

幾何学 I (後半) (2020.02.07)

以下の問いに答えよ。

問 1 : 次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

中学校の教科書(「新編 新しい数学 3」東京書籍, 平成 27 検定)をみると,「三角形の相似」や「平行線と比」に関する内容は次のように扱われている。

- まず,「形を変えずに一定の割合で拡大あるいは縮小した図形」を互いに相似であると定義する。
- その後,ある図形を,固定された 1 点を中心として拡大・縮小した図形どうしを「相似の位置にある」と定義し,相似関係の特別な場合として取り上げている。
- そして,「相似な図形では対応する辺の比が等しい」ことを証明無しに用いる。
- 次に,いわゆる 3 つの「三角形の相似条件」₍₁₎を説明している。
- 上記の相似に関する内容の取り扱いが終わった後で,三角形 ABC の AB,AC 上の点をそれぞれ点 D, E とするとき,

$$DE//BC \text{ ならば, } AD : AB = AE : AC$$

また,

$$AD : AB = AE : AC \text{ ならば, } DE//BC$$

という定理(定理 A とする)を,三角形の相似を用いて証明している。

- 上記の定理の特別な場合として,中点連結定理を示す。

上記の教科書の説明を厳密に考えると,「相似の定義が曖昧」「なぜ相似な図形の対応する辺の比が常に等しいのか証明されていない」といった問題が生じている。実際に,厳密に相似や「平行線と比の関係」について体系化を行うためには,むしろ,中点連結定理を起点として,定理 A を相似を用いずに証明する。その後,「相似の位置にある」という概念を用いて,「相似」を定義し,定理 A を用いて相似な図形の性質や三角形の相似条件を証明するのである。

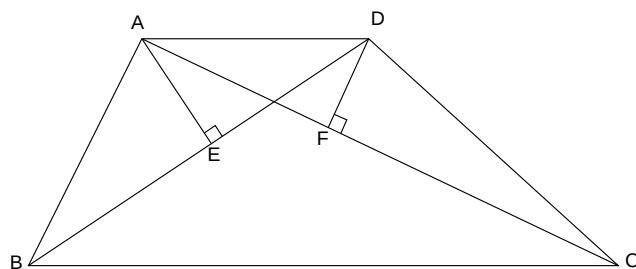
1. 本講義では上記の問題を解決するために,厳密な「相似」の定義を行った。「2 つの平面図形 F と G が相似である」とはどういうことか,その定義を述べよ。ただし,「相似の位置にある」という用語を用いてよい。
2. 下線部 (1) の一つに「2 つの三角形の,対応する 2 組の角が等しい」という条件がある。この条件が満たされれば,2 つの三角形が相似になることを,1. で答えた相似の定義にもとづき,公理,文章中の定理 A および,三角形の合同条件を用いて証明せよ。

問2：「中点連結定理の逆」とは、次のような定理である。

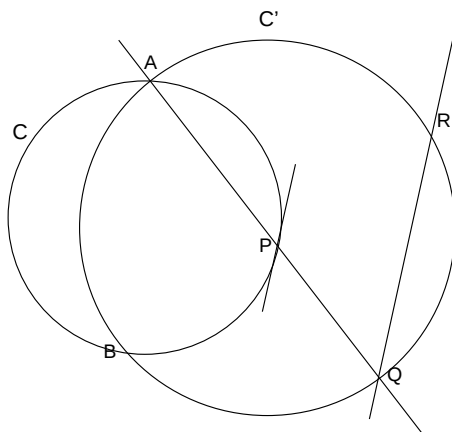
三角形 ABC の AB の中点を M とし、 M を通り BC に平行な直線と AC との交点を N とすると、 $AN=NC$ となる。

いま中点連結定理はすでに証明されているとする。このとき、「中点連結定理の逆」を、中点連結定理を用いて、一致法により証明せよ。

問3：台形 $ABCD$ の頂点 A, D から、それぞれ対角線 DB, AC に垂線をひき、それぞれの垂線の足を E, F とする。このとき、点 B, E, F, C が同一円周上にあることを示せ。



問4：2円 C と C' が点 A と点 B で交わっている。いま C' の内部にある C 上の点 P をとり、直線 AP と円 C' の交点を Q とする (Q は点 A と異なる点)。また、点 Q を通り、点 P での円 C の接線と平行な直線を引き、この直線と円 C' との交点を R とする (R は点 Q と異なる点)。このとき、 B, P, R は同一直線上にあることを示せ。



問5：三角形 ABC の内心と外心が一致するとき、三角形 ABC は正三角形となることを示せ。