幾何学II [補足プリント]／ 授業担当：濱中 裕明

1　一般２次曲線

[疑問]
２変数 x と y に関する一般の２次式

$$f(x,y) = px^2 + qxy + ry^2 + sx + ty + u \tag{1}$$

を考える。$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\}$ はどんな図形だろうか？

もし、xy の係数 q が 0 ならば 高校で習う２次曲線である。

そこで 原点を中心に図形 P を角度 θ だけ回転させた図形 P' を考える。うまい角度で回転させれば P' を表す式の xy の項が消えるのではないだろうか？

原点を中心とする角度 θ の回転移動を ρ とおくと、

$$P' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(\rho^{-1}(x,y)) = 0\}$$

いま $\alpha = \cos(\theta)$、$\beta = \sin(\theta)$ とおけば

$$\rho^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ -\beta x + \alpha y \end{pmatrix}$$

だから、P' を表す式は (5) に上の式を代入して、

$$\begin{aligned} & f(\rho^{-1}(x,y)) \\ =& p(\alpha x + \beta y)^2 + q(\alpha x + \beta y)(-\beta x + \alpha y) + r(-\beta x + \alpha y)^2 + s(\alpha x + \beta y) + t(-\beta x + \alpha y) + u \\ =& p(\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2) + q(-\alpha\beta x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)xy + \alpha\beta y^2) + r(\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2) \\ & \qquad + (x \text{ と } y \text{ の } 1 \text{ 次式}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

これを x, y についてまとめると

$$(p\alpha^2 - q\alpha\beta + r\beta^2)x^2 + \underline{(2\alpha\beta(p-r) + (\alpha^2 - \beta^2)q)}xy + (p\beta^2 + q\alpha\beta + r\alpha^2)y^2 + (x \text{ と } y \text{ の } 1 \text{ 次式}) = 0 \tag{2}$$

θ を うまくとって、上の波線の部分が 0 になるように出来るだろうか？

結論からいうと 取れるのである。それは何故か？もともと $\alpha = \cos(\theta)$, $\beta = \sin(\theta)$ だったから

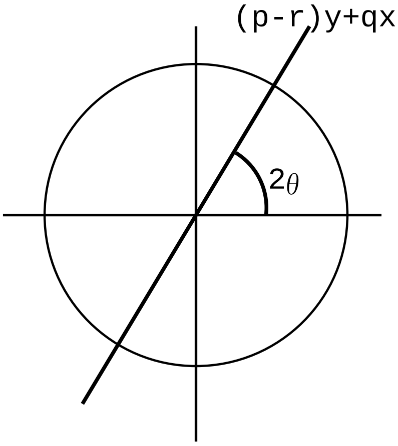
$$2\alpha\beta = \sin(2\theta), \alpha^2 - \beta^2 = \cos(2\theta)$$

である。よって、波線が 0 になるためには

$$(p-r)\sin(2\theta)+q\cos(2\theta)=0$$

であればよい。これは 点 $(\cos(2\theta),\sin(2\theta))$ が直線 $(p-r)y+qx=0$ 上にあるということである。

つまり 次の図のように θ を取ればよいので波線が 0 になる θ は確かに存在する。



さて以後 θ は波線部分が 0、つまり

$$2\alpha\beta(p-r)+(\alpha^2-\beta^2)q=0 \tag{3}$$

を満たすとする。

このとき P' の式、すなわち (2) は

$$_{(1)}\underline{(p\alpha^2-q\alpha\beta+r\beta^2)}x^2+{}_{(2)}\underline{(p\beta^2+q\alpha\beta+r\alpha^2)}y^2+(x \text{ と } y \text{ の 1 次式})=0$$

