幾何学 I (2005.7.15)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

問１：次の文章を読んで、後の問いに答えなさい。

ユークリッドの原論においては、公理と定義を、本論の証明や論理展開と切り放して導入した点が画期的であった。しかし、その前提となる部分にも曖昧な説明が多く、厳密で精密な論理展開とはいえない部分もあった。

１９世紀、D. ヒルベルトは ユークリッド原論をより精密化した「幾何学の基礎」を著した。(1) ヒルベルトの幾何学の展開では、公理や定義について、ユークリッドと異る扱いがされている。 ヒルベルトの平面幾何学の体系は素晴らしいものであるが、しかし、ヒルベルトの公理系は独立性に関して厳密過ぎて、扱いにくい。ここではその幾何学の展開を少し扱いやすい形にして、述べよう。

まず、点や直線を (A) として導入し、公理により最低限の点の存在を仮定する。そして、(B) の公理と呼ばれる公理群により、点が直線上にある、直線が点を通るといった関係について述べる。また、そのなかで、直線上に距離を用いた目盛りを導入すると論理の展開が容易になる。《１》

直線上に目盛り関数を導入すれば、線分や半直線が定義でき、(2) これらを用いることで、２点 A, B が直線の同じ側にある等が定義できるようになる。つまり、半平面が定義できるようになる。《２》

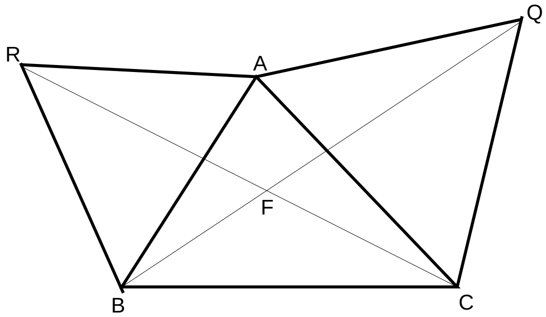
半平面を用いると、角領域を定義することができる。ここでは、角領域に対して、角度という概念も付与してしまおう。《３》

このあと、三角形の合同条件を用いて論理を展開したいのだが、何らかの公理を追加しなければ、３つの三角形の合同条件の定理を証明していくことができない。そこで、角の移動の公理と、合同の公理を導入する。これにより、いわゆる３種の三角形の合同条件が証明できる。《４》

残る公理は平行線の公理だけである。(3) 平行線の公理を導入することで、例えば三角形の内角の和が一定であることも証明出来るようになる。《５》

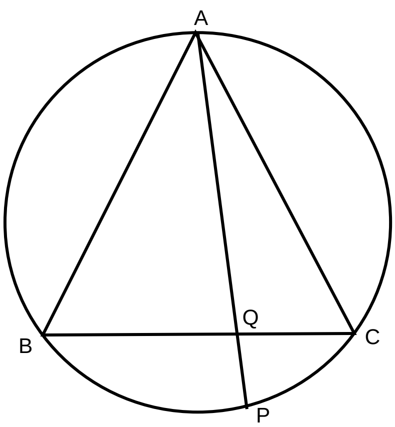
1. 空欄 (A)、(B) に入る用語を答えなさい。
2. 下線部 (1) に関して、どのように異るのか述べなさい。
3. 下線部 (2) について、実際に「２点 A, B が直線 l に関して同じ側にある」ことの定義をそれ以前の段階で導入されている用語を用いて定義しなさい。
4. 下線部 (3)「平行線の公理」の内容を書きなさい。
5. 次の (a)〜(e) はそれぞれ、上記の文章の幾何学の展開において《１》から《５》のどの段階の後で証明できるようになりますか。答えなさい。
   - (a) ：二等辺三角形の底角は等しい。
   - (b) ：直線 l とそのうえにない点 A に対して、A から l へ垂線を下ろすことが出来る。
   - (c) ：２つの直線 l, l' に m が交わっているとき、錯角が等しければ l と l' は平行である。
   - (d) ：対頂角は等しい。

問２：三角形 ABC の内角はすべて 120 °未満とする。図のように三角形 ABC の外側に、AB、AC を１辺として正三角形 RAB と QAC をつくる。また、RC と BQ の交点を F とする。

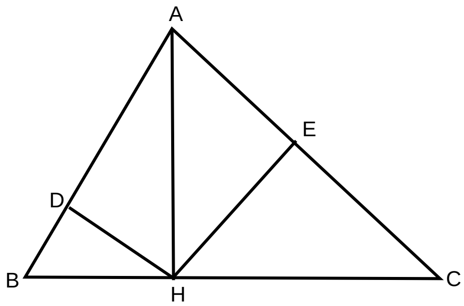


1. $\angle ACR = \angle AQB$ を示せ。
2. $\angle BFC$ を求めよ。
3. BC を１辺とする正三角形 BCP を三角形 ABC の外側につくる。このとき、A、F、P は１直線上にあることを示せ。

問３：$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC の外接円の弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上に点 P をとる。AP と BC の交点を Q とするとき、$AQ \cdot AP = AB^2$ を示せ。



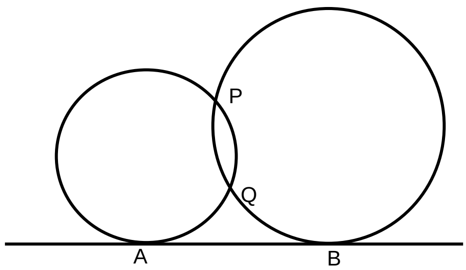
問４：三角形 ABC において、A から BC に下ろした垂線の足を H とし、また、H から辺 AB、AC に下ろした垂線の足をそれぞれ D、E とおく。



1. $\angle HED = \angle HAD$ を示せ。
2. B、D、E、C は同一円周上にあることを示せ。

問５：

1. 方べきの定理を、３種の図と共に述べよ。
2. ２点 P, Q で交わる２円の共通接線を l とする。また、図のように接点を A, B とおく。直線 PQ と l の交点 M は、AB の中点であることを示せ。



以上で１００点（１問２０点）です。

問６：（どれもさっぱり分からんという人のために）何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として 問６を上記のように 設けています。また、問６に 私宛の要望、質問、その他を書いて下さった方へ返答するページを web 上に設けており、なるべく、全てに返答しようとは思っています。その際、自分が問６に書いた内容を web に引用されると困るというひとは その旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。