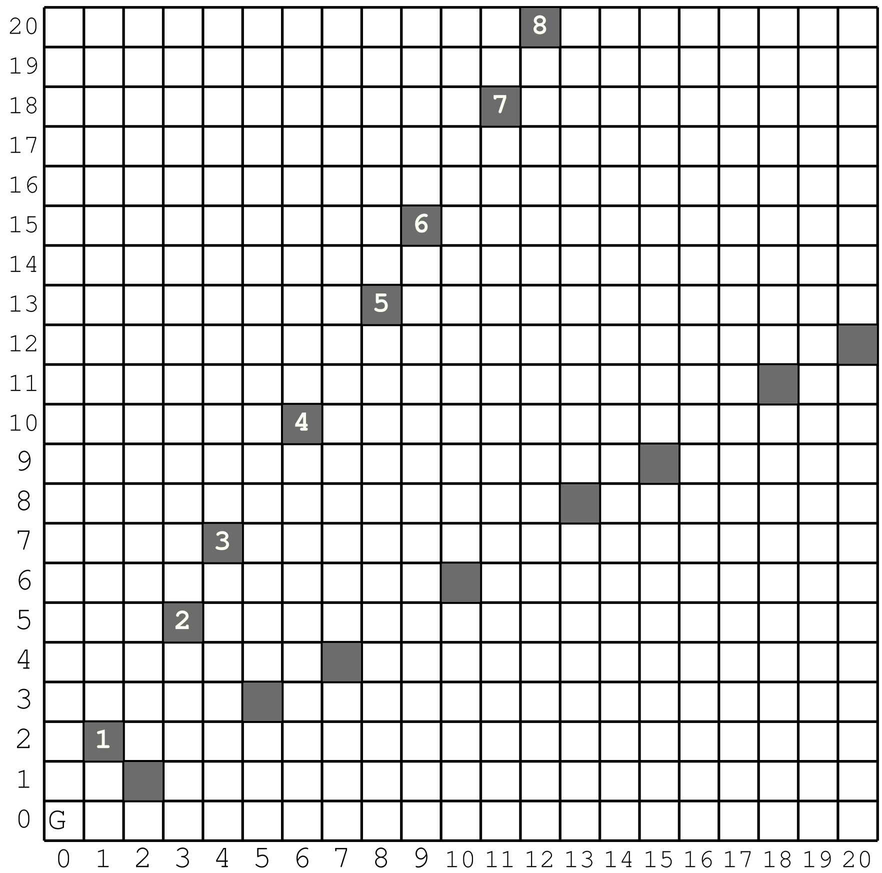


盤面がもっとずっと大きかったら‥‥。



小さいときと 同様に■の位置(good position)を割出すことができる。■の位置が 安全な位置。つまり、自分が動かし終った時、常に安全な位置になるようにしてゆけば 勝てる。

