

教職セミナー 数学 第3回 組合せと文章題（解答編）

1. ここに5枚のカードがあり、それぞれ1、2、3、4、5の5つの数字が書かれている。
- (1) 5枚のカードのうち3枚を並べてできる3桁の数字はいくつあるか。
- (2) 5枚のカードのうち3枚を並べてできる3桁の数字のうち3の倍数であるものはいくつありますか。

解答) 1) は分かるよね。分からない人いるかな。。順列等の組合せの（基本的な）問題はただ単に、 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ と丸暗記するのではなく、樹形図を頭にイメージして考えると分かりやすい。

答えは 60 通り。

2) は 実際に数える人と 「並べると3の倍数になる組」を考える人に別れるだろう。

これくらいの数ならば 樹形図を書いて数えあげてもいい。小さい数から数えようとすると どこかで見落とししてしまうことが多いので、樹形図を用いて数えた方がいいだろう。3の倍数かどうかを判定するには 各桁を足して3で割ればいいことを忘れずに。

実際に全て挙げてみると、

1-2-3	3-1-2	4-2-3
1-3-2	3-1-5	4-3-2
1-3-5	3-2-1	4-3-5
1-5-3	3-2-4	4-5-3
2-1-3	3-4-2	5-1-3
2-3-1	3-4-5	5-3-1
2-3-4	3-5-1	5-3-4
2-4-3	3-5-4	5-4-3

あとは 数えればいい。

—

さて、もうひとつの考え方は こうだ。3の倍数であることと 各桁を足して3の倍数になることが同じことなので、足して3の倍数になる3つ組を並べればいい、と考える。足して3の倍数になる組は、

足して3になる組。無し。

足して6になる組。1,2,3 だけ。

足して9になる組。1,3,5 と 2,3,4 だけ。

足して12になる組。3,4,5 だけ。

足して15以上にはならない。

どの組も並び変えると6通りの数字ができるので、全部で $4 \times 6 = 24$ 通り。

2. (1) 4桁の電話番号 0000 から 9999 のうち、0011、0550、9898 などのおなじ数字2つずつから出来ているものはいくつあるか。
- (2) 4桁の電話番号 0000 から 9999 で、4桁のうち少なくとも2つの同じ数字が入っている番号はいくつあるか。

解答) 1) まず 「どの数を使うか」と 「それをどう並べるか」に分けて考える。

0～9の中から2種類の数を選んでくる方法は $10 \times 9 / 2 = 45$ 通りだ。

たとえば 2種類の数を A と B としよう。すると 並べ方は

AABB, ABAB, ABBA, BBAA,
BABA, BAAB、

の6通りが考えられる。

全部で $45 \times 6 = 270$ 通りだ。

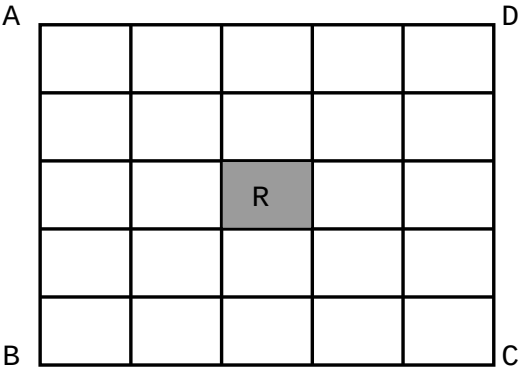
2) 「少なくとも」とかいう言葉は 分かりにくいね。よくあるパターンだけど こういう問題は 「逆」を考えるといい。

つまり 0000 から 9999 の 10000 通りのうち、「少なくとも2つの同じ数字が入っている番号」ではないもの。簡単に言えば 「すべて異なる数で出来ている番号」を考えればいい。

これは 簡単。1桁目が10通り。2桁目は異なるので9通り。3桁目は8通り。4桁目は7通り。（樹形図をイメージしよう。）掛け合わせて $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ 通り。

