

幾何学II演習 # 2

集合と写像

- Exercise 1 : $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$ 、 $\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 0\}$ とする。 $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) = x^2$ という対応を考える。 f を以下のような写像と考えた時、それぞれ 単射か、全射か調べよ。また 全単射のときは 逆写像を求めよ。
 1. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
 2. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$
 3. $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$
 4. $f : \mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}^+$
- Exercise 2 : $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ とするとき次のものの数を求めよ。
 1. X から X への写像の個数。
 2. X から X への単射の個数。
 3. X から X への全射の個数。
- Exercise 3 : 写像 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x) = x^2$ と定める。このとき 次の問いに答えよ。
 1. $A = [-1, \infty)$ とするとき、 A の f による像を求めよ。
 2. $B = [1, \infty)$ とするとき、 B の f による逆像を求めよ。
- Exercise 4 : 写像 $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = x$ と定める。このとき 次の問いに答えよ。
 1. f の像を求めよ。
 2. $B = [1, 2]$ とするとき、 B の f による逆像を図示せよ。
 3. $C = \{(x, x) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{R}\}$ とするとき、 C の f による像を求めよ。
- Exercise 5 : 写像 $f : X \rightarrow Y$ 、 $g : Y \rightarrow Z$ について、 $g \circ f$ が単射ならば f が単射であることを示せ。
- Exercise 6 : $X = \mathbf{R}$ 、 $Y = \mathbf{R} - \{0\}$ とする。 X から Y への全単射を 1 つ作れ。

- Exercise 7 : $X = \{ \text{平面内のすべての直線} \}$ とする。 $l, m \in X$ に対して、 l と m が平行なとき $l \sim m$ と定める。このとき 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ。
- Exercise 8 : 平面上の全ての点の集合を X とする。また $o \in X$ を原点として固定する。 $x, y \in X$ に対して、 $ox = oy$ のとき $x \sim y$ と定める。このとき 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ。また $X / \sim$ はどのような商集合になるか？
- Exercise 9 : $\mathbf{R}$ の全ての部分集合からなる集合を X とおく。 $A, B \in X$ に対して、 A から B への全単射があるとき、 $A \sim B$ と表すことにする。このとき 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ。