

幾何学 I (2012.7.24)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

問1：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

ユークリッドの原論においては、論理展開の前提となる公理と定義を、本論の証明や論理展開と切り放して導入した点が画期的であった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もあった。

19世紀、(A)はユークリッド原論をより精密化した「幾何学基礎論」を著した。(A)の幾何学の展開では、(1) 公理や定義について、ユークリッドと異なる扱いがされている。(A)の構成した平面幾何学の体系は素晴らしいものであるが、距離を直接扱わないなど、やや厳密過ぎて、扱いにくい部分もある。ここではその幾何学の展開を少し扱いやすい形にして、述べよう。

まず、点や直線を(B)として導入し、予め最低限の点の存在を仮定する。そして、結合の公理と呼ばれる公理群により、点が直線上にある、直線が点を通るといった関係について述べる。また、そのなかで、直線上に距離を用いた目盛りを導入すると論理の展開が容易になる。《1》

直線上に目盛り関数を導入すれば、線分や半直線が定義でき、これらを用いることで、2点A, Bが直線の逆側にある等が定義できるようになる。つまり、半平面が定義できるようになる。《2》

半平面を用いると、角領域を定義することができる。ここでは、角領域に対して、角度という概念も付与してしまおう。《3》

このあと、三角形の合同条件を用いて論理を展開したいのだが、何らかの公理を追加しなければ、3つの三角形の合同条件の定理を証明していくことができない。そこで、角の移動の公理と、合同の公理を導入する。これにより、いわゆる3種の「三角形の合同条件」を証明できるようになる。《4》

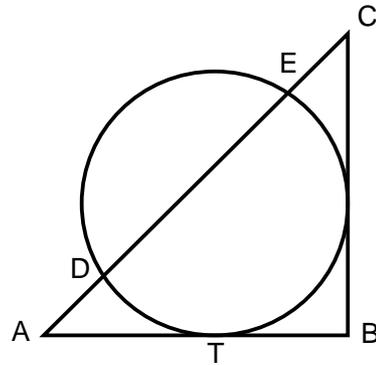
残る公理は平行線の公理だけである。平行線の公理を導入することで、平行線と錯角に関する性質などが証明出来るようになる。《5》

ここまでがいわゆる「円論」と呼ばれる部分である。この後、極限操作などを含む、やや解析学的な扱いを経て、相似や面積も扱うことができるようになる。《6》

1. (A)、(B)に入る人名と用語を答えよ。
2. 下線部(1)に関して、どのように異なるのか述べなさい。
3. 2直線 l, m に、直線 n が交わるときの2組の錯角を、図を使わずに文章だけで説明せよ。
4. 次に挙げる(a)~(d)のそれぞれについて、上記の文章に述べられた幾何学の展開における《1》から《6》のどの段階の後で証明できるようになるかを答えなさい。
 - (a)：三平方の定理。
 - (b) 直線 l, m に直線 n が交わるとき、 l, m が平行ならば、錯角が等しい。
 - (c) 直線 l, m に直線 n が交わるとき、錯角が等しければ、 l, m が平行である。
 - (d)：直線 l 上にない点Aに対し、Aから l への垂線が存在する。

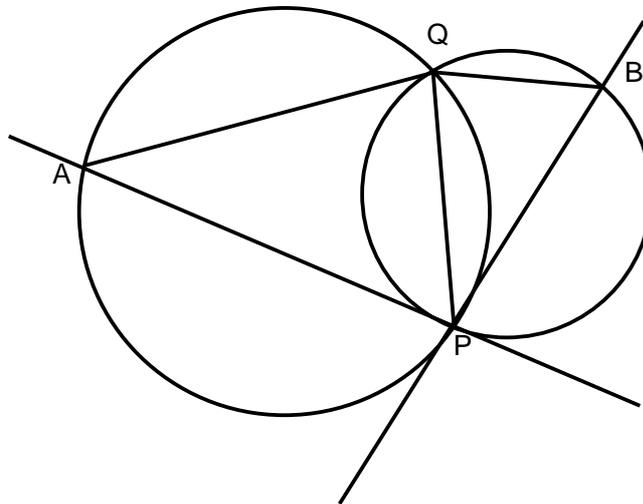
以下、図は必ずしも正確ではないことに注意せよ。

問2：図のように円が直角二等辺三角形 ABC の2辺と接しており、斜辺とは2点 D, E で交わっている。いま $AD = 1, DE = 3, EC = 1$ とするとき、円の半径を求めよ。

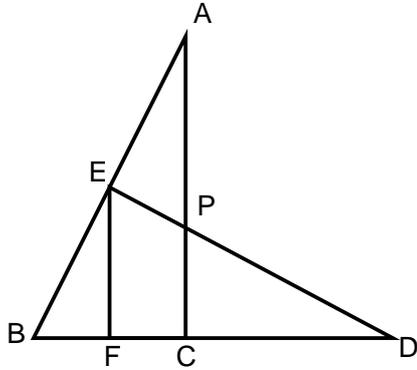


問3：

1. 接弦定理とはどのような定理か、図と共に述べよ。
2. 図のように2つの円が点 P, Q で交わっていて、点 P での2円の接線が、それぞれもう一方の円と A, B で交わっている。このとき、 $QA \cdot QB = PQ^2$ となることを示せ。

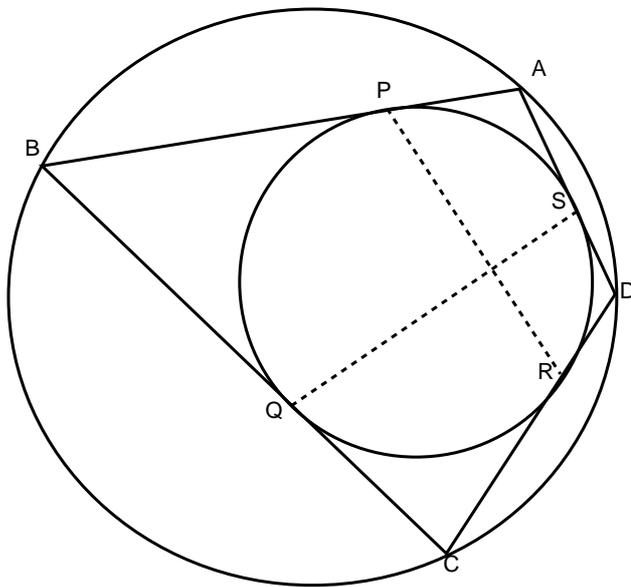


問4：図のように、互いに合同な2つの直角三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ を、 B, F, C, D が一直線上となるように、また、点 E が AB 上にくるように配置したところ、 E が AB の中点となった。このとき、 AC と DE の交点を P として次の問いに答えよ。



1. $AC : BC$ を求めよ。
2. $BC : CD$ を求めよ。
3. $EP : PD$ を求めよ。

問5：図のように四角形 $ABCD$ が円に外接し、かつ、円に内接している。四角形 $ABCD$ の内接円との接点を図のように P, Q, R, S とするとき、 PR と QS が直交することを示せ。



以上で100点(1問20点)です。

問6：(どれもさっぱり分からんという人のために)何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として問6を上記のように設けています。また、問6に私宛の要望、質問、その他を書いて下さった方へ返答するページをweb上に設けており、なるべく、全てに返答しようとは思っています。その際、自分が問6に書いた内容をwebに引用されると困るというひとはその旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。