幾何学II (2014.07.18)

問 1 (15) ： X,Y,Z は集合とし、写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

1．f の像と呼ばれる集合 $\mathrm{Im} f$ とは何か。次の $\boxed{}$ に入る条件を書け。

$$\mathrm{Im} f = \{ y \in Y \mid \boxed{} \}$$

2．「$g \circ f$ が単射ならば、f が単射である」が成り立つ。その証明が完成するように、次の空所 (１) と（２）を埋めよ。

X の任意の元 a, b に対して、
もしも (　　1　　) とすると、$g \circ f(a) = g \circ f(b)$ である。
このとき、仮定により、
(　　2　　) なのだから、f は単射である。

問 2 (20) ： V と W をベクトル空間とする。ベクトル空間 V の３つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ および、線形写像 $f : V \to W$ について、次の問いに答えよ。

1．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であるとはどういうことか。定義を述べよ。

2．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が V を生成するとはどういうことか。定義を述べよ。

3．f が単射で、$f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c})$ が W を生成するならば、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が V を生成することを示せ。

問 3 (20) ： いま容器 A に７リットル、容器 B に０リットルの水がそれぞれ入っており、その状態から以下の３つの操作を繰り返す。

1．容器 A の中身の半分を容器 B に移す。

2．さらに、このときの容器 B の中身の半分を、容器 A に移す。

3．さらに、このときの容器 B の中身の半分を容器 A に移す。

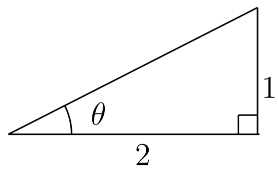
上記の３操作を n 回繰り返したのちの容器Ａの水の量を a_n リットル、容器 B の水の量を b_n リットルとする。特に、$a_0 = 7$, $b_0 = 0$ である。

1．非負整数 n に対して、ベクトル (a_{n+1}, b_{n+1}) は (a_n, b_n) にある行列 A をかけたものになる。A を求めよ。

2．A の固有値をすべて求め、対応する固有ベクトルを求めよ。

3．a_n, b_n の一般項を求めよ。

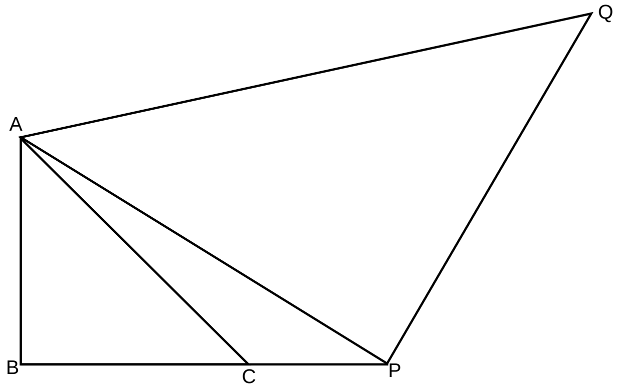
問 4 (25) ： (x, y) に関する式 $(2x-y)^2 = x+2y$ で与えられる曲線 C を考える。この曲線 C を原点を中心として正の向き（反時計回り) に下図に示す θ だけ回転した図形を C' とする。C' を表す式を求めよ。



以下、点 X を中心とした、角度 θ の回転移動（正の向き＝反時計回り) を $\rho_{X,\theta}$ と表すことにする。

問 5 (20) ： 図のように直角二等辺三角形 ABC の辺 BC の延長上に点 P をとり、AP を一辺とする直角二等辺三角形 APQ を考える。このとき、$CQ : BP$ を考えたい。

次の問いに答えよ。



1．$\phi = \rho_{B,-\frac{\pi}{2}} \circ \rho_{P,\frac{\pi}{2}}$ とおく。合同変換 ϕ による点 Q の移動先を求めよ。

2．ϕ は合同変換の分類上、どのような変換か。

3．合同変換 ϕ を用いて、$CQ : BP$ を求めよ。(ヒント：$\phi(P)$ はどこか？)

以上で１００点です。

問 6 （どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けているわけなんですが、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。そこで、問６として 何か書いて下さった方へ 返答するページを web 上に設けています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると 困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。