幾何学 I (2009.8.4)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

問１：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

ユークリッドの原論においては、論理展開の前提となる公理と定義を、本論の証明や論理展開と切り放して導入した点が画期的であった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もあった。

１９世紀、D. ヒルベルトは ユークリッド原論をより精密化した「幾何学の基礎」を著した。(1) ヒルベルトの幾何学の展開では、公理や定義について、ユークリッドと異る扱いがされている。 ヒルベルトの平面幾何学の体系は素晴らしいものであるが、距離を直接扱わないなど、やや厳密過ぎて、扱いにくい部分もある。ここではその幾何学の展開を少し扱いやすい形にして、述べよう。

まず、点や直線を無定義用語として導入し、予め最低限の点の存在を仮定する。そして、結合の公理と呼ばれる公理群により、点が直線上にある、直線が点を通るといった関係について述べる。また、そのなかで、直線上に距離を用いた目盛りを導入すると論理の展開が容易になる。《１》

直線上に目盛り関数を導入すれば、線分や半直線が定義でき、(2) これらを用いることで、２点 A, B が直線の逆側にある等が定義できるようになる。つまり、半平面が定義できるようになる。《２》

半平面を用いると、角領域を定義することができる。ここでは、角領域に対して、角度という概念も付与してしまおう。《３》

このあと、三角形の合同条件を用いて論理を展開したいのだが、何らかの公理を追加しなければ、３つの三角形の合同条件の定理を証明していくことができない。そこで、角の移動の公理と、合同の公理を導入する。これにより、いわゆる３種の三角形の合同条件が証明できる。《４》

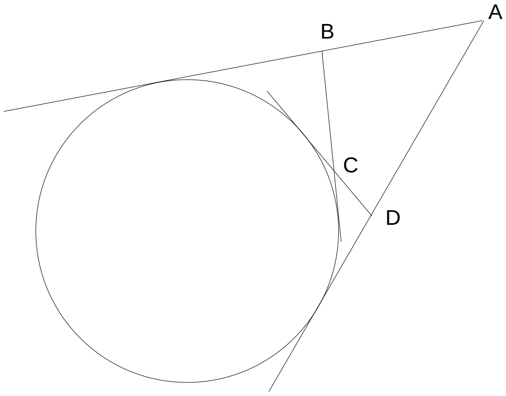
残る公理は平行線の公理だけである。(3) 平行線の公理を導入することで、平行な直線に対する錯角は等しいことが証明出来るようになる。《５》

ここまでがいわゆる「円論」と呼ばれる部分である。この後、極限操作などを含む、やや解析学的な扱いを経て、相似や面積を扱うことができるようになる。《６》

1. 下線部 (1) に関して、どのように異るのか述べなさい。
2. 下線部 (2) について、実際に「直線 l 上にない２点 A, B が、l に関して逆側にある」ことの定義をそれ以前の段階で導入されている用語を用いて定義しなさい。
3. 下線部 (3)「平行線の公理」の内容を書きなさい。
4. 次に挙げる (a)〜(d) のそれぞれについて、上記の文章に述べられた幾何学の展開における《１》から《６》のどの段階の後で証明できるようになるかを答えなさい。
   - (a) ：三角形の長い辺に対する角は、短い辺に対する角よりも大きい。
   - (b) ：三平方の定理。
   - (c) ：三角形の内角の和は１８０ °である。
   - (d) ：２直線の交点は、高々１つである。

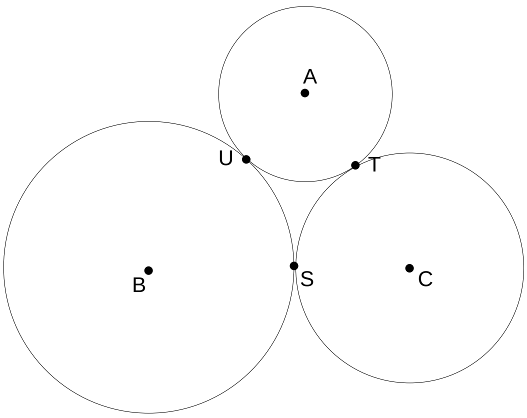
以下、図は必ずしも正確ではないことに注意せよ。

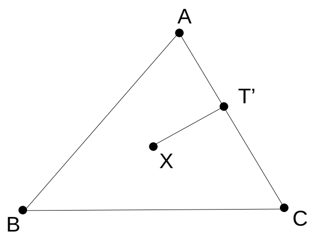
問２：図のように、四角形 $ABCD$ の外部に円があり、この円が四角形 $ABCD$ のすべての辺の延長と接している。このとき、$AB + BC = CD + DA$ であることを示せ。



問３：下の左図のように３つの円（それぞれ中心を A, B, C とする）が、接点 S, T, U で互いに接している。このとき、S, T, U のそれぞれの接点において、２円の共通接線をひくとき、これら３直線が１点で交わることを示したい。

三角形 ABC の３辺の長さを $AB = z$, $BC = x$, $CA = y$ とおく。





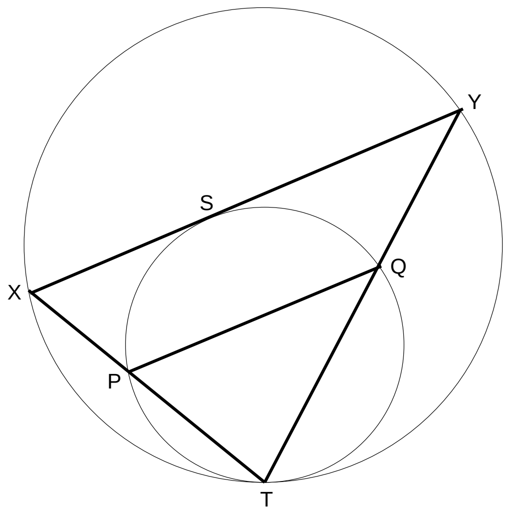
1. AT の長さを x, y, z を使って表せ。
2. 三角形 ABC の内心を X と表す (上の右図)。X から CA へ下ろした垂線の足を T' とする。AT' の長さを x, y, z を使って表せ。
3. 上記の結果を用いて、３つの共通接線が１点で交わることを示す、一致法（同一法）による証明を述べよ。

問４：

1. 三角形 ABC の CA を 2:1 に外分する点を X, AB を 2:1 に外分する点を Y とする。直線 XB と直線 YC の交点を P とするとき、$YP : PC$ を求めよ。
2. 三角形 ABC の CA を 2:1 に内分する点を X, AB を 2:1 に内分する点を Y とする。直線 XB と直線 YC の交点を P とするとき、$YP : PC$ を求めよ。

問５：

1. 接弦定理を、図と共に述べよ。
2. 図のように２つの円の一方が他方に含まれており、また、接点 T で接している。いま、点 S で接する小円の接線が大円と交わる点を X,Y とし、XT、YT の小円との交点をそれぞれ P、Q とする。



(a) XY と PQ が平行であることを示せ。

(b) SP と SQ の長さが等しいことを示せ。

以上で１００点（１問２０点）です。

問６：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けています。また、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さった方へ返答するページを web 上に設けており、なるべく、全てに返答しようとは思っています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。