■の位置は どういう規則で並んでいるのだろう？



性質１：各列にgood placeは１つしかない。

もし、２つあったら矛盾。

性質２：各列にgood placeは少なくとも１つはある。

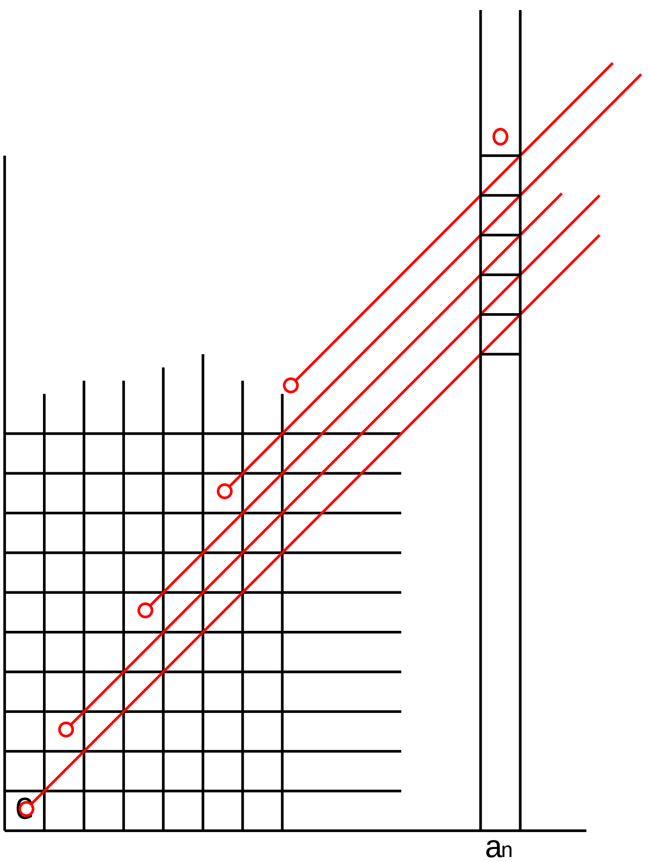
もし、N列に１つも無かったとしたら、0列から$N-1$列に 無限にgood placeがあることになって、矛盾。

性質３：good placeは ４５度の斜めの直線に関して対称に配置されている。

斜め４５度の直線上には good placeは１つもないから、それより上側のgood placeの座標を x座標が小さい順に(a_1,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_3) ,... とする。

性質４：$b_i = a_i + i$

$i = 1,2,3,\ldots,n-1$で正しいとする。このとき、(a_n,b_n)について考えよう。



実際に (a_n, b_n) を表にしてみる、以下の通り。

n	a_n	b_n
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26

性質１、２、３は 上の表で a_n, b_n の欄にすべての自然数が１回ずつ現れることを示している。さらに a_n が単調増加であることと、性質４を考えると、この表は４つの性質だけでつぎつぎに決まってしまう。

$\longrightarrow$ 次に黄金比との関係を見よう。

τと τ^2を 1、2、3、$\cdots$ 倍したものの表を書いてみる。

n	$n\tau$	$n\tau^2$
1	1.61	2.61
2	3.23	5.23
3	4.85	7.85
4	6.47	10.47
5	8.09	13.09
6	9.70	15.70
7	11.32	18.32
8	12.94	20.94
9	14.56	23.56
10	16.18	26.18
11	17.79	28.79
12	19.41	31.41
13	21.03	34.03
14	22.65	36.65
15	24.27	39.27
16	25.88	41.88
17	27.50	44.50
18	29.12	47.12
19	30.74	49.74
20	32.36	52.36

n	$[n\tau]$	$[n\tau^2]$
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28
12	19	31
13	21	34
14	22	36
15	24	39
16	25	41
17	27	44
18	29	47
19	30	49
20	32	52

右の表には 1,2,3,4,5,$\cdots$ と 自然数がすべて1回ずつ現れている。もし それが証明できれば$a_n = [n\tau]$、$b_n = [n\tau^2]$が成り立つことがわかる。

実は次のことが成り立つ。

α, βは無理数で $\alpha, \beta > 1$かつ、$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$が成り立つとする。そのとき、

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots, \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$$

のなかに 各自然数が1回ずつ現れる。

証明：$\alpha, \beta > 1$より 2つの数列

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots, \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$$

は狭義単調増加で、

$$A_N = \{[k\alpha] | [k\alpha] \leq N\}, \quad B_N = \{[k\beta] | [k\beta] \leq N\}$$

とすると、A_Nの元の個数は $[\frac{N+1}{\alpha}]$ 個、B_Nの元の個数は $[\frac{N+1}{\beta}]$ 個。重複があるかもしれないが、これらの個数を足すと

$$\#A_N + \#B_N = [\frac{N+1}{\alpha}] + [\frac{N+1}{\beta}]$$

$$\leq [\frac{N+1}{\alpha} + \frac{N+1}{\beta}] = [N+1] = N+1$$

ところが α, βは無理数だったから$\#A_N + \#B_N = N$。

一方 同様に考えて $\#A_{N+1} + \#B_{N+1} = N+1$、つまり$N+1$は どちらかに含まれる。(証明終り)

5.フィボナッチ数列

次の数列を フィボナッチ数列といい、$\{F_n\}$で表す。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

前の 2 つを足すと　次の数が現れる、($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) という規則になっている。

黄金比の満たす 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\text{黄金比}), \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおくと、

$$\tau^2 = \tau + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1$$

つまり、

$$\tau^{n+2} = \tau^{n+1} + \tau^n, \quad \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

今 $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n-\beta^n)|n=1,2,3,\}$ という数列を考えると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+2}-\beta^{n+2}) \\ = & \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1}+\tau^n-\beta^{n+1}-\beta^n) \\ = & \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1}-\beta^{n+1})+\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n-\beta^n) \end{aligned}$$

となっている。

さらに、

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau-\beta)=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^2-\beta^2)=1$$

となっているので、$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n-\beta^n)$ となることが分かる。

また、$\beta=-0.6180\cdots$ なので、nが大きくなると、

β^nは だんだん 0 に近付く。

F_nと $\frac{1}{\sqrt{5}}\tau^n$は だんだん近くなっていく。

だから、$\frac{F_{n+1}}{F_n}$は τに近付く。

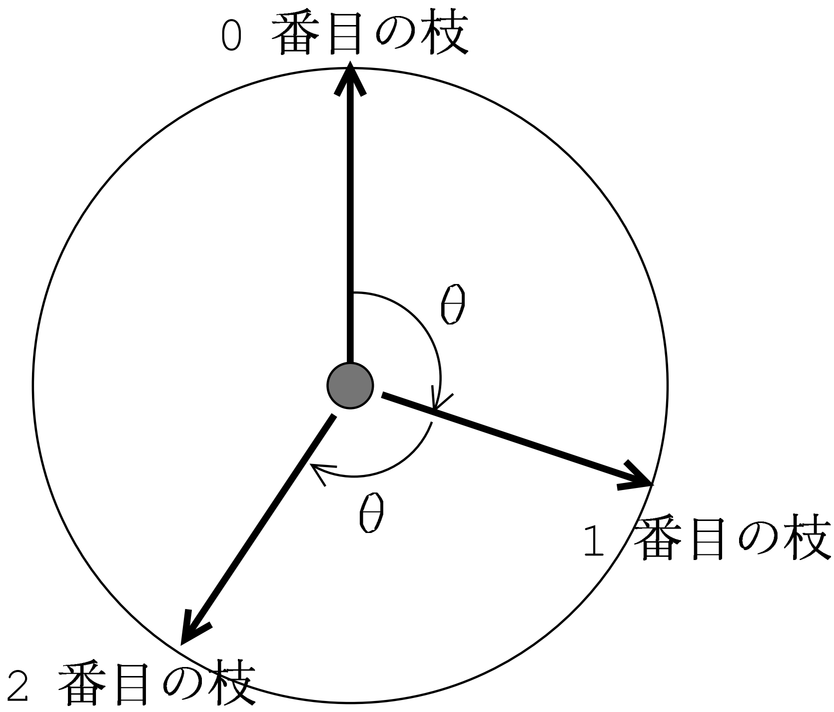
F_{n+1}	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	1	1.000
2	1	2.000
3	2	1.500
5	3	1.666
8	5	1.600
13	8	1.625
21	13	1.615
34	21	1.619
55	34	1.617
89	55	1.618

