教職セミナー 数学 第１回 数と計算 (解答編)

1. $m = \sqrt{\frac{147n}{2}}$ において、m が最小の整数となるときの n の値を求めよ。

解答）ようするに ルートの中が何かの 2 乗になればいいわけだ。平方数になるかど うか、と 来たら 因数分解してみるっつーのが自然な考えだ。で、やってみると

$$\frac{147n}{2} = \frac{3 \times 7 \times 7 \times n}{2}$$

7 は 2 回現れるので ほっといても 勝手に平方数になる部分。n は ２と 3 の面倒をみてやらないといけない。分母は 約分されないといけないし、3 は 2 度現れないといけないので $n = 2 \times 3 = 6$ であれば大丈夫だろう。答えは 6。

2. $\frac{3}{7}$ を小数に直したとき、小数第 30 位の数字は何か。

解答）要するに 分数は小数にすると 循環小数になるわけで、循環ってことは おんなじ部分がなんど もなんど も現れるわけだ。たとえば $3/7 = 0.428571428571428571\cdots$. 428571 が なんど も現れる。

小数第 1 位から 6 位、小数第 7 位から 12 位、小数第 13 位から 18 位、。。。

６桁毎にくりかえすんだから 30 位だろうが、300 位だろうが、1 だな。答えは 1。

3. 次の式を計算せよ。

(1)

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + 4\sqrt{5}$$

(2)

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

解答）(1) は 有理化の問題だ。分母にある根号を消すにはど うしたらいいか？根号には 根号をぶつければいいのだ。この場合は 分母、分子に $\sqrt{5}-2$ を掛ければいい。実際に計算してみれば 仕組みがわかると思うが、$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ は 根号が消えるということを利用している。答えは 10。

(2) は 2 重根号の問題だ。$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ を 2 乗してみたまへ。すると $(3+2) + 2\sqrt{3 \times 2}$ になるであろう。

２乗したら $(3+2)+2\sqrt{3 \times 2}$ になったっつーことは $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は $(3+2)+2\sqrt{3 \times 2}$ の平方根に等しいということだ。

これを逆に見ると

$$\sqrt{(\text{２つの数の足し算}) + 2\sqrt{\text{２つの数の掛け算}}}$$

になってるときは根号が外せるということなのだ。

例えば $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{(2+1)+2\sqrt{1 \times 2}} &= \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{2} + \sqrt{1}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2} \end{aligned}$$

同じように考えて

$$\begin{aligned} \sqrt{(2+1)-2\sqrt{1 \times 2}} &= \sqrt{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{1}\sqrt{2} + \sqrt{1}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2} \end{aligned}$$

だから
$$\sqrt{(\text{２つの数の足し算}) - 2\sqrt{\text{２つの数の掛け算}}}$$
でも根号が外せることに注意しよう。

ただし この場合は正負に気を付けないといけない。ルートは必ず 正であることに気を付けよう。たとえば $\sqrt{(2+1)-2\sqrt{1\times 2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$ であって、$\sqrt{(2+1)-2\sqrt{1\times 2}} = \sqrt{1}-\sqrt{2}$ ではない。

以上を踏まえて計算すると、

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\times 2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$
$$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times 3}} = \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}$$

３つ 合わせて 答えは $\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{1}=1$。

4. 2 でも 3 でも割り切れない自然数を小さい方から順にならべていくと 1,5,7,11,$\cdots$ となる。この数列について次の問いにこたえよ。

(1) 初めから数えて 30 番目の数を 12 で割ったときのあまりを求めよ。

(2) 初めから数えて 99 番目の数を求めよ。

(3) 99 番目までの和を求めよ。

(解答) ２で割れるとき、「ウン！」 割れないとき「パッ」。で ０からはじめると、

ウン、パッ、ウン、パッ、ウン、パッ、。。

３で割れるとき、「ウン！」 割れないとき「パッ」。で ０からはじめると、

ウン、パッ、パッ、ウン、パッ、パッ、、。。

このリズムを二人でいっしょにやってみたまへ。６回ごとに ふたり同時に「ウン！」ということになって６回ごとに同じパターンが繰り返される。

もうお分かりであろう、上記のパターンを同時に考えるには、６の長さの周期で考えるとよい。２でも３でも割り切れない数というのは、実は６で割って １か５ 余る数だったのだ。だから 問題に挙げられた数の列は

$$1,\quad 5,\quad 6+1,\quad 6+5,\quad 12+1,\quad 12+5,\quad 18+1,\quad 18+5,\cdots$$

