1　集合

- 集合とは物の集まり。（含まれるかそうでないかはっきりしている必要がある。）

  a が集合 A に含まれている時に $a \in A$ と表す。

  a は A の要素 (もしくは元) といわれる。

- 集合の表し方

  - $\{2, 3, 4, 5\}$
  - $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ ←「$\mathbb{R}$ の元 x のうち $x \geq 0$ をみたすもの」という意味。

- 決まりごと

  $\mathbb{R}$:実数の集合, $\mathbb{Q}$:有理数の集合, $\mathbb{Z}$:整数の集合, $\mathbb{N}$:自然数の集合, $\mathbb{C}$:複素数の集合

- $\{x \in \mathbb{R} | x > 0$ かつ $x < -1\}$

  ↑このような集合に含まれる元は存在しない。

  このような (元がない) 集合のことを『$\emptyset$(空集合)』という。

（注）$\{0\}$ ← これは空集合ではない。

- 記号

  $\forall$〜：　任意の〜について，

  $\exists$〜：　ある〜があって，

  $s.t.\cdots$：　$\cdots$であるような

（例）$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$, $s.t.\ y^2 = x$

（任意の実数 x に対して，$x > 0$ ならば $y^2 = x$ を満たす実数 y が存在する。）

定義 1.1 集合 A,B に対して

$$A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} 「\forall a \in A \text{ に対して } a \in B」$$
$$\Leftrightarrow 「a \in A \Rightarrow a \in B」$$

定義 1.2 集合 A,B に対して

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} 「A \subset B \text{ かつ } A \supset B」$$

（例）「$A \supset A$」を示せ。

$\because A \ni a \Rightarrow A \ni a$

（例）「$A \supset B$ —(i), $B \supset C$ —(ii) $\Rightarrow A \supset C$」を示せ。

$\because c \in C \Rightarrow c \in B$ ((ii) より)

$\Rightarrow c \in A$ ((i) より)

定義 1.3 $A \supset B$ かつ $A \not\subset B$ の時,$A \supsetneqq B$ と表し,B を A の真部分集合という。

- $\forall A$：集合 に対し $A \supset \emptyset$

  $\because$ 上記を示すためには「 $\emptyset \ni x \Rightarrow A \ni x$」を示せばよい。

  そのために 対偶をとると、「$A \not\ni x \Rightarrow \emptyset \not\ni x$」

  これは常に正しい。

- 集合 A の数を $\#A$ と表す。

  ただし，要素の数が有限でない時は，$\#A=\infty$ と表す。

  また，要素の数がが有限でることを，$\#A<\infty$ で表す。

注意 1.4 集合の集合というものもある。

（例）$\{\{1\},\{1,2\},\{2,3,4\},\emptyset\}$

定義 1.5 A を集合とする。A の全ての部分集合の集合を A のべき集合といい，$\beta(A)$（もしくは 2^A）と表す。

（例）$A=\{1,2,3\}$ のとき、$\beta(A)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$

命題 1.6 $\#A=n$ ならば $\Rightarrow \#\beta(A)=2^n$
（証明）A の n 個の元それぞれについて,“ 入る ” “ 入らない ”を決めると 1 つの部分集合が決まる。だから 2^n 通りの部分集合がある。

注意 1.7 「$A\in X$」と「$A\subset X$」の違いに注意。

定義 1.8 A,B：集合

$$\begin{aligned} A\cup B &= \{x\mid x\in A \textit{ or } x\in B\}\\ A\cap B &= \{x\mid x\in A \text{ かつ } x\in B\}\end{aligned}$$

定理 1.9 A,B,C：集合

$$A\subset C,B\subset C\Rightarrow (A\cup B)\subset C$$

（証明）

$A\cup B\ni x$ とすると $\begin{cases} x\in A---(i)\\ \quad or\\ x\in B---(ii)\end{cases}$

(i) の時，$A\subset C$ より $x\in C$
(ii) の時，$B\subset C$ より $x\in C$
$\therefore x\in C$

定理 1.10 A,B,C：集合

1. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

2. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

（証明）

1.

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)\cap C &\Leftrightarrow x\in A\cup B \text{ かつ } x\in C\\ &\Leftrightarrow \text{「}x\in A \textit{ or } x\in B\text{」かつ } x\in C\\ &\Leftrightarrow \text{「}x\in A \text{ かつ } x\in C\text{」}\textit{or}\text{「}x\in B \text{ かつ } x\in C\text{」}\\ &\Leftrightarrow \text{「}x\in A\cap C\text{」}\textit{or}\text{「}x\in B\cap C\text{」}\\ &\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \ or \ x \in C \\
&\Leftrightarrow \quad 「x \in A \text{かつ} x \in B」 or \ x \in C \\
&\Rightarrow \quad 「x \in A \ or \ x \in C」\text{かつ}「x \in B \ or \ x \in C」 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \cup C \text{ かつ } x \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{aligned}$$

上記の変形で、一箇所だけ矢印が片方向きになっている。これの逆、つまり

$$「x \in A \ or \ x \in C」\text{かつ}「x \in B \ or \ x \in C」\Rightarrow「x \in A \text{かつ} x \in B」or \ x \in C$$

を示す。「$x \in A \ or \ x \in C$」ということは $\begin{cases} x \in A \text{かつ} x \in B\text{—(i)} \\ x \in C \text{かつ} x \in B\text{—(ii)} \\ x \in A \text{かつ} x \in C\text{—(iii)} \\ x \in C\text{—(iv)} \end{cases}$ のいずれかであるから

(i) の時, $x \in A$ かつ $x \in B$ だから、$\therefore x \in (A \cap B) \cup C$

(ii),(iii),(iv) の時は $x \in C$ なので、やはり $x \in (A \cap B) \cup C$

（メモ）

$$\begin{aligned}
X = Y \quad &\Leftrightarrow \quad 「X \subset Y」\text{かつ}「Y \subset X」 \\
&\Leftrightarrow \quad 「x \in X \Rightarrow x \in Y」\text{かつ}「x \in Y \Rightarrow x \in X」 \\
&\Leftrightarrow \quad 「x \in X \Leftrightarrow x \in Y」
\end{aligned}$$

定義 1.11 X：集合

以下 X の部分集合について 考える（この時 X を全体集合という）。

- $A(\subset X)$ に対して,

$$A^c = \{x \in X | x \notin A\} \leftarrow A \text{ の補集合 } \textit{(complement)} \text{ という}$$

- $A, B(\subset X)$ に対して、

$$A - B = \{a \in A | a \notin B\} \leftarrow（A \text{ の元 } a \text{ のうち，} a \notin B \text{ を満たすもの}）$$

と定める。

定義 1.12 集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ とする。

- $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} A_i = \{x | \exists i \in \mathbb{N} \ s.t. \ x \in A_i\}$
  （$A_1, A_2, A_3, \cdots$ のどれかに含まれる）

- $\bigcap_{\lambda=1}^{\infty} A_i = \{x | \forall i \in \mathbb{N}$ について $x \in A_i\}$
  （$A_1, A_2, A_3, \cdots$ の全てに含まれる）