10000 から引いて 4960 通り。

3. 長方形 ABCD の内部に、AB,AD のそれぞれに平行な直線が4本ずつ図のように引かれている。これらの平行線によって出来る長方形のうち灰色の長方形 R を含む長方形はいくつあるか。ただし R も 1つとして数える。



解答) 何通りか図を書いてみると気づくと思うんだけど、Rの上下左右に直線を配置すると考えている長方形がひとつできあがる。

逆にいえば、そういう風に直線を4つ選べばいいのだ。上、下、左、右それぞれ3通りの選び方があるから $3^4 = 81$ 通り。

4. 2つのサイコロがある。それぞれのサイコロには6つの面のうち3つの面に「A」が、2つの面に「B」が、1つの面に「C」が書いてある。2つのサイコロを同時に振る時、「AとA」、「BとB」、「CとC」、「AとB」、「BとC」、「CとA」のうち最も出やすいのはどれか？

解答) 1つしかサイコロが無ければ、Aが出やすいのは当たり前だ。では「AとA」が出やすいのだろうか？

例えばこんな事を考えてみて欲しい。コインを投げて表と裏が出る確率を共に $\frac{1}{2}$ としよう。2枚を投げるとき表表と表裏ではどちらが出やすいか？表も裏も確率は同じなんだから、同じだろう、とはいかない。表表の確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ だが、表裏の確率は「1枚目が表で2枚目が裏」と「1枚目が裏で2枚目が表」の場合があるから $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$ なのだ。

このことを考えると「AとB」も確率が高そうだと気付く。(明らかに、それ以外は最も出やすいということは無いだろう)

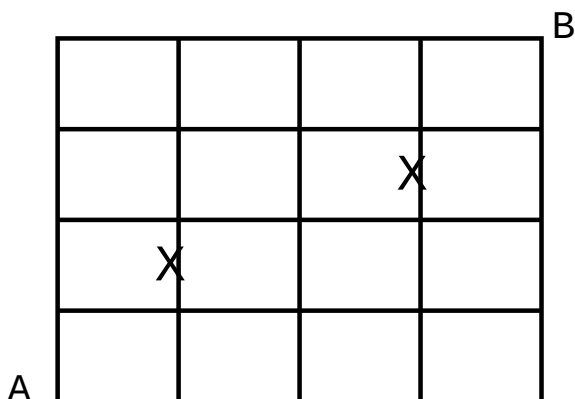
1つのサイコロで、Aが出る確率は $\frac{3}{6}$ だから、「AとA」が出る確率は $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$ 。

「AとB」が出る確率は $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{36}$ 。

よって「AとB」が一番出やすい。

5. 図のような格子状を辺にそってAからBまで進む。ただし進む方向は右か上だけで左や下には進めないとする。

- (1) すべての辺が通れるときAからBまでの進み方は何通りあるか。
(2) X印の辺が通れないとすればAからBまでの進み方は何通りあるか。



解答) 1) はよくある問題だ。進むのは右か上。全体で右に4つ上に4つ進むので「右」と「上」それぞれ4つずつを並べることを考えればいい。並べ方だが、「全部で8つあるうちどこを「右」にするか？」と考えれば8つのうちから4つを選ぶ場合の数と同じで ${}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$ 通り。

2) は知らないといけない。やり方は講義で説明する。解答は34通り。

6. ある商品を定価の3割引きで売っても、なお原価の5分のもうけがあるようにしたい。定価を原価の何割増しにすればいいか。

解答) 定価を y 、原価を x とすればいいんでないのか？

$0.7y = 1.05x$ より $y/x = 1.05/0.7 = 1.5$ 。よって5割増し。

前回の教職セミナーのとき、連比がでてきたのだけど、「連比ってなんですか？」という学生がいたので、ちょっと連比のことも説明しておく。

定価を y 、売値を a 、原価を x としよう。上記のことは

$$y : a = 10 : 7, \quad a : x = 105 : 100$$

のとき $y : x$ を求めよという問題と考えられる。

10:7の左右を15倍すると150:105なので、

$$y : a = 10 : 7 = 150 : 105, \quad a : x = 105 : 100$$

だから $y : a : x = 150 : 105 : 100$ 。よって $y : x = 15 : 10$ 。連比って便利なきもあるんで覚えておいてね。。。