$\tau = 1.618033988$

６．植物の話

木の幹が 枝を出す事を考える。モデルとして 次のように考える。

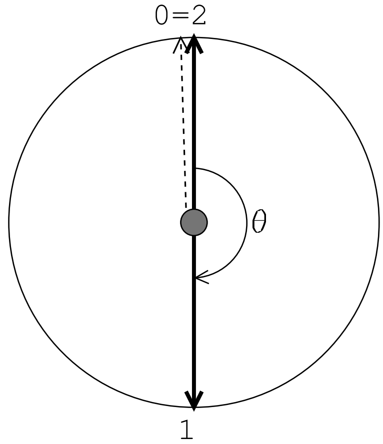
木が枝を出すと時は 一つ前に出した枝から一定の角度θずらしたところに枝を出す。



枝が近い位置にあると 上の枝が邪魔で日が当たらない。θとしてどんな角度が最適か？

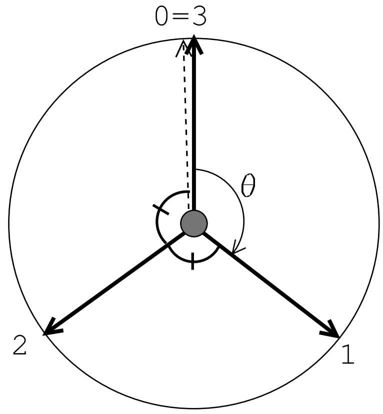
★何はともあれ１番目の枝のことを考える。

１番目の枝のことだけを考えると、０番目となるべく離れた位置。つまり 180 °$(=\frac{1}{2}\times 2\pi)$ずらせばいい！



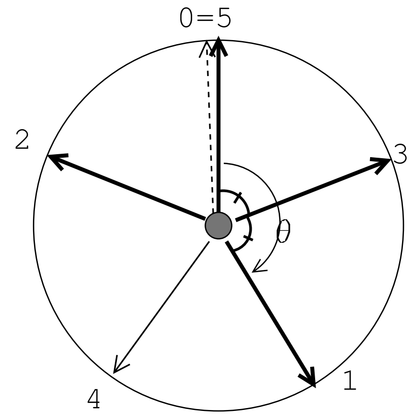
$\longrightarrow$ ２番目の枝が重なってしまった。

★180 °は大きすぎた。２番目の枝のことを考えよう。θを少し小さくして、重なっていた２番目の枝が０番目と１番目の中間に来るようにする。



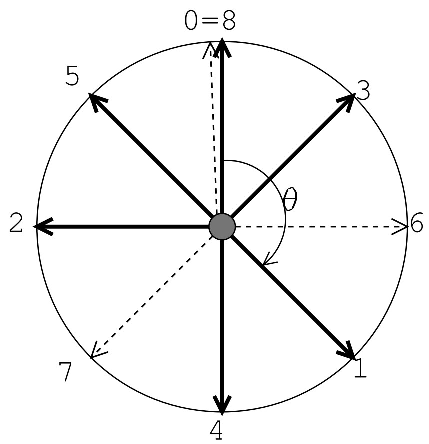
$\theta=\frac{1}{3}\times 2\pi$とすればいい。
$\longrightarrow$ ３番目の枝が重なってしまった。

★小さすぎたか。3番目の枝のことを考えよう。
すこし大きくして、3番目が0番目と1番目の中間に来るようにする。



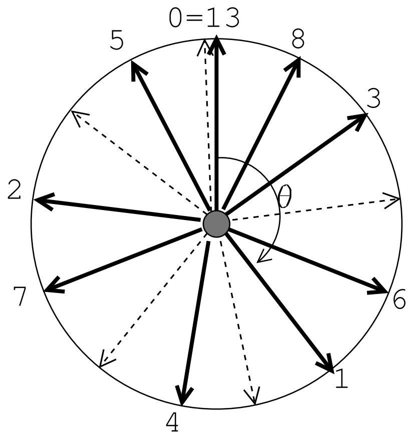
$\theta = \frac{2}{5} \times 2\pi$とすればいい。
$\longrightarrow$ 5番目の枝が重なってしまった。

