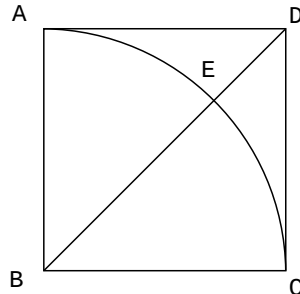


教職セミナー 数学 第2回 図形(解答編)

1.

正方形 ABCD がある。B を中心に AB を半径とする円をかき、対角線 BD との交点を E として、点 A と点 E を結ぶ。この図で、角 AED の大きさは何度か？



解答) A と E を結べと書いてあるんだから、すなおいに結びましょう。さて、円についての注意。円を円と考えるから むつかしいのだ。なんてたって あんな丸いものをそのまま考えようとすると難しいに決まっている。じゃあ どうすればいいか？円って 何だったっけ？と 考えてみる。そう、円とは「中心からの距離が一定の点を集めたもの」だ。逆に言えば、円が 出て来たら「円周上の点は 中心からの距離が等しい」ことを使うのは 当たり前なのだ。何を当たり前ことを、と思うかも知れないが、当たり前ことを思い出すのが難しい。

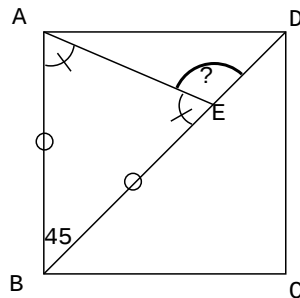


図 1: 問題 1

さて、話をもどして、いま 円の中心はどこかということ、点 B だ。円周上の点というと A と E と C だから、AB と EB (それと BC も) が等しいということだな。

ところで、3つの点 A,B,E があって AB と EB が等しいんだから「2等辺三角形」という言葉を思い出そう。角の問題のときは 案外「2等辺三角形」を見落としがちだ。頭の片隅にいれておこう。

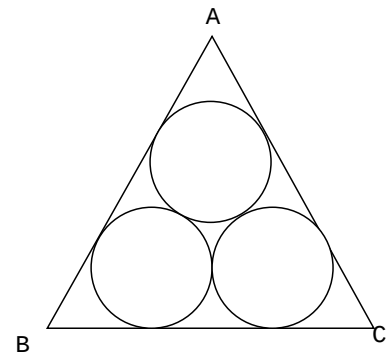
さて 2等辺三角形では 底角が等しい。これまた当たり前だが わすれがちだ。長さが等しいことから 角度が等しいことが 分かるという性質だし、見落としがちなので、出題者の気持ちになってみると、出したくてしょうがないのだ。(笑)

それはさておき、図 1 を見て欲しい。分かったことを書きこんでみた。もう求める角度(? のところ) は分かったも同然であろう。

えーと答えは $180 - (180 - 45) \div 2 = 112.5$ 度だ。

2.

一辺の長さが 12cm の正三角形の中に半径の等しい3つの円が図のように外接し、また、正三角形に内接している。円の半径を求めよ。



解答) 問題 1 と同様、円をみつめていても 答えには 至らない。円の性質をつかうのだ。ここで使うことは「接する」ということに関する性質だ。

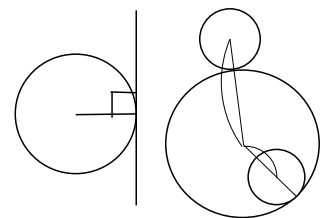


図 2: 問題 2

円と直線が接するときは 中心と接点を結んだ線が接線と垂直だということ。

それから 円と円が接するときは 中心と中心の距離が 半径の和や差になるということ。(図 2 参照)

そうとわかれば 早速 問題の図に書きこんでみる。(図 3) 図 3 には 直角の記号を書き込んでいないが、直角っぽいところは直角である。図の中に 長方形が 3 つあることに気づくだろう。

もとめる半径を x とおこう。すると図 3 にあるように長方形の横の長さが $2x$ となる。さて 灰色の三角形だがよくみると これは三角定規とおなじ形。つまり、 30° 、 60° 、 90° の三角形だ。ということは 図に示した部分が $\sqrt{3}x$ となることはすぐ分かる。