7. ある団体がバスを使って旅行に出かける。60人乗りのバスでは最後の1台に10人分の空席が出来、50人乗りのバスでは空席が出来ないが、60人乗りのバスよりも1台多くなるという。この団体の人数を求めよ。

解答) 60人乗りのときバス n 台だったとすれば？

$$60n - 10 = 50(n + 1)$$

よって $n=6$ 。よって人数は350人。

8. ボートで川下のA地点から川上のB地点までいくのに1時間10分、B地点からA地点まで行くのに50分かかる。B地点からA地点まで漕がずに進むとどれだけかかるか。

解答) (まず式を使わずに解いてみる。小学生はこう解く。[本当]) 同じ距離を進むとき、かかる時間と速さは反比例する。行きと帰りの時間がそれぞれ70分、50分だったということは速さは5:7だったということだ。

行きは（静水でのボートの速さ）－（流水の速さ）。

帰りは（静水でのボートの速さ）＋（流水の速さ）。

静水での速さは行き帰りの速さのちょうど平均で、その比、5:7でいうと6にあたる速さ。

つまり流水の速さは静水でのボートの速さの6分の1。

ということは帰りの速さの7分の1の速さだ。だからかかる時間も7倍で350分。つまり5時間50分。

同じ問題を文字を使って解いてみる。

AからBまでの距離を L km、静水でのボートの速さを V km/h、流水の速さを d km/hとする。行きに $7/6$ 時間。帰りに $5/6$ 時間かかったのだから、

$$L/(V-d)=7/6, \quad L/(V+d)=5/6$$

よって

$$V-d=\frac{6}{7}L, \quad V+d=\frac{6}{5}L$$

右の式から左の式を引くと

$$2d=12/35L$$

つまり $L/d=35/6$ 時間＝5時間50分。

実際には L も V も d も求まらないが求める時間は求まるというちょっと特殊な問題であることが分かる。

9. 現行の学習指導要領における、小学校算数科の目標を書きなさい。

解答) 数量や図形についての算数的活動を通して、基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、活動の楽しさや数理的な処理のよさに気づき、進んで生活に生かそうとする態度を育てる。

10. 上記の目標における、「算数的活動」とはどのようなものか、具体例をあわせて書きなさい。

解答) 算数的活動とは、数量や図形についての、作業的・体験的な活動や思考活動を意味している。例えば、以下のような活動がある。

- その活動自体に算数的概念、原理、法則などの見方や考え方が含まれるような活動。
例) 具体物を配分したり、等分したり、数量を数直線に表してわり算の意味を理解する活動。

- 子どもたち自らが実験・実測をして決まりを発見したり、それに気づくことができるような活動。
例) 2つの数量の関係を調べて表に表し、そこから決まりを見つける活動。

- 実生活に結びつくような活動。
例) 見積もりの考えを買い物に活用したり、教室や校庭の面積を実際に調べたりする活動。

11. 新聞等で子どもたちの学力低下がさげばれており、それにともなって「基礎・基本の徹底を図る」ことが求められている。小学校算数科における基礎・基本の徹底を図るためには、どのようにすべきかを述べよ。

解答) 「基礎・基本の徹底」を、計算の繰り返し反復練習と受けとめるだけでは、浅い解釈になる。繰り返し学習すべきことは、算数の内容における「基本の考え」である。教材が変わっても共通して大切な数学的思考方を学習すべきである。例えば、数と計算領域においては、十進位取り記数法の考えなどである。