

幾何学II演習 # 3

- Exercise 1 : 以下に示した 集合 X 上の関係は 反射律、対称律、推移律を満たすか、調べよ。

1. $X = \mathbb{N}$ とする。 $X \ni x, y$ に対して x と y が互いに素のとき $x \sim y$ と定める。
2. X を 2 次正方行列全体の集合とする。 $X \ni A, B$ に対して $AB - BA = 0$ のとき、 $A \sim B$ と定める。
3. $X = \beta(\mathbb{N})$ とする。 $X \ni A, B$ に対して $(A - B) \cup (B - A)$ が有限集合のとき、 $A \sim B$ と定める。
4. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする。 $X \ni (a, b), (c, d)$ に対して $ad - bc = 0$ のとき、 $(a, b) \sim (c, d)$ と定める。

- Exercise 2 : 以下に与えられた集合の間の全単射を 1 つ作れ。

1. \mathbb{N} と $\mathbb{N} - \{1\}$
2. \mathbb{N} とすべての正の偶数の集合
3. \mathbb{N} と \mathbb{Z}
4. \mathbb{N} と \mathbb{N}^2

- Exercise 3 : つぎの関係は同値関係であることを確認し、商集合を調べよ。

1. 正六角柱のすべての頂点の集合を X とする。 2 頂点 x と y に対し、 x から y まで 偶数本の辺上をたどって、進むことができるとき、 $x \sim y$ と定める。
2. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。 $X \ni x, y$ に対し、「 $2^i x$ を 7 で割った余りが y 」となる i があるとき $x \sim y$ とする。

- Exercise 4 集合 X, Y を $X = \{1, 2, 3\}$ 、 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、 $i : X \rightarrow Y$ を包含写像とする。 このとき $i^* : \beta(Y) \rightarrow \beta(X)$ を $A \in \beta(Y)$ に対して $i^{-1}(A) \in \beta(X)$ を対応させる写像とする。 i^* は全射か、単射か、調べよ。

- Exercise 5 集合 X, Y を $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 、 $Y = \{1, 2, 3\}$ とし、 $p : X \rightarrow Y$ を

$$p(k) = \begin{cases} 1 & k = 1, 2 \\ 2 & k = 3, 4 \\ 3 & k = 5, 6 \end{cases}$$

とする。 また $i^* : \beta(Y) \rightarrow \beta(X)$ を $A \in \beta(Y)$ に対して $i^{-1}(A) \in \beta(X)$ を対応させる写像とする。 i^* は全射か、単射か、調べよ。