

幾何学 II (2006.07.20)

問題：

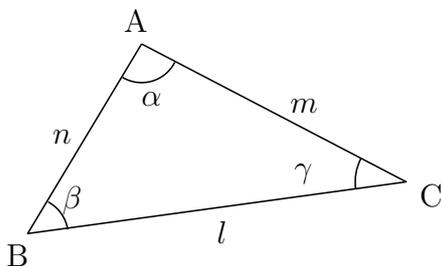
- 問 1(14) : X, Y は集合とし、写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。
 1. f が単射であるとはどういうことか。その定義を述べよ。
 2. f が全射であるとはどういうことか。その定義を述べよ。

- 問 2(16) : ベクトル空間 V, W および、線形写像 $f: V \rightarrow W$ を考える。 V の3つのベクトルの組 a, b, c に対して、次の問いに答えよ。
 1. a, b, c が一次従属ならば、 $f(a), f(b), f(c)$ が一次従属となることを示せ。
 2. $f(a), f(b), f(c)$ が一次独立ならば、 a, b, c が一次独立であることを示せ。

- 問 3(25) : 式 $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 1$ で与えられる2次曲線 Q が、4点 $(\frac{1}{2}, 0), (1, 0), (0, \frac{1}{2}), (0, 1)$ を通るとする。
 1. a, b, d, e を求めよ。
 2. Q を原点を中心として正の向きに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた図形を Q' とする。 Q' の式を求めよ。
 3. Q が放物線となるときの c の値、およびそのときの Q' の式を求めよ。

以下、頂点 X に関する角度 θ の正の向き (反時計回り) の回転移動を $R_{X,\theta}$ 、直線 a に関する鏡映変換を S_a と表すことにする。

- 問 4(20) : 図のように、三角形 ABC において各頂点 A, B, C の内角を α, β, γ とする。また、頂点 A, B, C の対辺を延長した直線をそれぞれ l, m, n とする。



- $S_l S_m$ はどのような変換か?
 - $R_{A,2\alpha} R_{B,2\beta} R_{C,2\gamma}$ はどのような変換か?
- 問 5(25) : 今 2 つの壺 A と壺 B があり、壺 A に 1 単位の液体が入っていて、壺 B は空である。このあと 以下の操作 t を繰り返し行う。

操作 t :

「壺 A の中身の半分を壺 B に移したあと、壺 B の中身の半分を壺 A へ移す。」

初期状態から 上の操作を n 回繰り返したあとの壺 A、壺 B の中身の量を a_n, b_n とおく。たとえば、 $(a_0, b_0) = (1, 0)$ 、 $(a_1, b_1) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ である。

- 壺 A, B にそれぞれ x, y の量がいっているとき、操作 t を行ったあとの 2 つの壺の含量をそれぞれ X, Y とする。 X, Y を x, y で表せ。
 - 上の結果から、1. の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ へ移す写像は線形写像であることがわかる。この写像の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。
 - a_n, b_n を n の式で表せ。また、 a_n は n が大きくなるとき、いくつに収束するか?
- 以上で 100 点です。
 - 問 6 : (どれもさっぱり分からんという人のために) 何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として問 6 を上記のように設けているわけなんですけど、問 6 に私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。ところが授業が終わってしまうため返答することが出来ずにいました。数年前から (全てではありませんが) 問 6 として何か書いて下さった方へ返答するページを web 上に設けています。その際、自分が問 6 に書いた内容を web に引用されると困るというひとはその旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。