

幾何学 I (2020.11.27)

以下の問いに答えよ。問いには授業で説明した公理および、定理を用いて解くこと。平面幾何学の体系性を重要視するため、体系への組み込みが済んでいない定理（例：チェバの定理、メネラウスの定理、円に関する諸定理など）を証明無しに用いることを認めない。

問 1：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

人類は古くから幾何に関する考察をしてきたが、紀元前 300 年頃に著されたユークリッドの原論においては、(A) や (B) が、本論の証明や論理展開と切り分けられて導入されており、これにより幾何学の学問的体系化が意識されることとなった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もある。

それから 2000 年以上が過ぎた 1899 年、(C) はユークリッド原論をより精密化した「幾何学基礎論」を著した。⁽¹⁾その中で幾何学の展開では、基本的な定義や公理について、ユークリッド言論と異なる扱いがされており、それにより幾何学が、「現実の図形」を対象とする自然科学から、論理的な議論のみを方法とする数理科学へと昇華されている。

一方で現在の中学校の教科書は、中学生の理解の過程や度合いに配慮して、厳密な体系化を避け、一部直観にも頼った局所的な体系化を行っている。そこでは、いくつかの「定理」を基本的な性質として「公理」的に扱うことで、証明を促す形をとっている。例えば、次の平行線と錯角の関係：

- (i) 2 直線に 1 つの直線が交わるとき、2 直線が平行ならば、錯角は等しい。
- (ii) 2 直線に 1 つの直線が交わるとき、錯角が等しければ、2 直線が平行である。

は、証明を行うときに使える基本的な性質として、公理のように用いられる。

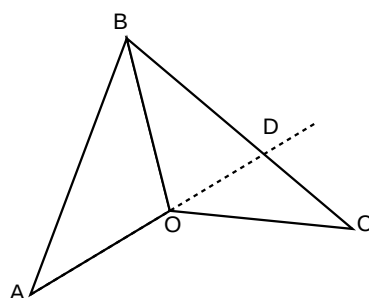
1. 空欄 (A), (B) に入る用語、空欄 (C) に入る人名を答えなさい。
2. 下線部 (1) に関して、どのように異なるのか述べなさい。
3. 文章中の平行線と錯角に関する性質 (i) と (ii) のうち、一方は、次の平行線の公理

直線 l 上にない点 A に対し、点 A を通る l の平行線は 2 本以上存在しない。

を用いずに証明できる。それはどちらか、答えよ。

問 2：下図において、 $OA=OB=OC$ かつ、 $AB=BC$ であるとする。また、 OA の延長が BC と交わる点を D とする。 $OD=4$, $BD=6$ であるとき、

1. OA の長さを求めよ。
2. AB の長さを求めよ。



問3：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

中学校の教科書（「新編 新しい数学3」東京書籍，平成27検定）をみると，「三角形の相似」や「平行線と比」に関する内容は次のように扱われている。

- － まず，「形を変えずに一定の割合で拡大あるいは縮小した図形」を互いに相似であると定義する。
- － その後，ある図形を，固定された1点を中心として拡大・縮小した図形どうしを「相似の位置にある」と定義し，相似関係の特別な場合として取り上げている。
- － そして，「相似な図形では対応する辺の比が等しい」ことを証明無しに用いる。
- － 次に，いわゆる3つの「三角形の相似条件」₍₁₎を説明している。
- － 上記の相似に関する内容の取り扱いが終わった後で，三角形ABCのAB, AC上の点をそれぞれ点D, Eとするととき，

$$DE//BC \text{ ならば, } AD:AB = AE:AC \text{ (これを定理 A とする)}$$

また，

$$AD:AB = AE:AC \text{ ならば, } DE//BC \text{ (これを定理 B とする)}$$

ということを，三角形の相似を用いて証明している。

- － 上記の定理の特別な場合として，中点連結定理を示す。

上記の教科書の説明を厳密に考えると，「相似の定義が曖昧」「なぜ相似な図形の対応する辺の比が常に等しいのか証明されていない」といった問題が生じている。実際に，厳密に相似や「平行線と比の関係」について体系化を行うためには，むしろ，中点連結定理を起点として，定理A，定理Bを相似を用いずに証明する。その後，「相似の位置にある」という概念を用いて，「相似」を定義し，定理Aを用いて相似な図形の性質や三角形の相似条件を証明するのである。

1. 本講義では上記の問題を解決するために，厳密な「相似」の定義を行った。「2つの平面図形FとGが相似である」とはどういうことか，その定義を述べよ。ただし，「相似の位置にある」という用語を用いてよい。
2. 下線部(1)の一つに「2つの三角形の，対応する辺の比が全て等しい」という条件がある。この条件が満たされれば，2つの三角形が相似になることを，1.で答えた相似の定義にもとづき，公理，文章中の定理Aや定理Bおよび，三角形の合同条件を用いて証明せよ。

問4：三角形ABCの辺AB，AC上にそれぞれ点D，点Eがあり， $DE//BC$ である。また，BCの中点をMとする。

1. Mを通る直線*l*が，Aを通るならば，DEの中点を通ることを証明せよ。
2. 1.の結果を用いて，「Mを通る直線*l*が，DEの中点を通るならば，点Aを通る」ことを同一法を用いて証明せよ。

問5：次の命題は正しいか，誤りか。正しければ証明し，誤りであれば反例を示せ。

AB=ACの二等辺三角形ABCにおいて，ABのA側の延長上に点Dを，ACのA側の延長上に点Eをとった。EB=DCであるとき， $\angle D = \angle E$ となる。