幾何学II (2011.07.29)

問題：

- 問 1(15) ： X,Y,Z は集合とし、写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

  1．「f が全射である」とはどういうことか。その定義を述べよ。

  2．「$g \circ f$ が全射ならば、g が全射である」が成り立つ。その証明が完成するように、次の空所 ($*$) を埋めよ。尚、2 か所の ($*$) には同じ内容が入る。

     任意の Z の元 c に対して、
     仮定より (　　$*$　　) となる $a \in X$ がある。
     このとき、$f(a) \in Y$ に対して、
     (　　$*$　　) なのだから、g は全射である。

- 問 2(20) ：V と W をベクトル空間とする。ベクトル空間 V の３つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ および、線形写像 $f : V \to W$ について、次の問いに答えよ。

  1．$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立であるとはどういうことか。定義を述べよ。

  2．$f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ が一次独立ならば、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立であることを示せ。

- 問 3(20) ：２つの町（Ａ町、Ｂ町）を行きかうタクシーの台数分布の推移をモデル化する。

  ここではモデル化のため、時刻 t は０、１、２、... と離散的な値をとるとし、時刻 t におけるＡ町、Ｂ町のタクシーの台数を a_t, b_t とおく。また、a_t, b_t は実数とする。（自然数に限定しない）

  このとき、次のモデルを考えた。

  - ある時刻 t のＡ町にいるタクシーのうち、その $\frac{1}{3}$ が時刻 $t+1$ にはＢ町に移動。
  - ある時刻 t のＢ町にいるタクシーのうち、その $\frac{1}{2}$ が時刻 $t+1$ にはＡ町に移動。
  - 移動は同時に起こると考える。

  1．ベクトル (a_{t+1}, b_{t+1}) は、(a_t, b_t) にある行列 A をかけたものになる。A を求めよ。

  2．A の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ。

  3．$a_0 = b_0 = 500$ のとき、a_t, b_t の一般項を求めよ。

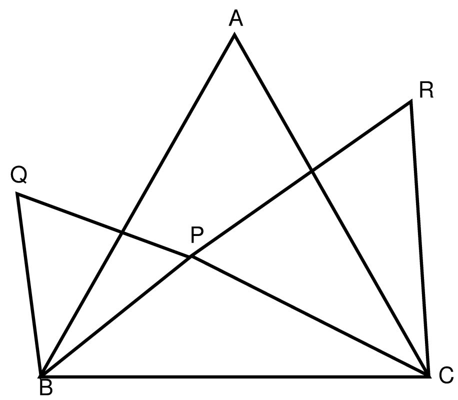
- 問 4(25) ： (x, y) に関する式 $x^2 + y^2 = 2(x+1)(y+1)$ で与えられる曲線 C を考える。

  1．この曲線 C を原点を中心として正の向き（反時計回り）に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した図形を C' とする。C' を表す式を求めよ。

  2．1. の結果をふまえて、C の概形を描け。

以下、点 X を中心とした、角度 θ の回転移動（正の向き＝反時計回り）を $\rho_{X,\theta}$ と表すことにする。

- 問 5(20) ： 図のように正三角形 ABC の内部に点 P があり、三角形 PBC の外側にそれぞれ PB, PC を一辺とする正三角形 PBQ, PCR がある。このとき、四角形 $PQAR$ が平行四辺形となることを示したい。次の問いに答えよ。



  1．$\phi = \rho_{P,-\frac{\pi}{3}} \circ \rho_{C,\frac{\pi}{3}}$ とおく。合同変換 ϕ による点 A の移動先を求めよ。

  2．ϕ は合同変換の分類上、どのような変換か。

  3．合同変換 ϕ を用いて、四角形 $PQAR$ が平行四辺形となることを示せ。

- 以上で１００点です。

- 問６：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けているわけなんですが、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。そこで、問６として 何か書いて下さった方へ 返答するページを web 上に設けています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると 困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。