★大きすぎたか。5番目の枝のことを考えよう。
すこし小さくして、5番目が0番目と2番目の中間に来るようにする。



$\theta = \frac{3}{8} \times 2\pi$とすればいい。
$\longrightarrow$ 8番目の枝が重なってしまった。

★小さすぎたか。８番目の枝のことを考えよう。
すこし大きくして、８番目が０番目と３番目の中間に来るようにする。



$\theta = \frac{5}{13} \times 2\pi$とすればいい。
$\longrightarrow$１３番目の枝が重なってしまった。

★お気づきだろうか。。。出て来た数を整理してみる。

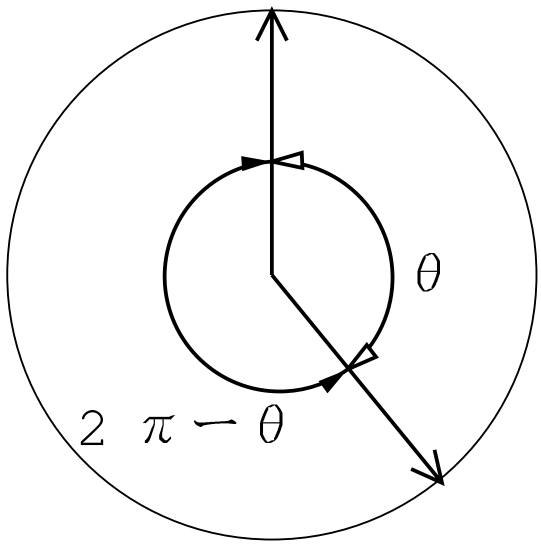
n番目の枝に注目	1	2	3	5	8
n番目の枝が重なる	2	3	5	8	13
$\theta/2\pi$	1/2	1/3	2/5	3/8	5/13

縦にF_n, F_{n+1}, $\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$が並んでいる。

★黄金角

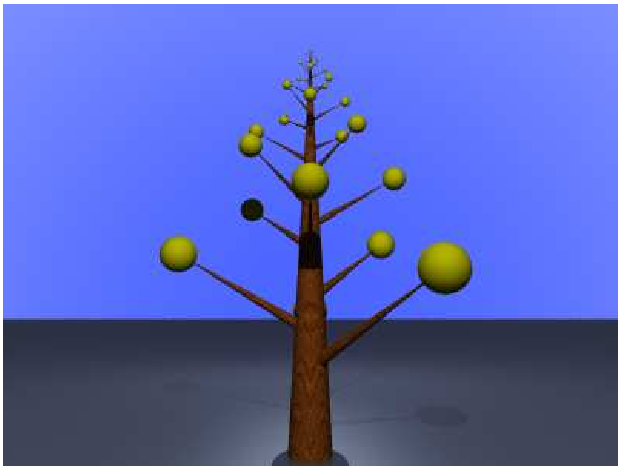
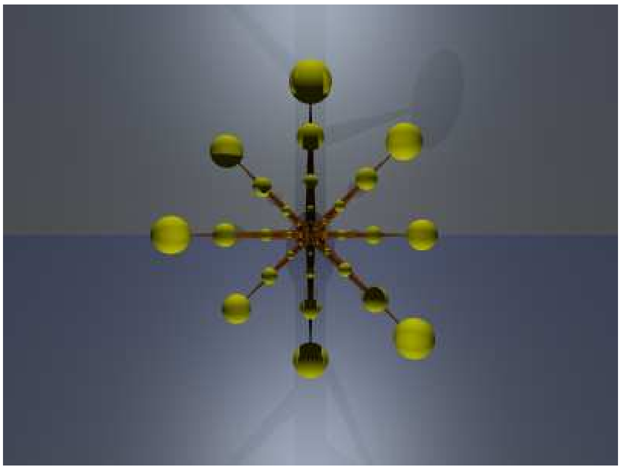
$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n+1}}$ は nが大きくなると $\frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{1+\tau}$ にちかづく。