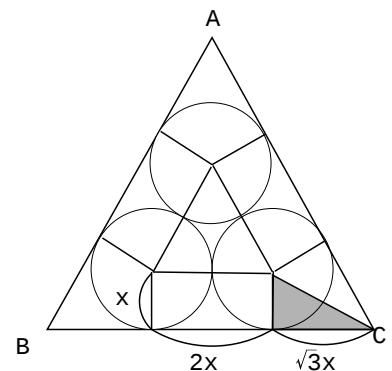


図 3: 問題 2

ここまで分かれば もう答えはすぐで、 $(2+2\sqrt{3})x = 12$ を解けばいい。答えは $3(\sqrt{3}-1)$ 。

3.

三角形 ABC で $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 4\text{cm}$ 、 $BC = 3\text{cm}$ とする。AC を軸として、回転したときにできる立体の、体積と表面積を求めよ。円周率は π とする。

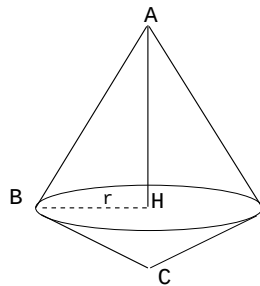
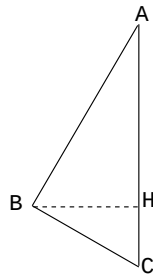


図 4: 問題 3

解答) とりあえず 何はともあれ、回転させたら 何ができるのか、想像できますか？ 想像できないと困ってしまうのだけど、結論からいうと 右のようなモノができます。

要するに 円錐が 2 つくついたものなので体積は円錐の体積の求め方を知っていればよいのだが、そのためには底面の半径 r が必要だ。

r を求めるためには 平面図に戻って考えよう。立体の問題は立体と思って考えるから難しいのであって、断面等を考えることによって なるべく平面の問題に区切って考える事が肝要だ。

さて、平面図の図 5 を見て頂こう。今回は角 B が直角なので 簡単だ。AC を底辺として、三角形の面積を考えればよい。 $4 \times 3 \div 2 = 5r \div 2$ で $r = 12/5$ 。

もちろん この後 AH や HC の長さを求めてもいいのだけど、よく考えてみると 上の円錐の体積が $\pi r^2 \times AH/3$ で下の円錐の体積が $\pi r^2 \times HC/3$ であるから 2 つ足せば

$\pi r^2 \times (AH + HC)/3 = \pi r^2 \times 5/3$ であろう。体積は $\frac{48\pi}{5}$ 。

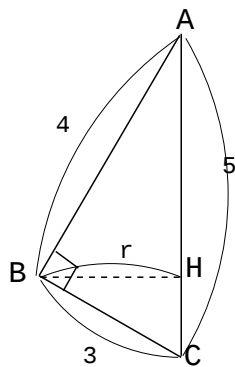


図 5: 問題 3

さて 表面積だが、問題は円錐の横の部分の面積だ。円錐の展開図が どんな風になるか想像つくだろうか？ 図 6 を見て欲しい。円錐とその展開図を示してみた。

ここで 重要なのは展開図の扇型の部分の中心角 x がいくつかということ。それが分かれば扇型の面積がわかるのだから 表面積は簡単だ。

中心角を考えるには 展開図のどこどこ

が くつつくのか 考えるとよい。そうすれば $2\pi r = 2\pi t \times \frac{x}{360}$ であることに気づくだろう。(敢えて x はラジアンじゃなくって 小学生風の度で表すことにする。ひとまわりが 360 度だ。)

