

幾何学 II (2003.02.24)

問題：

- 問1 (20) : つぎの写像のそれぞれは 単射か、また全射か、調べよ。

$$\begin{array}{ccc} 1. f: \{1, 2, 3, 4, 5\} & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & x \text{ の約数の個数} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2. f: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3. f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + y, 2x + 3y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 4. f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & (x, x) \end{array}$$

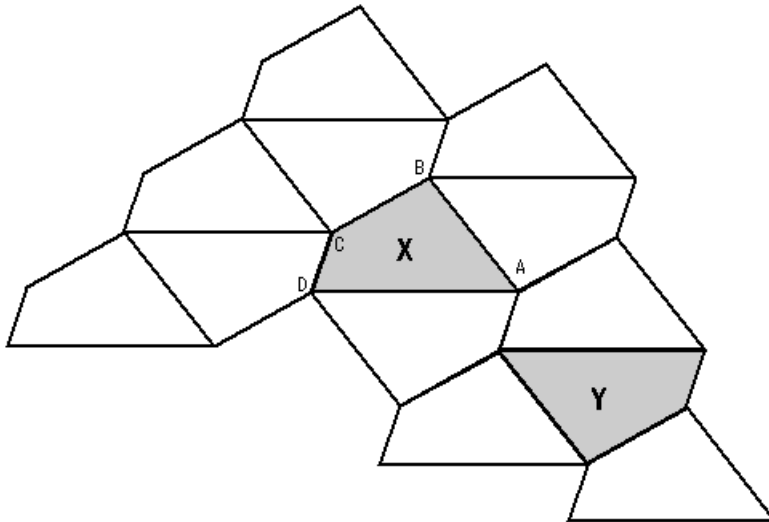
- 問2 (15) : ベクトル空間 V, W および、線形写像 $f: V \rightarrow W$ を考える。 f が全単射で、 V の2つのベクトルの組 \mathbf{a}, \mathbf{b} が V の基底であるとき、 $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ も W の基底であることを示したい。

1. f が単射であることを用いて、 $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ が一次独立であることを示せ。
2. f が全射であることを用いて、 $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ が W を生成することを示せ。

- 問3 (25) : 式 $y^2 - 3x^2 = a$ (a は0でない実数) で与えられる曲線 S を原点を中心として時計回りに $\frac{\pi}{6}$ 回転させた曲線 S' について調べたい。

1. $a > 0$ のときの S の概略図を描け。
2. S' の式を求めよ。
3. 曲線 S' が $(2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ を通るとき、 a の値をもとめよ。
また、そのとき S' の式を $y = (x \text{ の式})$ の形で表せ。

- 問4 (20) : 図のように合同な四角形が敷き詰められている。AB, BC, CD の中点をそれぞれ L, M, N とおき、L, M, N を中心として角度 π 回転させる合同変換を、それぞれ α, β, γ とする。
 1. $\beta\alpha(A), \beta\alpha(B), \beta\alpha(C), \beta\alpha(D)$ を図示せよ。
 2. $\gamma\beta(A), \gamma\beta(B), \gamma\beta(C), \gamma\beta(D)$ を図示せよ。
 3. 四角形 X を四角形 Y に移す合同変換を α, β, γ の合成で表せ。
(合成はどんな順番でもよいし、何度合成してもよい)



- 問5 (20) : 原点 O を中心とする正六角形 ABCDEF を考える。(頂点の名前は A から反時計回りに決める) また平面上の 1 次変換 f を考える。
 1. \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の 1 次結合で表せ。
 2. $f(A), f(B)$ の座標がそれぞれ $(1, 2), (3, 4)$ のとき、 $f(F)$ の座標を求めよ。
- 以上で 100 点です。
- 問6 :(どれもさっぱり分からんという人のために)何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として問6を上記のように設けているわけなんですけど、問6に私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。ところが授業が終わってしまうため返答することが出来ずにいました。今年は(すべてには無理かもしれませんが)問6として何か書いて下さった方へ返答するページをweb上に設けようと思っています。その際、自分が問6に書いた内容をwebに引用されると困るというひとはその旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。