$n \to \infty$としたときの θを黄金角という。黄金角は 1周を黄金比1：τに分割した角度である。

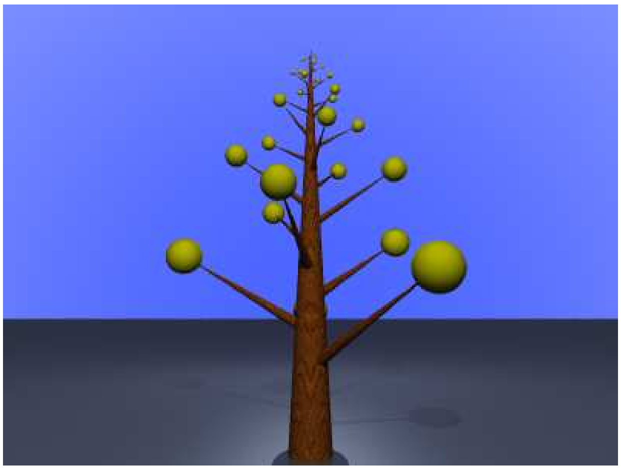
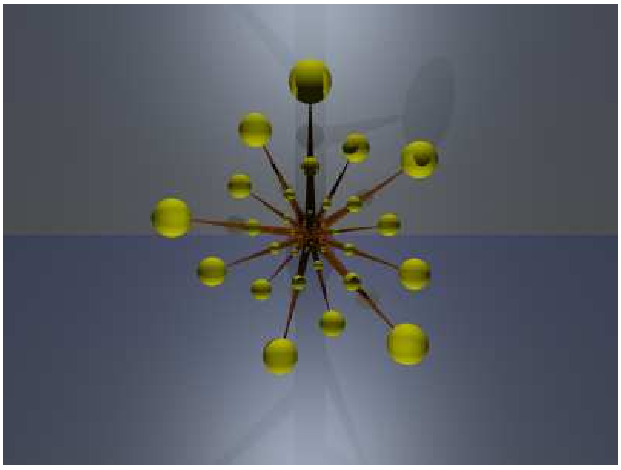


黄金角に従って、枝をだした木の図を見てみよう。

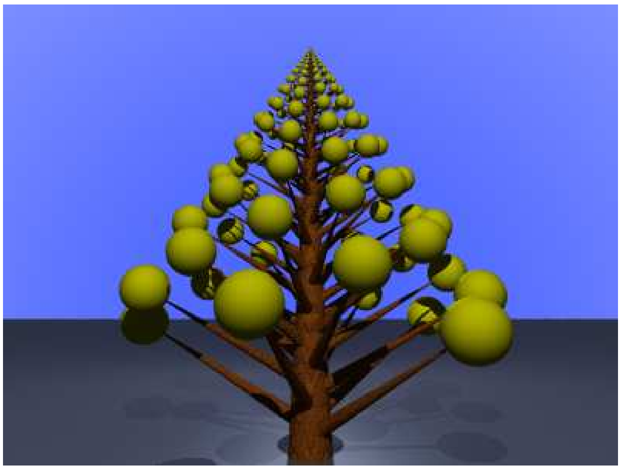
- 枝と枝の角度 $\frac{3}{8} \times 2\pi$

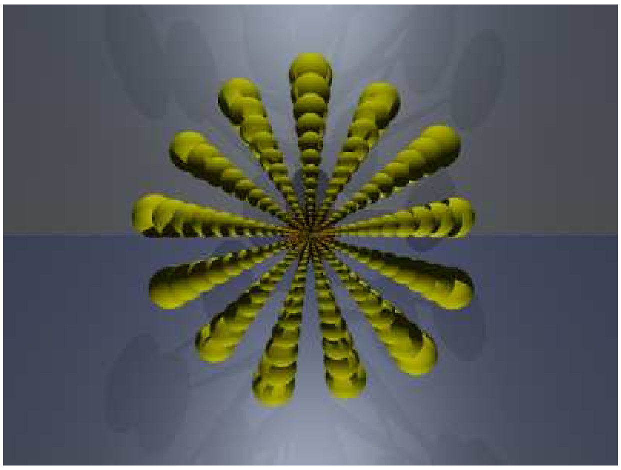
 

- 枝と枝の角度 $\frac{5}{13} \times 2\pi$：枝 疎

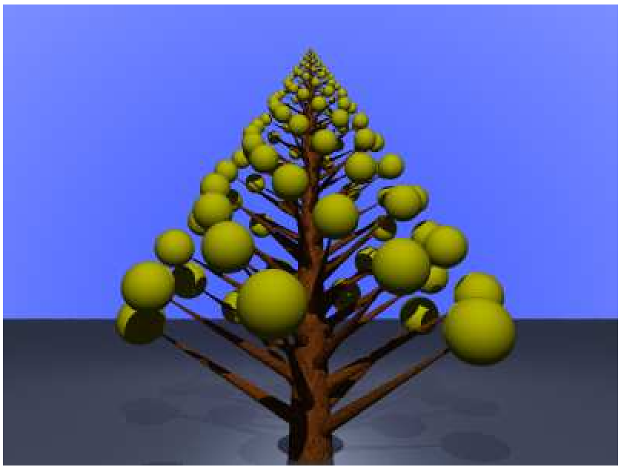
 

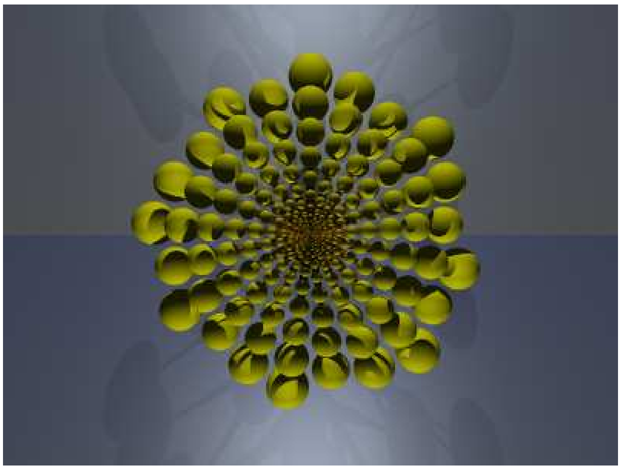
- 枝と枝の角度 $\frac{5}{13} \times 2\pi$：枝 密



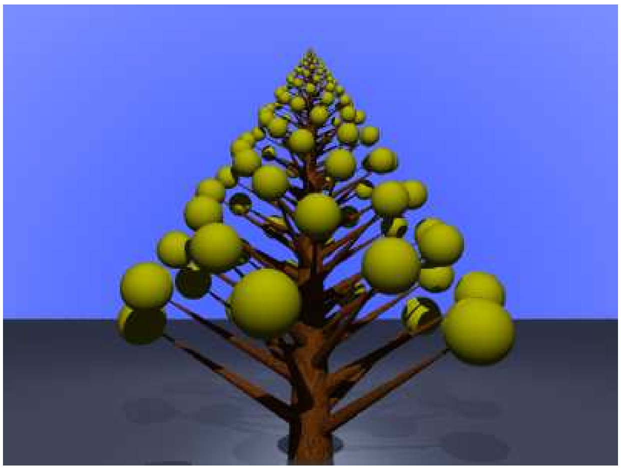
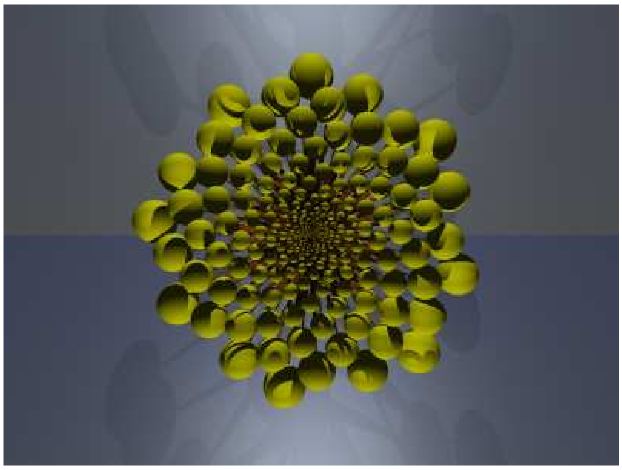


