

幾何学 II (2003.07.31)

問題：

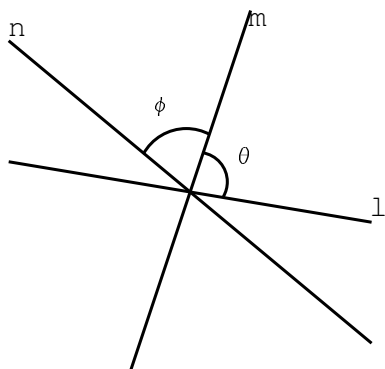
- 問1 (15)：あるクラスの生徒全体の集合を X とし、彼らの名字全体の集合を N とする。また、 $f: X \rightarrow N$ を生徒 x に対して、その生徒の名字を対応させる写像としよう。 B, G, M をそれぞれ X のうち 男子生徒の集合、女子生徒の集合、ふだん眼鏡をかけている生徒の集合とする。
 1. $f(G)$ の定義を、集合の記法で書きなさい。
 2. 「 $B \cap f^{-1}f(G)$ は空集合」は正しいか？
 3. 「 $f(B) \cap f(M) \neq \emptyset$ ならば、 $B \cap M \neq \emptyset$ 」は正しいか？

- 問2 (15)：ベクトル空間 V, W および、線形写像 $f: V \rightarrow W$ を考える。また、 V の2つのベクトルの組 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は V の基底であるとする。
 1. $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ が一次独立であるとき、 f が単射であることを示せ。
 2. $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ が W を生成するとき、 f が全射であることを示せ。

- 問3 (25)：式 $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 1$ で与えられる2次曲線 Q が、4点 $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$ を通るとする。
 1. a, b, d, e を求めよ。
 2. Q を正の向きに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた図形を Q' とする。 Q' の式を求めよ。
 3. さらに曲線 Q が点 $A(p, \frac{6}{p})(p > 0)$ を通るとする。 Q が楕円となる p の範囲を求めよ。

試験の後 <http://www1.ttcn.ne.jp/~a-nishi/applet/conic.html> を見に行くと楽しいかも。

- 問4 (25)：図のように3直線 l, m, n が一点で交わっており、 l と m のなす角を θ 、 m と n のなす角を ϕ とする。また、 l に関する鏡映を α 、 m に関する鏡映を β 、 n に関する鏡映を γ とする。



1. $\alpha\beta$ はどのような変換か？
 2. $\gamma\alpha$ 、 $\beta\gamma$ はどのような変換か？
 3. $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ はどのような変換か？
- 問5 (20)：線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を行列 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ で表される線形写像とする。
 1. $f(\mathbf{a}) = \frac{2}{3}\mathbf{a}$ 、 $f(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ となる 0 でないベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ を 1 つ求めよ。
 2. ベクトル (x, y) を $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ の一次結合で表せ。
 3. どんなベクトルも $f(f(f(\cdots f(x, y))\cdots)))$ と f を繰り返し施して行くと、0 ベクトルに収束することを示せ。
 - 以上で 100 点です。
 - 問6：(どれもさっぱり分からんという人のために) 何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として問6を上記のように設けているわけなんですが、問6に私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。ところが授業が終わってしまうため返答することが出来ずにいました。昨年度から（全てではありませんが）問6として何か書いて下さった方へ返答するページをweb上に設けています。その際、自分が問6に書いた内容をwebに引用されると困るというひとはその旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。