

幾何学 II (2003.02.04)

問題：

- 問1 (20) : $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ とする。つぎの集合を (元を列挙する形で) 求めよ。
 1. $\{x \in X | \exists a \in X \text{ s.t. } x = a^2\}$
 2. $\{x \in X | \exists a \in X - \{1\}, \exists b \in X - \{1\}, \text{ s.t. } x = ab\}$
 3. $\{x \in X | \forall a \in X - \{1, 2, 3\}, \exists b \in X, \text{ s.t. } a = b + x\}$
 4. $\{x \in X | \forall a \in X, \forall b \in X \text{ に対して、} ab \text{ が } x \text{ の倍数なら } a \text{ が } x \text{ の倍数}\}$
- 問2 (15) : ベクトル空間 V を考える。 V の 2 つのベクトルの組 a, b が V の基底であるとき、 $a, a + b$ も V の基底であることを示したい。
 1. $a, a + b$ が一次独立であることを示せ。
 2. $a, a + b$ が V を生成することを示せ。
- 問3 (25) : $x^2 + axy + y^2 = 1$ (a は実数) で与えられる曲線 S について調べたい。
 1. 曲線 S を原点を中心として正の向きに角度 $\frac{\pi}{4}$ 回転させた曲線を S' とする。 S' を表す式を求めよ。
 2. 曲線 S' が楕円となるための a の範囲をもとめよ。
 3. $a = \frac{3}{2}$ のときの S の概略図を書け。
- 問4 (20) : いま平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。また、 BC, CA, AB を延長した直線をそれぞれ a, b, c とおき、直線 a, b, c に関する鏡映変換を それぞれ α, β, γ とする。
 1. $\gamma(C)$ を D とおく。 $\alpha\beta\gamma(A), \alpha\beta\gamma(B), \alpha\beta\gamma(D)$ を図示せよ。
 2. AB の中点と BC の中点を通る直線を l とおく。 $\alpha\beta\gamma$ は l に沿った並進鏡映であることを示せ。また、このとき 並進する距離はいくつか？
 3. $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ はどのような変換か？
- 問5 (20) : まず、座標平面上の点を原点に関して 正の方向に $\pi/2$ 回転させる一次変換を ρ とする。このとき、座標平面上の一次変換 f を次のように定める。すなわち、平面上の x に対して、 x 、原点、 $\rho(x)$ の 3 点を頂点に含む正方形を考える。この正方形のもう 1 つの頂点を $f(x)$ と定める。
 1. f を表す行列 A を求めよ。
 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ を計算し、 A^8 を求めよ。
- 以上で 1 0 0 点です。

- 問6 :(どれもさっぱり分からんという人のために)何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問6 を上記のように 設けているわけなんですが、問6 に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。ところが 授業が終わってしまうため 返答することが出来ずにいました。今年は (すべてには無理かもしれませんが) 問6 として 何か書いて下さった方へ 返答するページを web 上に設けようと思っています。その際、自分が問6 に書いた内容を web に引用されると 困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。