- 枝と枝の角度 $\frac{8}{21} \times 2\pi$：枝 密

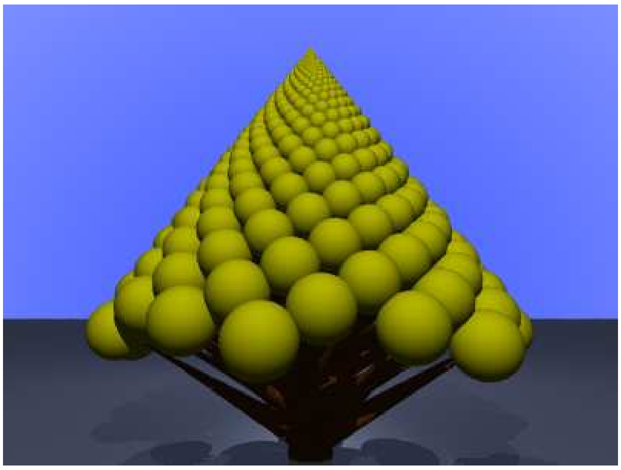
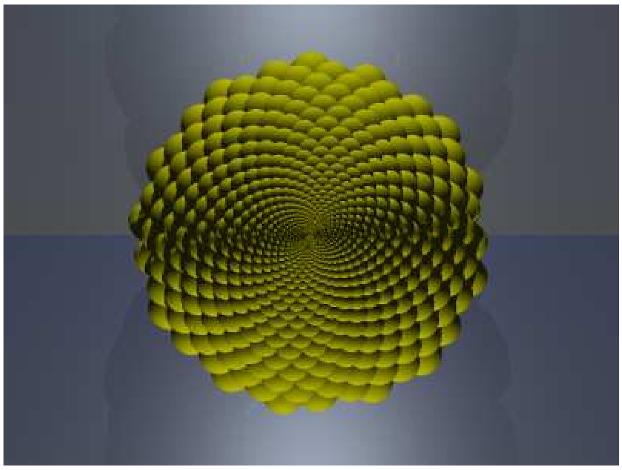




- 枝と枝の角度 $\frac{1}{1+\tau} \times 2\pi$：枝 密

- 枝と枝の角度 $\frac{1}{1+\tau} \times 2\pi$：枝 さらに密

なぜ、枝が重なってしまうことが起こるのか？←角度が 2π の有理数倍だから

黄金比は有理数で最も近似しにくい無理数であった。その意味でも 枝と枝の角度に最適なのかもしれない。

参考文献：

連分数については多くの本が出ていますが、本大学院の修士論文の中にもいくつか連分数についてまとめたものがあって、おすすめです。

平成８年度 福元 信之 「連分数の研究」

平成１０年度 圓井 大介 「連分数とFarey数列」

多面体との関連、高次元の立方体の話は Hヴァルサー著 蟹江幸博 訳「黄金分割」日本評論社 にも載っていることに最近気づきました。

ゲームの話は マーチンガードナー著「落し戸暗号の謎解き」(丸善株式会社)が元ネタで、それに証明をつけてみました。最後の定理は有名なもののようですが、今回、証明は「数学の部屋」というサイト（http://web2.incl.ne.jp/yaoki/index.htm）内の
http://web2.incl.ne.jp/yaoki/ougon.htmにあった証明を使わせてもらいました。この証明は 非常にすっきりしています。

フィボナッチ数列は有名すぎて、特に文献はいらないでしょう。

植物の話は いくつかの本に載っていますが、観察の結果として黄金角が現れている、という以上の内容をあまりみかけません。

R.A.ダンラップ 著 「黄金比とフィボナッチ数」 日本評論社

イアンスチュウアート著 「自然の中に隠された数学」（草思社）の９章「複雑系の単純さ」

を挙げておきます。