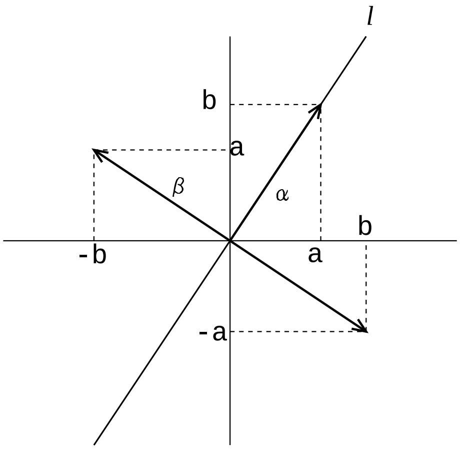
平成15年度 幾何学II [補足プリント] ／ 授業担当：濱中 裕明

1 鏡映を表す行列についてのまとめ

当然のことだが 結果の式を覚える必要はなく、導出方法を理解してほしい。

式 $ay - bx = 0$（つまり a が 0 でないときは $y = \frac{b}{a}x$）で表される直線 l は 原点を通り、l に関する鏡映 $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像となるが、この線形写像を表す行列を求めよう。



ベクトル $\alpha = (a, b)$, ベクトル $\beta = (-b, a)$ を考えると α の表す点は l 上にあり、α と β は垂直。

$$\text{故に } \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \sigma(\beta) = -\beta$$

よって 求める行列を A とすると、

$$A\alpha = \alpha, \quad A\beta = -\beta$$

つまり

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

これより

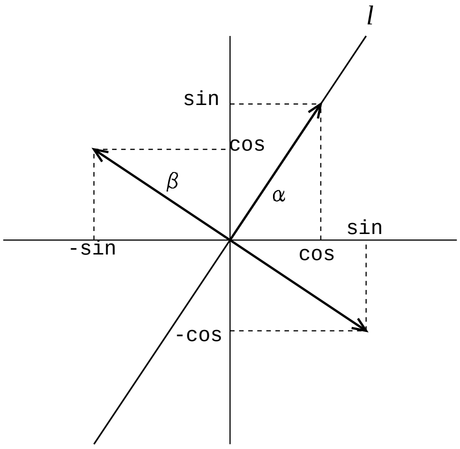
$$A \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

値を a, b から $\cos(\theta), \sin(\theta)$ に変えて、別の計算方法で導出しておく。

図のように 原点で x 軸と角度 θ で交わる直線 l に関する鏡映を σ で表す。線形写像 σ を表す行列を求める。

前と同様にベクトル $\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$、ベクトル $\beta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ を考えると α の表す点は l 上にあり、α と β は垂直。



よって $\sigma(\alpha) = \alpha$、$\sigma(\beta) = -\beta$。つまり α と β については σ によって どこに移るか分かっている。
さて α と β は 平面ベクトル全体の基底になるから任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbf{x} = k\alpha + l\beta$$

となる実数 k と l が唯１つあり、そのような k,l を求める。

$$\begin{cases} x = k\cos(\theta) - l\sin(\theta) \\ y = k\sin(\theta) + l\cos(\theta) \end{cases}$$

これを k,l についての連立１次方程式として解けば

$$\begin{cases} k = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ l = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

を得る。そこまで計算すれば、あとは

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}) &= \sigma(k\alpha + l\beta) = k\sigma(\alpha) + l\sigma(\beta) = k\alpha - l\beta \\ &= (x\cos(\theta) + y\sin(\theta)) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} - (-x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))x + (2\sin(\theta)\cos(\theta))y \\ (2\sin(\theta)\cos(\theta))x + (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) & (2\sin(\theta)\cos(\theta)) \\ (2\sin(\theta)\cos(\theta)) & (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

前ページの a, b に $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ を代入しても同じ結果になっている。