

幾何学II演習 # 8

- Exercise 1 : $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ とする。 V がベクトル空間であることを示したい。

1. $\mathbf{x} \in V$ のとき、 $k\mathbf{x} \in V$ であることを示せ。
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ のとき、 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ であることを示せ。

- Exercise 2 : Ex.1 の V の基底を 1 組 求めたい。 $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ とする。 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が V の基底となるような $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ を見付けよ。

- Exercise 3 : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が線形写像であるとき、 $f \circ g$ も線形写像であることを示せ。

- Exercise 4 : V, W をベクトル空間とする。線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対して、 V の部分集合 $\{\mathbf{x} \in V | f(\mathbf{x}) = 0\}$ を $\ker f$ と表し f の核 (kernel) と呼ぶ。

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が $\ker f$ の元であるとき、 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ も $\ker f$ の元であることを示せ。
2. $\mathbf{x}$ が $\ker f$ の元であるとき、 $k\mathbf{x}$ も $\ker f$ の元であることを示せ。
(ただし k は実数)

- Exercise 5 : 次の線形写像 f について、 $\ker f$ を平面上に図示せよ。

1.
$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (x, y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (2x + 3y, 4x + 5y) \end{array}$$

2.
$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (x, y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (4x + 6y, 6x + 9y) \end{array}$$

- Exercise 6 : ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像、

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (x, y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \cup \\ (4x + 6y, 6x + 9y) \end{array}$$

を考える。写像 f の像を平面上に図示せよ。