

幾何学 I (2017.7.18)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

問 1 : 次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

ユークリッドの原論においては、公理・公準や定義を、本論の証明や論理展開と切り放して導入した点が画期的であった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もあった。

19 世紀、(A) はユークリッド原論をより精密化した「幾何学基礎論」を著した。⁽¹⁾(A) の幾何学の展開では、公理や定義について、ユークリッドと異なる扱いがされている。(A) の平面幾何学の体系は素晴らしいものであるが、しかし、公理の独立性に関して厳密過ぎて、扱いにくい。ここではその幾何学の展開を少し扱いやすい形にして、述べよう。

まず、点や直線を (B) として導入し、公理により最低限の点の存在を仮定する。そして、結合の公理と呼ばれる公理群により、点が直線上にある、直線が点を通るといった関係について述べる。また、そのなかで、直線上に距離を用いた目盛りを導入すると論理の展開が容易になる。《1》

直線上に目盛り関数を導入すれば、線分や半直線が定義でき、これらを用いることで、2 点 A, B が直線の同じ側にある等が定義できるようになる。つまり、半平面が定義できるようになる。《2》

半平面を用いると、角領域を定義することができる。ここでは、角領域に対して、角度という概念も付与してしまおう。《3》

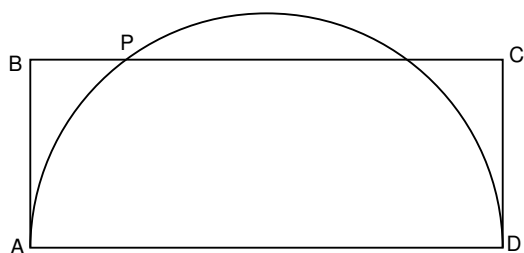
このあと、三角形の合同条件を用いて論理を展開したいのだが、何らかの公理を追加しなければ、3 つの三角形の合同条件の定理を証明していくことができない。そこで、角の移動の公理と、合同の公理を導入する。これにより、いわゆる 3 種の三角形の合同条件が証明できる。《4》

残る公理は ⁽²⁾ 平行線の公理 だけである。平行線の公理を導入することで、平面幾何の公理体系が完成する。《5》

ここまでがいわゆる「円論」と呼ばれる部分である。この後、極限操作などを含む、やや解析学的な扱いを経て、相似や面積を扱うことができるようになる。《6》

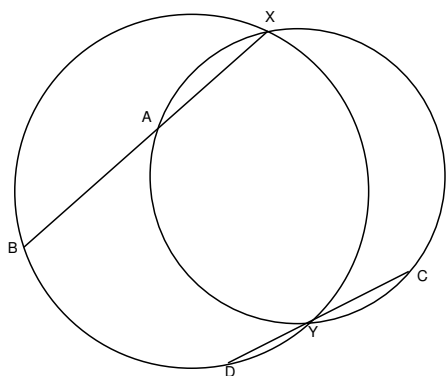
1. 空欄 (A) に入る人名を答えなさい。
2. 空欄 (B) に入る用語を答えなさい。
3. 下線部 (1) に関して、どのように異なるのか述べなさい。
4. 下線部 (2) について、「平行線の公理」の内容を述べなさい。
5. 次の (a)~(d) はそれぞれ、上記の文章の幾何学の展開において《1》から《5》のどの段階の後で証明できるようになりますか。「《1》のあと」というように番号で答えなさい。
 - (a) : 三平方の定理
 - (b) : 2 つの直線 l, l' に m が交わっているとき、錯角が等しければ、 l と l' は平行である。
 - (c) : 二等辺三角形の底角は等しい。

問2：長方形 ABCD と、AD を直径とする半円がある。BC と半円の交点の一つを図のように P とおく。AB=2, BP=1 のとき、半円の半径を求めよ。

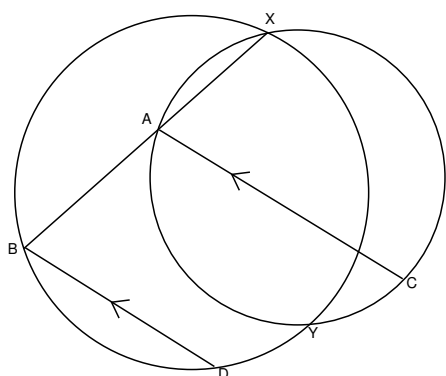


問3：2つの円が交点 X,Y で交わり、X を通る直線の2円との交点を A と B とする。ただし、A は X と B の間にある。

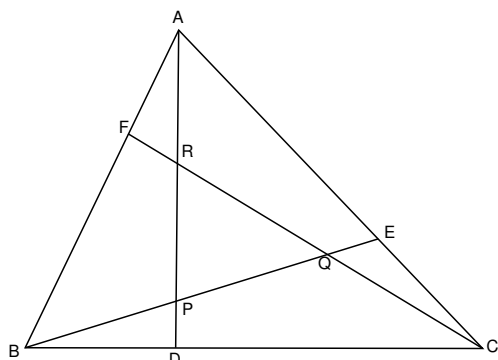
- さらに、Y を通る直線と2円との交点を C と D とする。(下図参照) ただし、Y は C と D の間にある。このとき、AC と BD は平行となることを示せ。



- 一方、A, B を通る平行線を引いて、A を通る平行線と弧 XY の交点を C, B を通る平行線と弧 BY の交点を D とする。(下図参照) このとき、C,Y,D が一直線上にあることを、一致法により示せ。

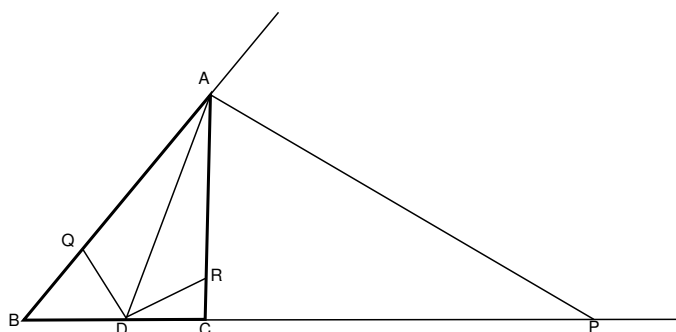


問4：三角形 ABC において、BC 上の B に近い 3 等分点を D、CA 上の C に近い 3 等分点を E、AB 上の A に近い 3 等分点を F とする。AD、BE、CF の 3 つの交点を図のように P、Q、R とする。



1. $AP : PD$ を求めよ.
2. $AR : RD$ を求めよ.

問5：三角形 ABC の頂点 A における外角二等分線と直線 BC の交点を P とする。
また、内角 A の二等分線と BC の交点を D とし、角 ADB および角 ADC の二等分線がそれぞれ AB、AC と交わる点を Q、R とする。



1. $AB:AC=BP:PC$ であることを証明せよ.
2. P,Q,R が 1 直線上にあることを示せ.

以上で 100 点（1 問 20 点）です。

問6：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問6 を上記のように 設けています。また、問6 に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さった方へ返答するページを web 上に設けており、なるべく、全てに返答しようとは思っています。その際、自分が問6 に書いた内容を web に引用されると困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。