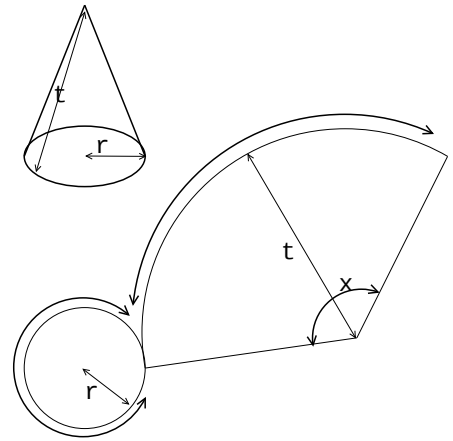


図 6: 問題 3

つまり 円錐の展開図で 重要なこと :

$$\frac{\text{半径 } r}{\text{母線の長さ } t} = \frac{\text{中心角 } x}{360}$$

なのだ。

もうわかるよね。答えを求めよう。上側の円錐の側面の面積が

$$4^2\pi \times \frac{2.4}{4}$$

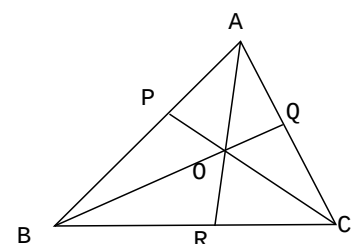
下側の円錐の側面の面積が

$$3^2\pi \times \frac{2.4}{3}$$

で、足せば 16.8π となる。

4.

三角形 ABC において、辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P、辺 AC を 4 : 5 に内分する点を Q とする。BQ と CP の交点を O、AO の延長が BC と交わる点を R とするとき、 $BR : RC$ を求めよ。



解答)さて チェバの定理、とひとことで言うてしまうのは簡単だけど、それでは何なので、ちょっと説明しよう。

図 7 で 上の黒っぽい三角形 ($\triangle APC$) と 下の灰色の三角形 ($\triangle BCP$) の面積比はいくつでしょう？

そう。AP:PB と同じで 2:3 だ。

では 図 8 で 上の黒っぽい三角形 ($\triangle AOC$) と 下の灰色の三角形 ($\triangle BOC$) の面積比はいくつか？ これも AP:PB と同じで 2:3 であることがすぐに分かりますか？(OC を共通の「底辺」と考えて、高さを考えてみれば。。)

そこまで 分かったら 図 9 で 三色の三角形の面積の比を考えよう。求めたい比 $BR:RC$ は $\triangle AOB$ (黒三角) と $\triangle AOC$ (灰色三角) の比だ。一方 $\triangle AOB$ (黒三角) と $\triangle BOC$ (白っぽい三角) の比が 4:5、および、 $\triangle AOC$ (灰色三角) と $\triangle BOC$ (白っぽい三角) の比が 2:3 であることは分かっているのだから 計算すれば すぐわかるでしょう。

答えは $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=6:5$ 。

5.

図のように長方形 ABCD から円を取り除いた図形がある。(灰色の部分) この図形の面積を 2 等分する直線を作図せよ。

解答) ちょっと変わった問題だったので、載せておきました。

まず、「長方形の面積を 2 等分する直線」を考えてみよう。そのような直線はいろいろあるが、どれもこれにも

共通することが一つある。すなわち、長方形の対角線の交点を通る直線だということ。

つぎに「円の面積を 2 等分する直線」は？これも すぐわかる。円の中心を通る直線だ。

ということは 長方形の対角線の交点と 円の中心の両方を通る直線を書けば 長方形と円を同時に半分にするので 求める直線になるのだ。

さて、長方形の対角線の交点はすぐ求まるが、円の中心を作図するには どうしたら いいか？ 作図問題では、円の中心を作図しなけりゃならない場面が 結構あるので これくらいは覚えておいた方がいいかもしれない。次の図 10 を参照してほしい。

要するに 2 つの弦を書き、それぞれの垂直 2 等分線を書くと、その交点 が中心になる。

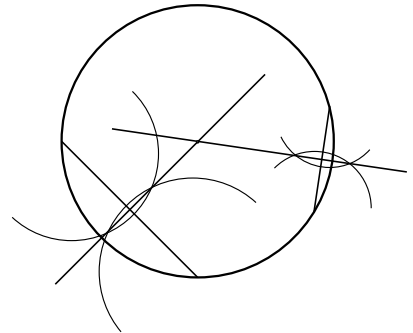
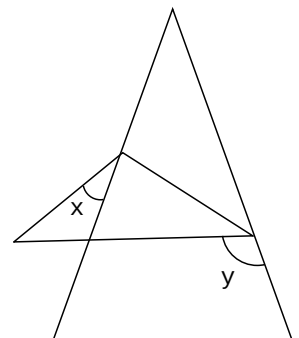


図 10: 問題 5

6.

底角 75° の二等辺三角形 ABC を辺 AB, AC 上の点 P, Q を結ぶ線分で折り返した。点 A が点 A' に移ったとする。 $\angle A'PB = x^\circ$ 、 $\angle CQA' = y^\circ$ とするとき、y と x の関係を式で表せ。



解答) 角度の問題は図形の問題だから、と決めつけて、解き方を限定することはない、堂々と 文字式を使って 良い。

とにかく、何はともあれ 問題文からすぐに分かる角度を 図に書き込もう。(図 11) それから ここが重要なところなのけども、問題文にあるように、三角形の先を

「折り返した」のだから、「折り返した部分」は「折り返す前の部分」と全く同じ形、大きさのはずである。これまた、当たり前なのだけど、気づいてないヒトが多い。

そのことも 図に加えて行く。同じ角度は同じ文字で表そう。

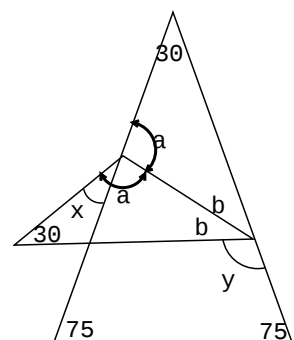


図 11: 問題 6

さて、ここまできたら 後は簡単。図で分かることを式にすればいいのだ。たとえば、角度 b 2つと 角度 y で 180° になっていることが 図 11 から分かるであろう。だから

$$2b + y = 180$$

それから

$$2a - x = 180$$

さいごに 三角形の内角の和で

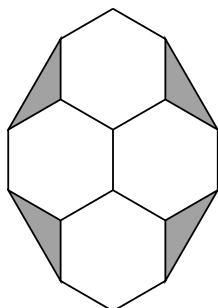
$$a + b + 30 = 180$$

あとは 最初の 2つの式を最後の式に代入すればいい。

答えは $y - x = 60$ 。

7.

図のように正六角形を 4つ並べた。一つの正六角形の面積は 4cm^2 である。このとき、灰色の三角形の面積の合計を求めよ。

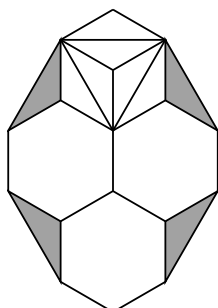
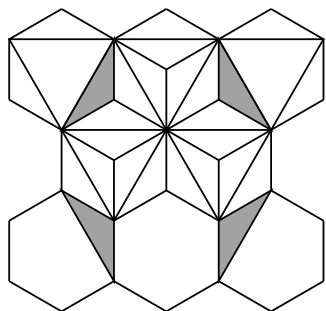


解答) 何とも、図形に対する感覚の問われる問題ですね。普段 駅や公園のタイル等の何気ない場所にある図形をみて、「あ、面白い形だな」と考える そんな感覚を是非養って頂きたい。そして、子ども達にも そういう感覚を伝えて欲しい。

「えーと面積 4cm^2 ということは、1 辺の長さが あーたら こーたら」と考え始めた人、まじめすぎです。もっと子どものように柔軟に考えましょう。

さて、前置きが長くなった。図の正六角形の一つに次のように線を引いてみましょう。

これで分かったでしょうか? ダメ押しで さらに線を引いてみようか。



そう、灰色の三角形が 6つ集まると、正六角形が 1つできるのだ。だから 答えは $4 \times \frac{4}{6} = \frac{8}{3}\text{cm}^2$ 。

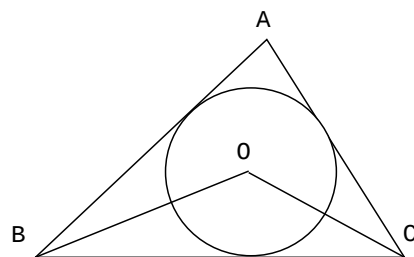
8.

