

幾何学II演習 # 9

- Exercise 1 : 次の線形写像を表す行列を求めなさい。
 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $f(3, 4) = (1, 0)$, $f(4, 5) = (0, 1)$ 。
 2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は次のように定める。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して \mathbf{x} を正の向きに $\frac{\pi}{2}$ 回転させたベクトルを \mathbf{x}' とし、 \mathbf{x} と \mathbf{x}' の中点の位置ベクトルを $f(\mathbf{x})$ とおく。
 3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $f(1, 1, 0) = (0, 1, 1)$ 、 $f(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ 、 $f(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$ 。
- Exercise 2 : 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が単射でないならば、 0 ベクトルではないベクトル \mathbf{a} で $f(\mathbf{a}) = 0$ となるものがあることを示せ。
- Exercise 3 : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ で定められる線形写像とする。いま $k \in \mathbb{R}$ として、 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - k\mathbf{x}$ で定める時、
 1. g を表す行列を求めよ。
 2. g が単射でないための条件を調べよ。
- Exercise 4 : 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(x, y) = (y, x + y)$ で定める。また $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく。また、 $\mathbf{a} = (1, g)$ 、 $\mathbf{b} = (g, -1)$ とおく。
 1. $f(\mathbf{a}) = g\mathbf{a}$ 、 $f(\mathbf{b}) = -\frac{1}{g}\mathbf{b}$ となることを示せ。
 2. ベクトル $(1, 1)$ を \mathbf{a} と \mathbf{b} の一次結合で表せ。
 3. $f(f(f(\cdots f(1, 1)\cdots)))$ と $(1, 1)$ に f を n 回施したベクトルを求めよ。
- Exercise 5 : p と q は正の有理数で $p^2 + q^2 = 1$ を満たすとする。
 1. 点 $P(p, q)$ と点 $A(1, 0)$ の垂直二等分線 l の傾きが有理数であることを示しなさい。
 2. p と q は適当な自然数 a, b を使って、 $p = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$ 、 $q = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ と表されることを示しなさい。
(ヒント : 直線 l の式を $ax = by$ (a と b は自然数) として、 l に関する反転を用いる)