幾何学 II (2010.07.23)

問題：

- 問 1(15) ： A,B は集合とし、写像 $f : A \to B$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

  1．「f が全射である」とはどういうことか。その定義を述べよ。

  2．A の部分集合 S に対して、$f^{-1}(f(S)) \supset S$ が成り立つ。このことの証明が完成するように、次の空所 ($*$) を埋めよ。尚、2 か所の ($*$) には同じ内容が入る。

     任意の S の元 x に対して、(　　$*$　　) を示せばよい。実際、S の元 x は、$f(x) \in f(S)$ となることから、(　　$*$　　) を満たすことが分かる。

- 問 2(20) ： ベクトル空間 V の 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が、V の基底であるとき、次の問いに答えよ。

  1．$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ が一次独立であることを示せ。

  2．$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ が V を生成することを示せ。

- 問 3(20) ： $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f が、2 つの固有値 1 と 2 をもち、固有値 1 に対する固有ベクトル $\mathbf{a}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、固有値 2 に対する固有ベクトル $\mathbf{b}$ が $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるという。

  1．f を表す行列 A を求めよ。

  2．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の 1 次結合であらわせ。

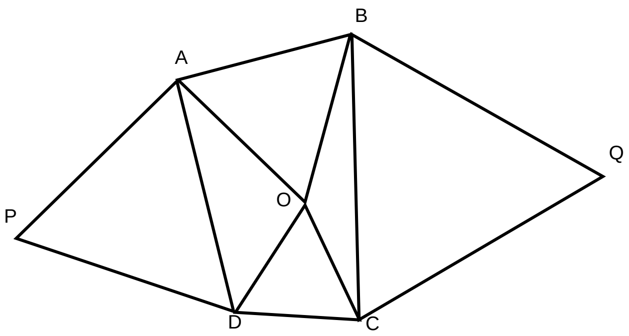
  3．$f^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n の式で表せ。

- 問 4(25) ： (x, y) に関する式 $x^2 + axy + y^2 + 1 = 0$ で与えられる曲線 C を考える。

  1．この曲線 C を原点を中心として正の向き（反時計回り）に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した図形を C' とする。C' を表す式を求めよ。
  2．C が空集合となる a の範囲を求めよ。
  3．$a = \frac{5}{2}$ のときの、C の概形を描け。

以下、頂点 X に関する角度 θ の正の向き (反時計回り) の回転移動を $\rho_{X,\theta}$ と表すことにする。

- 問 5(20) ： 図のように４つの正三角形 $OAB,\ OCD,\ PDA$ および QBC があり、頂点 O,A,B,C,D は２つの正三角形で共有されている。このとき、頂点 O が PQ の中点に一致することを示したい。次の問いに答えよ。



  1．$\phi = \rho_{D,\frac{\pi}{3}}\rho_{O,\frac{\pi}{3}}\rho_{C,\frac{\pi}{3}}$ とおく。ϕ は合同変換の分類上、どのような変換か。
  2．合同変換 ϕ による点 Q、点 O の移動先を求めよ。
  3．O は PQ の中点であることを示せ。

- 以上で１００点です。
- 問６：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けているわけなんですが、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。そこで、問６として 何か書いて下さった方へ 返答するページを web 上に設けています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると 困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。