三角形 ABC に円 O が内接している。

$$\angle BAC = 80^\circ$$

のとき、 $\angle BOC$

の大きさを求めよ。



解答) 問題を見て ぱっと思ったのは「円が三角形に内接している」という条件をどう使ったらいいかなあ、ということである。さて 問題をよく読むと角度を求める問題だ。ということは 角度が等しいところがあるかな、と考えるのが自然でしょう。

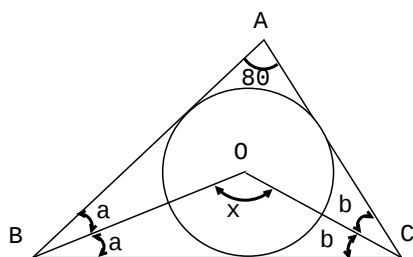
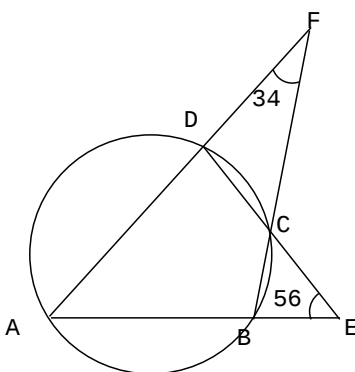


図 12: 問題 8

さて、図 12 を見て頂こう。同じ大きさ角には同じ記号を付けてある。あとは 文字式を使って解いてしまおう。三角形の内角の和から $80 + 2a + 2b = 180$, $a + b + x = 180$ 。よって $a + b = 50$, $x = 130$ である。

9.

右図のように四角形 ABCD が円に内接している。辺 AB と辺 CD のそれぞれの延長の交点を E、辺 AD と辺 BC のそれぞれの延長の交点を F とする。 $\angle BEC = 56^\circ$, $\angle CFD = 34^\circ$ であるとき、 $\angle BAD$ の大きさを求めよ。

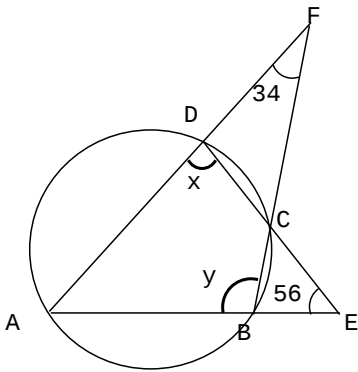


解答) 円に内接する四角形。。基本だ。よくでてくる。考えてみて欲しいのだが、三角形はつねに円に内接する。想像してみると そんな気がしません? (ちなみに、そのときの円の中心が 外心だ。)

でも 四角形は 円に内接するとは限らない。では どういうときに外接するのか? それが 重要である。

四角形が円に内接する $\Leftrightarrow$ 対角の和が 180°

ということは 次の図のように 角度 x, y を定めるとき、 $x + y = 180$ ということだ。



つーことは 次の図 13 のようになるはずだ。

あれ、ところで どの角度を求めるのだっけ？そうそう、求める角度は図の「？」のところ。しかし よく考えてみると やはり 対角の和が 180° なのだから、「？」の角度は「？」の角度と等しいはずだ。

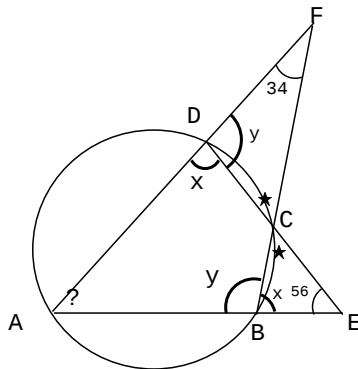


図 13:

もう、この辺で分かったと思うのだけど。。 三角形の内角の和から $x + 56 = 180$ 、 $y + 34 = 180$ 。

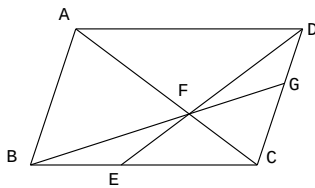
だから $x + y + 56 + 34 = 360$ 。

$x + y = 180$ だったから $180 + 56 + 34 = 360$ 。

つまり $x = 45^\circ$ 。答えは 45° 。

10.