となる。つまり 一般の 2 次式で 与えられる図形は 適当な回転により、高校でならう 2 次曲線に帰着される。というのも、上の下線分 (1),(2) を それぞれ m,m' とおけば、P' の式は適当な係数 s', t',u' を用いて

$$mx^2+m'y^2+s'x+t'y+u'=0$$

であるから、

1. m, m' がどちらも 0 でないとき：

   x, y に関して平方完成を行うことにより、P' の式は、適当な数 a,b,u'' を用いて

   $$m(x-a)^2+m'(y-b)^2=u''$$

   となる。これは 一般に、 双曲線 (m,m' が異符号) もしくは楕円 (m,m' が同符号) となる。

   ただし、例外的に m,m' が異符号 (仮に $m>0>m'$ とする) で $u''=0$ のときは

   $$\{\sqrt{m}(x-a)+\sqrt{-m'}(y-b)\}\{\sqrt{m}(x-a)-\sqrt{-m'}(y-b)\}=0$$

   というように、交わる直線を表す。

また、m, m' が同符号の場合にも, 仮に両方とも正とすれば、

$$m(x-a)^2 + m'(y-b)^2 = u''$$

の左辺は負となることはないから、u'' が負のとき、空集合になってしまう。

2. m, m' の一方が 0 のとき：$m' = 0$ の場合を考える。このとき、x に関して平方完成を行うことにより、P' の式は適当な数 a, c, u'' を用いて

$$cy = m(x-a)^2 + u''$$

となる。これは $c \neq 0$ のとき、放物線となり、例外的に $c = 0$ のときは x に関する２次方程式となってしまうから、その方程式が 2 解を持てば、平行な２直線、重解なら１つの直線、解無しなら空集合である。

3. $m = m' = 0$ のとき：1 次式となるから 一般に直線である。

結局、**例外的な場合を除けば、２次式で決まる曲線は 楕円か双曲線か放物線になる**ということである。

[疑問]
さて 確かに このように計算すれば ２次曲線は楕円か双曲線か放物線になることが分かるが、そのような計算なしに、つまり もとの２次式 (5) の係数から直ちに楕円か双曲線か放物線のいずれになり得るのか調べることができないだろうか？

P が点や２直線になる、というような 例外的な場合をのぞけば

- m と m' が同符号、つまり $mm' > 0$ のとき 楕円。
- m と m' が逆符号、つまり $mm' < 0$ のとき 双曲線。
- m と m' のいずれかが 0、つまり $mm' = 0$ のとき 放物線。

になる。そこで mm' を計算してみる。
mm' を直接計算することも可能だが、煩雑になるので、うまい計算方法を考えよう。
まず、次のことを思い出す。

命題 1.1 A,B を同じサイズの正方行列とするとき、

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

証明： A, B が 2x2 行列の時のみ、直接計算で示しておく。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\
&= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\
&= (aecf+aedh+bgcf+bgdh)-(afce+afdg+bhce+bhdg) \\
&= adeh+bcfg-adfg-bceh \\
&= (ad-bc)(eh-fg)
\end{aligned}$$

証明終わり

ここで、実は、次の行列の式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix} \tag{4}$$

実際、左辺を計算すると (途中で式 (3) を使う)、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha p-\frac{\beta q}{2} & \frac{\alpha q}{2}-\beta r \\ \beta p+\frac{\alpha q}{2} & \frac{\beta q}{2}+\alpha r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p\alpha^2+r\beta^2-q\alpha\beta & 0 \\ 0 & r\alpha^2+p\beta^2+q\alpha\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから式 (4) は確かに正しい。

この計算結果から

$$\begin{aligned}
mm' &= \det\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
&= -\frac{q^2-4pr}{4}
\end{aligned}$$

となる。つまり、２変数 x と y に関する２次式

$$f(x,y) = px^2+qxy+ry^2+sx+ty+u \tag{5}$$

で定まる図形は、回転移動により $mx^2+m'y^2+s'x+t'y+u'=0$ の形になるので、

- q^2-4pr が正のとき、mm' が負で、P は双曲線（例外的に２直線）。
- q^2-4pr が負のとき、mm' が正で、P は楕円（例外的に１点もしくは空集合）。
- q^2-4pr が 0 のとき、mm' が 0 で、P は放物線（例外的に直線、平行な２直線等）。

となることが分かる。