とつづく。ここまで 分かれば何とかなるであろう。

(1) 1 と 5 をペアに、6+1 と 6+5 をペアに、、と考えて行くと 30 番目というのは 第 15 ペアの右側ってことになる。第 15 ペアは $6\times 14+1$ と $6\times 14+5$。だから 答えは 5。

(2) 99 番目ということは 第 50 ペアの左側ということになる。第 50 ペアは $6\times 49+1$ と $6\times 49+5$。だから答えは 295。

(3) 99 番目まで全部足すのだが、ペアの右側ばかり と ペアの左側ばかりに分けて考えると、

$$\begin{aligned}
& 1+5+(6\times 1+1)+(6\times 1+5)+(6\times 2+1)+(6\times 2+5)+\cdots+(6\times 49+1) \\
= \quad & \{1+(6\times 1+1)+\cdots+(6\times 49+1)\}+\{5+(6\times 1+5)+\cdots+(6\times 48+5)\} \\
= \quad & \{1\times 50+6\times(1+2+\cdots 49)\}+\{5\times 49+6\times(1+2+\cdots 48)\}
\end{aligned}$$

みなさんは $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ という式を知っているだろうか？あとはこれを用いて 計算すれば 答えは 14701。

5. a,b,c,d の 4 文字を用いて 4 進法を示すと次のようになる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	ad	aa	ab	ac	bd	ba	bb

(1) abc は 10 進法でいくつか？

(2) 10 進法の 210 を上にならって 文字で示したとき、どのような文字列になるか？

(解答) 4 進法で １から数えてみよう。

1,2,3,10,11,12,13,20,···

上記の a,b,c,d は 1,2,3,0 に相当することが 分かるであろう。あとは 簡単。

(1) abc というのは 4 進数の $(123)_4$ のことだから $1 \times 4^2 + 4 \times 2 + 3$ で 答えは 27。

(2) 10 進数の 210 を４進数にすればいいので、$210 = 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4 + 2$ より答えは cadb。

6. つぎのような数列がある。

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \cdots$$

(1) 初めから数えて 30 番目の数を求めよ。

(2) $\frac{3}{10}$ は 何番目になるか。

(解答) まぁ 30 番目くらいなら 全部書いたほうが 早いだろうけどね。初めの１個、そのつぎの２個、その次の３個、という風にグループわけしていくことが先決ですね。では ３０番目の数は何番目のグループに入るか？そして そのグループの中で 何番目か？それが 分かれば いい。

では どうしたらいいか？各グループの最後の数は 何番目の数か、わかれば いい。

最初のグループの最後は １番目。次のグループの最後は 1+2 で ３番目。以下、1+2+3、1+2+3+4、と続く。

30 は 1+2+3+4+5+6+7=28 と 1+2+3+4+5+6+7+8=36 の間だから、8 番目のグループだ。そしてその中の 2 番目だ。もう分かるね。

８番目のグループというのは

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{8}{1}$$

なのだから 答えは $\frac{2}{7}$。

7. 次の計算の (　) に適する数値をいれよ。

(1)

$$1.24 \div (1\frac{7}{25} + 1.4) \div (\quad) = \frac{4}{7}$$

(2)

$$375 - \{37.5 - (1\frac{1}{8} - 0.375) \times 18\} = (\quad)$$

(3)

$$12 \times \left((\quad) \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{5} = 8\frac{4}{5}$$

解答を書くのはめんどいので 一言だけ いっておこう。とにかく 小数は分数に直しなさい。そこから始めなさい。それから、できれば 掛け算は最後まで計算せずにおいた方が楽なときが多い。たとえば、

$$3.14 \times 2 + 3.14 \times 21 + 3.14 \times 7$$

だったら、$3.14 \times (2 + 21 + 7)$ の方が楽だ、ということはすぐ分かるであろう。

(2) では 375 が 如何にも最後にまとめられそうだね。

答えは (1)217/268、　(2)351、　(3)3。

8. 1500 の正の約数の個数を求めよ。

(解答) 約数の個数と来たら、もう 条件反射で 因数分解し ましょう。はい。

$$1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$$

1500 の約数も 25 とか 30 とか 150 とか いろいろあるでしょうが、どれもこれも、

$$5^2、2 \times 3 \times 5、2 \times 3 \times 5^2$$

という風に 上記の因数分解から 各因数をすこしずつ分けてもらって来て作られる数ばかりです。

たとえば 2 という因数は 0 個から 2 個まで分けてもらえます。3 という因数は 0 個か、1 個。 5 という因数は 0 個から 3 個までの 4 通り。ようするに 場合の数の計算になりまして、答えは $3 \times 2 \times 4$ で ２４通り。

9. 1 から 300 までの整数のうち、2,3,5 のいずれかで割り切れるものはいくつあるか？

（解答）４番の問題と酷似してますな。４番の問題の解説を読んでいただけるとわかると思うのですが、2,3,5 のそれぞれについて割れるだの 割れないだのという話しは 2,3,5 の最小公倍数ごとに同じことが繰り返されます。

実際１から３０までを見てみると、

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 で割れる	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×
3 で割れる	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
5 で割れる	×	×	×	×	○	×	×	×	×	○	×	×	×	×	○

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2 で割れる	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
3 で割れる	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
5 で割れる	×	×	×	×	○	×	×	×	×	○	×	×	×	×	○

となっていて、2,3,5 のどれでも割り切れないのは 1,7,11,13,17,19,23,29。これに 30 を足したもの数字達も やはり 2,3,5 で割り切れません。

つまり、2,3,5 のいずれでも割り切れないのは 1〜30 に 8 個、31〜60 に 8 個、、、といきますから 1〜300 だったら 80 個。

つまり 答えは $300 - 80 = 220$。

10. 3^{15} の 1 の位はいくつか？

(解答) 3^{15} を本気で計算しようとしたひと、やめましょう。エライ目に会います。では どうすればいいのか。

3^2 だったら すぐ計算できますね。はい。9 です。

じゃぁ 3^4 は？$3^4 = 3^2 \times 3^2$ ですから 81 です。

じゃぁ 3^{12} は $3^{12} = 3^4 \times 3^4 \times 3^4$ だから、$81 \times 81 \times 81$。。。ちょっとまった！

81 を 3 乗しなくてもいいんです。だって 1 の位だけ分かればいいんですから。81 掛ける 81 の一の位は１です。だから ３乗しても また一の位は１です。

$3^{15} = 3^{12} \times 3^3$ なので あとは 3^3 が わかれば、、、って２７ですね。もう わかりますね。

答えは 7 です。

11. 2 進法で 11010 で表される数は 10 進法でいくつか？

（解答）これくらい出来ないと やばいです。２進法の 11010 っていうのは左から 1 が 0 個 2 が 1 個 2^2 が 0 個 2^3 が 1 個 2^4 が 1 個という意味ですから、答えは $16 + 8 + 2 = 26$。

12. 2 桁の 2 数があり、その最小公倍数は 105、最大公約数は 7 であるとき、この 2 数を求めよ。

(解答) 最大公約数が 7 なので、２つの数は 7n と 7m と表せるはずです。

ところで最小公倍数が 105 なので、7n も 7m も 105 の約数です。105 を 7 で割って、えーと 15。だから、7n と 7m は 7×15 の約数なわけだ。

つまり、n と m は 15 の約数だな。

15 の約数は 1,3,5,15 しかないので、このうち 条件を満たすものを探せば とりあえず解けるだろう。

実際 ２つの数っていうのは 7 か 21 か 35 か 105 のどれか。条件にあうのは 21 と 35 の場合だけだ。