平行四辺形 ABCD において、辺 BC 上の点 E は BC を 2:3 に内分する。DE と対角線 AC の交点を F、BF の延長と辺 CD の交点を G とするとき、



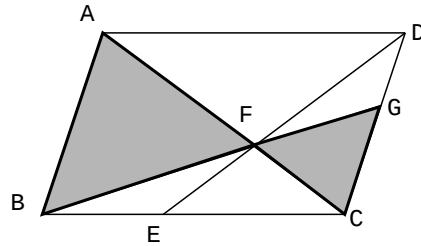
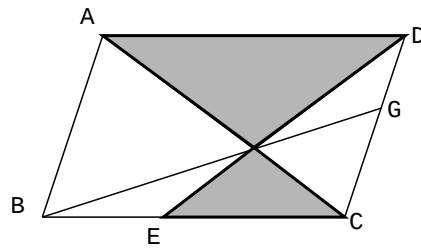
(1) CG:GD を求めよ。

(2) 三角形 DFG の面積は 平行四辺形 ABCD の面積の何倍か。

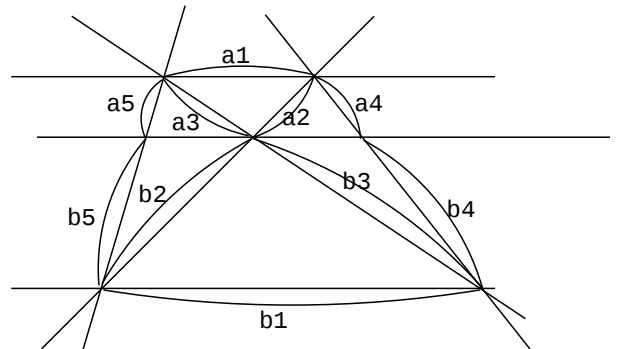
解答) これまた ありがちな問題だな。平行四辺形が出て来て、内分やら 外分やらをしたのちに、線で結んで交点とって、、、云々 という問題。

もちろん ベクトルがどうのこうのと 計算することも出来るのだけど、計算に手間取るし、時間がかかる。ここでは 視覚に訴えた方法論を伝えよう。つまり 相似をつかうのだ。

この問題は 次の 2 つの相似の関係を見付けられるかどうか、が鍵だ。



相似だから 何なのだと 思うかもしれないが、この形の相似は 種々のことを伝えてくれている。次の図にこの形の相似から すぐに分かる比の関係を書いてみた。



上の図で $a1 : b1 = a2 : b2 = a3 : b3 = a4 : b4 = a5 : b5$ である。(ただし、3本の水平線は平行)

さて 問題図に戻ろう。最初の相似 ($\triangle ADF$ と $\triangle CEF$) により、 $CF : AF = CE : AD = 3 : 5$ である。

第 2 の相似 ($\triangle ABF$ と $\triangle CGF$) により、 $CG : AB = CF : AF = 3 : 5$ である。

平行四辺形なので $AB = CD$ で $CG : CD$ は $3:5$ 。つまり $CG : GD = 3 : 2$

また 面積の問題の方が、図 14 の色のついた三角形が 平行四辺形の面積の $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$ 倍であることが すぐわかるので、三角形 DFG の面積は その $\frac{2}{5}$ 倍で、答えは $\frac{3}{40}$ 。

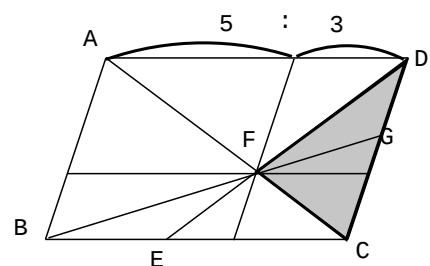
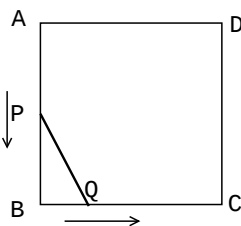


図 14:

11.

