

幾何学 I (2019.11.22)

以下の問いに答えよ。問いには授業で説明した公理および、定理を用いて解くこと。平面幾何学の体系性を重要視するため、体系への組み込みが済んでいない定理（例：三角形の相似条件，三平方の定理，など長さの積や比を扱う定理）を証明無しに用いることを認めない。

問1：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

人類は古くから幾何に関する考察をしてきたが，紀元前 300 年ごろに著されたユークリッドの原論においては，（ A ）や（ B ）が，本論の証明や論理展開と切り分けられて導入されており，これにより幾何学の学問的体系化が意識されることとなった．しかし，その前提となる部分にも曖昧な説明が多く，厳密で精密な論理展開とはいえない部分もある．

それから 2000 年以上が過ぎた 1899 年，（ C ）はユークリッド原論をより精密化した「幾何学基礎論」を著した．(1) その中での幾何学の展開では，基本的な定義や公理について，ユークリッド言論と異なる扱いがされており，それにより幾何学が，「現実の図形」を対象とする自然科学から，論理的な議論のみを方法とする数理科学へと昇華されている．

一方で現在の中学校の教科書は，中学生の理解の過程や度合いに配慮して，厳密な体系化を避け，一部直観にも頼った局所的な体系化を行っている．そこでは，いくつかの「定理」を基本的な性質として「公理」的に扱うことで，証明を促す形をとっている．例えば，次の三角形の合同条件

——— 三角形の合同条件： ———

三角形 ABC と三角形 A'B'C' において，

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \angle B = \angle B'$$

ならば，三角形 ABC と三角形 A'B'C' は合同である

は，「公理」であるかのように扱われているが，（ C ）の体系では，次の「合同の公理」

——— 合同の公理： ———

三角形 ABC と三角形 A'B'C' において，

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \angle B = \angle B'$$

ならば， $\angle C = \angle C'$

等を用いて (2) 証明されることである．

1. 空欄（ A ），（ B ）に入る用語，空欄（ C ）に入る人名を答えなさい。
2. 下線部 (1) に関して，どのように異なるのか述べなさい。
3. 下線部 (2) について，実際に上に囲んだ「三角形の合同条件」の証明を述べなさい．ただし，三角形の合同とは，「対応するすべての辺と角の大きさが等しいこと」とし，角の移動の公理等，講義で扱った公理は用いてよい．

問2：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

M：「先生，平行四辺形の性質と平行四辺形となるための条件の違いがよくわかりません。」

T：「どれどれ」

M：「この命題をみてください。これは，平行四辺形の性質ですか，それとも平行四辺形になるための条件ですか」

命題

(a) 平行四辺形 ABCD において，(b) $\underline{AB=CD}$ かつ $\underline{BC=DA}$ ならば，(c) 四角形 ABCD は平行四辺形 である

T：「₍₁₎これは，おかしい命題だね。(中略)結局，高校で学習する言葉を使えば，中学校で学習する『平行四辺形の性質』というのは，平行四辺形であるための (X) 条件，『平行四辺形になるための条件』というのは，平行四辺形であるための (Y) 条件を述べたものということなんだよ」

1. 下線部 (1) について，どうしておかしいのか説明せよ。
2. 命題の中の，下線部 (a), (b), (c) のうち，1 か所だけを修正して，正しい命題にせよ。
3. 文章中の (X), (Y) には「必要」あるいは「十分」という言葉が入る。X,Y のそれぞれにはどちらの言葉が入るか答えよ。

問3：直線 l は，直線 m と n の両方に交わっている。このとき，錯角の関係にある2つの角を1組，言葉のみを用いて説明せよ。

(適宜，交点や直線上の点を取り，それにラベルを付して説明に用いてよい。ただし，「右」や「左」などの言葉はつかえないことに注意せよ。講義中で定義された数学的表現は，用いてよい)

問4：以下の命題を証明せよ。

1. (凸) 四角形 ABCD において，AB と CD が平行かつ長さが等しいとき，四角形 ABCD は平行四辺形となる。
2. 三角形 ABC において， $\angle B$ と $\angle C$ が等しいならば， $AB=AC$ である。

問5：次の命題は正しいか，誤りか。正しいければ証明し，誤りであれば反例を示せ。

四角形 ABCD は，2つの内角 $\angle A$ と $\angle C$ が等しく，対角線が点 M で直角に交わっている。
このとき， $AM = MC$ となる。