幾何学 I (2021.12.10)

以下の問いに答えよ。問いには授業で説明した公理および、定理を用いて解くこと。平面幾何学の体系性を重要視するため，体系への組み込みが済んでいない定理（例：面積に関する諸性質，円に関する諸定理，メネラウス・チェバの定理) を証明無しに用いることを認めない.

また，問題によっては，体系化の過程における定理の証明を求めるため，その定理によって証明される定理は使えない.

問１：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

人類は古くから幾何に関する考察をしてきたが，体系化された論証的学問としての地位を確立した古代ギリシア数学の集大成といえば，紀元前 300 年ごろに著された（　A　）である.

特に,（　A　）においては、（　B　）や（　C　）が、本論の証明や論理展開と切り分けられて導入されており，これにより幾何学の学問的体系化が意識されることとなった．しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もある.

それから 2000 年以上が過ぎた 1899 年、D. ヒルベルトは（　A　）をより精密化した「幾何学基礎論」を著した．(1)<u>その中での幾何学の展開では、（　B　）や（　C　）について、（　A　）と異る扱いがされており,</u> それにより幾何学が,「現実の図形」を対象とする自然科学から，論理的な議論のみを方法とする数理科学へと昇華されている.

一方で現在の中学校の教科書は，中学生の理解の過程や度合いに配慮して，厳密な体系化を避け，一部直観にも頼った局所的な体系化を行っている．そこでは，いくつかの「定理」を基本的な性質として「公理」的に扱うことで，証明を促す形をとっている．例えば，次の三角形の合同条件

三角形の合同条件：

三角形 ABC と三角形 A′B′C′ において，次のいずれかが成立すれば，三角形 ABC と三角形 A′B′C′ は合同である.

1. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$
2. $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle B = \angle B'$,
3. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$

は,「公理」であるかのように扱われているが，ヒルベルトの体系では，<u>証明されることである.</u>

1. 空欄（　A　）に入る数学書の名前, および,（　B　）と（　C　）に入る適切な用語を答えなさい。
2. 下線部 (1) に関して、どのように異るのか述べなさい。
3. 下線部 (2) について、囲みなかの「三角形の合同条件」の「１．が成り立てば△ ABC ≡△ A′B′C′.」ということを用いて,「２．の条件が成り立てば，△ ABC ≡△ A′B′C′.」を証明しなさい．角の移動の公理等，講義で扱った公理は用いてよい.

   なお,「２つの三角形が合同である」とは，対応する辺と角がすべて等しいこととする.

問２：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

中学校の教科書（「新しい数学３」東京書籍，令和２年検定）をみると,「三角形の相似」や「平行線と比」に関する内容は次のように扱われている.

- まず,「形を変えずに一定の割合で拡大あるいは縮小した図形」を互いに相似であると定義する.
- その後，ある図形を，固定された１点を中心として拡大・縮小した図形どうしを「相似の位置にある」と定義し，相似関係の特別な場合として取り上げている.
- そして,「相似な図形では対応する辺の比が等しい」ことを証明無しに用いる.
- 次に，<u>いわゆる３つの「三角形の相似条件」</u>(1) を説明している.
- 上記の相似に関する内容の取り扱いが終わった後で，三角形 ABC の AB,AC 上の点をそれぞれ点 D，E とするとき，

  $$DE//BC \text{ ならば}, AD : AB = AE : AC \quad (\text{これを定理 } A \text{ とする})$$

  また，

  $$AD : AB = AE : AC \text{ ならば}, DE//BC \quad (\text{これを定理 } B \text{ とする})$$

  ということを，三角形の相似を用いて証明している.
- 上記の定理の特別な場合として，中点連結定理を示す.

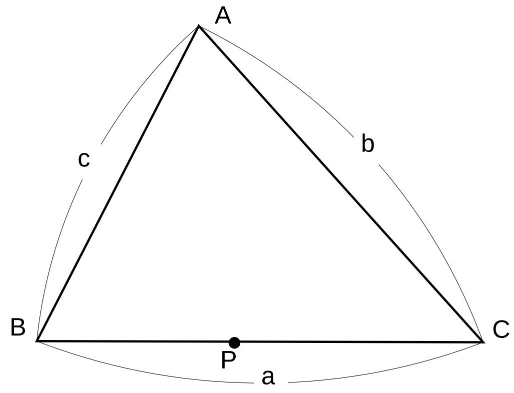
上記の教科書の説明を厳密に考えると,「相似の定義が曖昧」「なぜ相似な図形の対応する辺の比が常に等しいのか証明されていない」といった問題が生じている．実際に，厳密に相似や「平行線と比の関係」について体系化を行うためには，むしろ，中点連結定理を起点として，定理 A，定理 B を相似を用いずに証明する．その後,「相似の位置にある」という概念を用いて,「相似」を定義し，定理 A を用いて相似な図形の性質や三角形の相似条件を証明するのである.

1. 本講義では上記の問題を解決するために，厳密な「相似」の定義を行った.「２つの平面図形 F と G が相似である」とはどういうことか，その定義を述べよ．ただし,「相似の位置にある」という用語を用いてよい.
2. 下線部 (1) の一つに「２つの三角形の，対応する角の大きさが全て等しい」という条件がある．この条件が満たされれば，２つの三角形が相似になることを，1. で答えた相似の定義にもとづき，公理，文章中の定理 A や定理 B および，問 1 にある三角形の合同条件を用いて証明せよ.

問３：平行線に関する次の問いに答えよ.

1. 「２直線 ℓ と m が平行である」ことの定義を答えよ.
2. 「平行線の公理」とは何か答えよ.
3. 「たがいに異なる３つの直線 ℓ, m, n について，直線 ℓ と m は平行であるとする．このとき，直線 n が ℓ に交わるなら，直線 n は m とも交わる」ことを，公理のみを用いて証明せよ.

問４：鋭角三角形 ABC において，BC の長さを a，CA の長さを b，AB の長さを c とする．また，辺 BC 上にある点 P を考える．

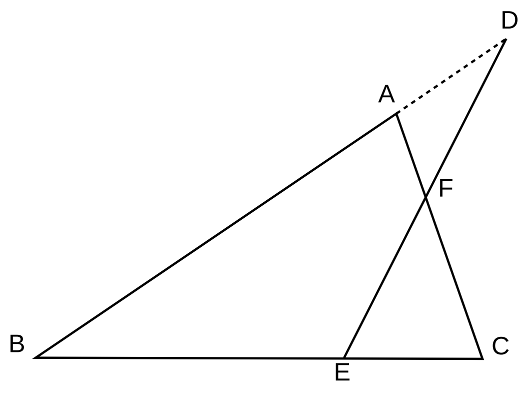


1. AP と BC が直角であるとき，$\mathrm{BP} - \mathrm{PC} = \frac{c^2 - b^2}{a}$ となることを証明せよ．
2. 同一法を用いて，$\mathrm{BP} - \mathrm{PC} = \frac{c^2 - b^2}{a}$ となるとき，AP と BC が直角であることを証明せよ．

問５：三角形 ABC において，AB の A 側の延長上に点 D，辺 BC 上に点 E があり，DE と AC の交点を F とする．このとき，F が DE の中点であるならば，

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AD} = \mathrm{BC} : \mathrm{CE}$$

となることを証明せよ．



※ 補助線をひいて，次のような形を考えましょう．補助線の「とりかた」に注意．