一辺が 10cm の正方形 ABCD の辺上を、P は A から B まで 毎秒 3cm、Q は B から C まで 毎秒 1cm の速さで進む。いま P と Q が同時に出発したとき、PQ の距離が最も短くなるのは、何秒後で、その距離はいくらとなるか？



解答) さて、こういう時間が経つにつれて動く点の問題では時間を t で表して、 t 秒後の動点の位置や座標を求めてしまえばあとは 皿洗いのように計算するだけである。

図 15 に t 秒後の P や Q の位置を書き込んでみた。P, Q は 毎秒 3cm、毎秒 1cm で動くんだから 簡単な話である。問題の PQ の長さであるが、

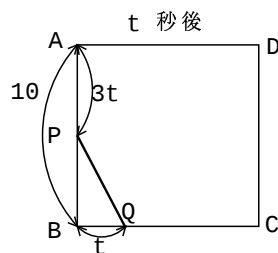


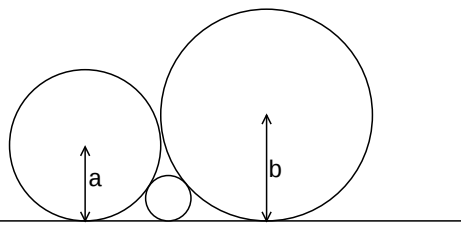
図 15: 問題 10

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PB^2 + BQ^2 = (10 - 3t)^2 + t^2 \\ &= 100 - 60t + 9t^2 + t^2 \\ &= 10t^2 - 60t + 100 \\ &= 10(t^2 - 6t + 9) + 10 \\ &= 10(t - 3)^2 + 10 \end{aligned}$$

後半は中学のときに習う平方完成というやつ。(2 乗は負にならないから) $(t - 3)^2$ が 0 のときが最も小さいので、 $t = 3$ のとき、 PQ^2 は最も小さい。つまり、3 秒後がもっとも短い。

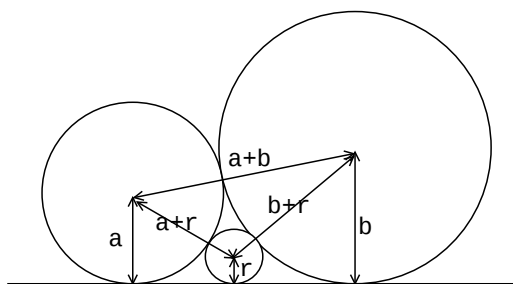
12.

半径 a と b の 2 つの円が外接している。

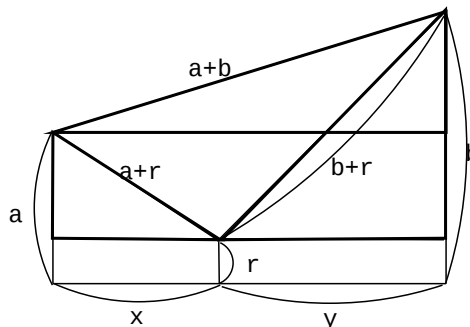


この 2 つの円に外接し、かつそれらの共通接線に接している円の半径を a と b で表せ。

解答) 問題 1 から ずっと言っているが、円を円のまま考えようとしても答えは得られない。次の図のように長さや角度の条件を考えよう。求める円の半径を r とおく。



上の図で 円を忘れて 長さや角度の関係をみていくと、ようにするに これは台形の問題だ。主要な部分を拡大してみる。



さて 長さの関係式を作りたいのだが、何の関係式をつかってどこの部分を 式にするか。。この問題では 三平方の定理が有効である。これ、なかなか思い付かないので 是非 一度自分で 計算するなり、ノートに書いてみるなりして、コツを掴んで欲しい。さて、どこの直角三角形で 三平方の定理をつかうのかというと、上図に太く示した 3 つの三角形だ。

ここで x と y を図のように定めると、

$$(a + b)^2 = (x + y)^2 + (b - a)^2$$

$$(a + r)^2 = x^2 + (a - r)^2$$

$$(b + r)^2 = y^2 + (b - r)^2$$

の 3 つの式が得られる。

それぞれ

$$(x + y)^2 = 4ab, x^2 = 4ar, y^2 = 4br$$

となるので、

$$x + y = 2\sqrt{ab}, x = 2\sqrt{ar}, y = 2\sqrt{br}$$

つまり

$$\sqrt{ab} = \sqrt{ar} + \sqrt{br}$$

よって $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 。すなわち

$$r = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$