

幾何学 II (2003.07.17)

問題：

- 問1 (15) : X, Y は集合、 $f : X \rightarrow Y$ を写像とする。このとき、つぎの各問いに答えよ。

1. $A \subset X$ とする。次の に入る条件を書け。

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ }\}$$

2. $B \subset Y$ とする。次の に入る条件を書け。

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ }\}$$

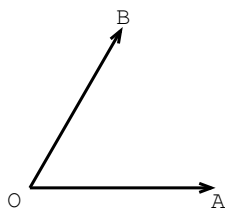
- 問2 (15) : ベクトル空間 V, W および、線形写像 $f : V \rightarrow W$ を考える。 f が全単射で、 V の2つのベクトルの組 a, b が V の基底であるとき、 $f(a), f(b)$ も W の基底であることを示したい。

1. f が単射であることを用いて、 $f(a), f(b)$ が一次独立であることを示せ。
2. f が全射であることを用いて、 $f(a), f(b)$ が W を生成することを示せ。

- 問3 (25) : 式 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x \pm \sqrt{x^2 + 2})$ で与えられる曲線 S について調べたい。

1. S の式と同値な、根号を外した式を求めよ。
2. 曲線 S を 負の向きに (時計回りに) $\frac{\pi}{6}$ 回転させた曲線を S' とする。 S' の式を求めよ。

- 問4 (25) : 図の点 O, A, B は正三角形の頂点の位置にある。 $\overrightarrow{OA}$ に沿った平行移動を τ 、 O を中心として、点 A を点 B に移す回転移動を ρ とする。また、 $\overrightarrow{OB}$ に沿った平行移動を τ' とおく。



1. $\rho\tau\rho^{-1}(O)$ 、 $\rho\tau\rho^{-1}(A)$ 、 $\rho\tau\rho^{-1}(B)$ を図示せよ。
 2. $\rho\tau'\rho^{-1}(O)$ 、 $\rho\tau'\rho^{-1}(A)$ 、 $\rho\tau'\rho^{-1}(B)$ を図示せよ。
 3. $\rho\tau^n = \tau'^n\rho$ 、および $\rho\tau'^n = \tau^{-n}\tau'^n\rho$ 、を示せ。
 4. ρ と τ 、および それらの逆写像を 適当な順番で合成した写像はかならず $\tau^n\tau'^m\rho^l$ の形に表されることを合成の回数による数学的帰納法で示せ。
- 問5 (20) : 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(x, y) = (y, 2x + y)$ で定める。
 1. $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$ 、 $f(\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$ となる 0 でないベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ を 1 つ求めよ。
 2. ベクトル $(1, 1)$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の一次結合で表せ。
 3. $f(f(f(\cdots f(1, 1))\cdots)))$ と $(1, 1)$ に f を 100 回施したベクトルを 求めよ。
 - 以上で 100 点です。
 - 問6 : (どれもさっぱり分からんという人のために) 何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問6 を上記のように 設けているわけなんですけど、問6 に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。ところが 授業が終ってしまうため 返答することが出来ずにいました。昨年度から (全てではありませんが) 問6 として 何か書いて下さった方へ 返答するページを web 上に設けています。その際、自分が問6 に書いた内容を web に引用されると 困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。