幾何学 I (2013.7.30)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

問１：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

ユークリッドの原論においては、公理と定義を、本論の証明や論理展開と切り放して導入した点が画期的であった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もあった。

１９世紀、D. ヒルベルトは ユークリッド原論をより精密化した「幾何学基礎論」を著した。(1) ヒルベルトの幾何学の展開では、公理や定義について、ユークリッドと異る扱いがされている。 ヒルベルトの平面幾何学の体系は素晴らしいものであるが、しかし、ヒルベルトの公理系は独立性に関して厳密過ぎて、扱いにくい。ここではその幾何学の展開を少し扱いやすい形にして、述べよう。

まず、点や直線を (A) として導入し、公理により最低限の点の存在を仮定する。そして、結合の公理と呼ばれる公理群により、点が直線上にある、直線が点を通るといった関係について述べる。また、そのなかで、直線上に距離を用いた目盛りを導入すると論理の展開が容易になる。《１》

直線上に目盛り関数を導入すれば、線分や半直線が定義でき、これらを用いることで、２点 A, B が直線の同じ側にある等が定義できるようになる。つまり、半平面が定義できるようになる。《２》

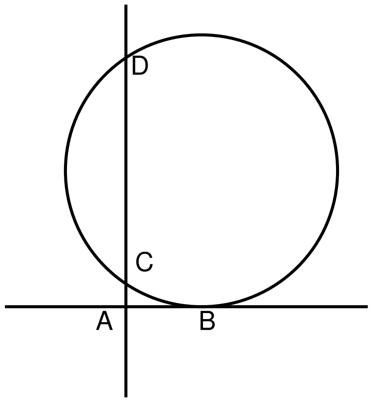
半平面を用いると、(2) 角領域を定義することができる。ここでは、角領域に対して、角度という概念も付与してしまおう。《３》

このあと、三角形の合同条件を用いて論理を展開したいのだが、何らかの公理を追加しなければ、３つの三角形の合同条件の定理を証明していくことができない。そこで、角の移動の公理と、合同の公理を導入する。これにより、いわゆる３種の三角形の合同条件が証明できる。《４》

残る公理は (3) 平行線の公理だけである。平行線の公理を導入することで、例えば三角形の内角の和が一定であることも証明出来るようになる。《５》

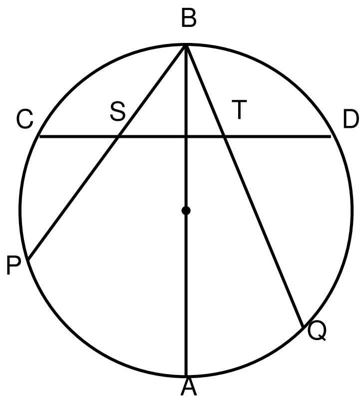
1. 空欄 (A) に入る用語を答えなさい。
2. 下線部 (1) に関して、どのように異るのか述べなさい。
3. 下線部 (2) について、実際に「３点 A, B, C に対して、(狭義の）角領域 $\angle ABC$」の定義とは何か、それ以前の段階で導入されている用語を用いて答えなさい。
4. 下線部 (3) について、「平行線の公理」の内容を述べなさい。
5. 次の (a)〜(d) はそれぞれ、上記の文章の幾何学の展開において《１》から《５》のどの段階の後で証明できるようになりますか。答えなさい。
   - (a) ：直線 l とそのうえにない点 A に対して、A から l への垂線をひくことができる。
   - (b) ：２つの直線 l,l' に m が交わっているとき、l と l' は平行であれば、錯角が等しい。
   - (c) ：２つの直線の交点は高々１つである。
   - (d) ：三角形の２辺の和は残り１辺より大きい。

問２：垂直な２直線 l と m が点 A で交わっている。さらにある円が l と点 B で接していて、m とは C, D で交わっている。$AB = 3$,$AC = 1$ のとき、円の半径を求めよ。

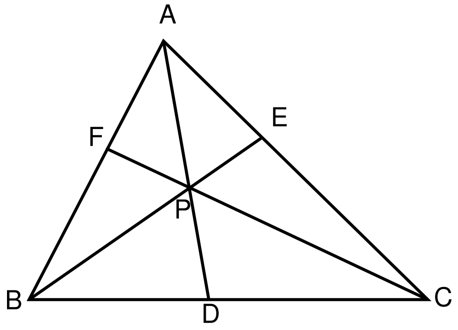


問３：

1. 接弦定理を述べよ。
2. AB を直径とする円の弦 CD を、CD と AB が垂直となるようにとる。このとき、弧 $\wideparen{CAD}$ 上の任意の２点 P, Q に対し、PB, QB が CD と交わる点をそれぞれ S,T とすると、P,Q,S,T が同一円周上にあることを示せ。

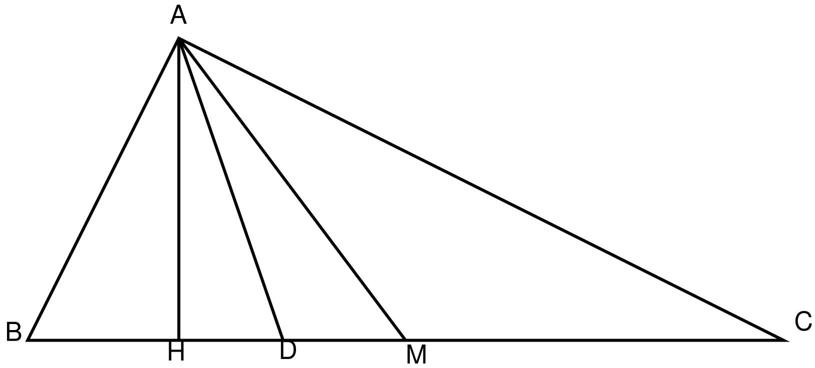


問４：三角形 ABC の内部に点 P をとり、AP, BP, CP の延長が対辺と交わる点をそれぞれ D, E, F とおいたところ、$BF : FA = 3 : 2$、$BP : PE = 2 : 1$ であった。



1. $AE : EC$ を求めよ。
2. $BD : DC$ を求めよ。
3. $FP : PC$ を求めよ。

問５：角 A が直角であるような直角三角形 ABC において、A から BC へ下した垂線の足を H、角 A の二等分線と BC との交点を D、BC の中点を M とする。



1. $MA = MC$ を示せ。
2. AD は角 HAM の２等分線となることを示せ。

以上で１００点（１問２０点）です。

問６：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けています。また、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さった方へ返答するページを web 上に設けており、なるべく、全てに返答しようとは思っています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。