

## 幾何学 I (2004.7.16)

以下の問いに答えよ。問いには公理および、授業で説明した定理を用いて解くこと。

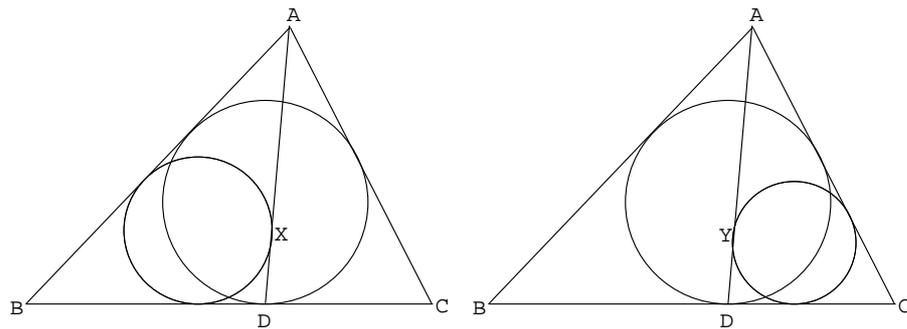
問1：本講義ではヒルベルトの著した「幾何学の基礎」に示される公理系を一部簡略化したものを基礎とし、公理系から幾何学を構築することを説明した。その構築に沿って、以下の文章の空欄を埋め、正しい順番に並びかえよ。(順序を逆にしても矛盾しないところは、どちらが先でも正解にします。)

1. (い)の公理と呼ばれる「2点を通る直線が唯1つある」「1直線上にない3点とその3点を通らない直線に対し、その直線は3点のうちの2組か0組の間を通る」等の公理を用意する。
2. 2点A,Bに対してその距離と呼ばれる実数を対応させる公理を用意し、直線を数直線と捉える。
3. (ろ)の公理を導入し、これにより 錯角が等しいことが証明される。
4. 角を定義し、角度を導入する公理を用意する。
5. 点、直線についてはこれを(は)せず、これらが満たす性質を述べることにする。また、公理により最低限の点の存在を仮定する。
6. いわゆる、三角形の3つの合同条件が定理として証明される。
7. 半平面を定義する。
8. 三角形ABCの頂点Aの外角は頂点Bの内角よりも大きいという定理が示される。
9. (に)の移動の公理と、「2つの三角形において、2辺とその間の角が等しいとき、もう一つの角が等しい」という合同の公理を用意する。

問2：三角形ABCに内接する円Oを考える。円Oと辺AB,BC,CAの接点をそれぞれF,D,Eとする。このとき、AD,BE,CFは1点で交わることを示せ。

問3：三角形  $ABC$  に内接する円  $O$  を考え、円  $O$  と辺  $BC$  の接点を  $D$  とする。また、三角形  $ABD$  と三角形  $ACD$  の内接円がそれぞれ  $AD$  に接する点を  $X, Y$  とする。 $X$  と  $Y$  が一致することを示したい。

1.  $BA - BD = CA - CD$  を示せ。
2.  $XA - XD = BA - BD$  を示せ。
3.  $X$  と  $Y$  が一致することを示せ。

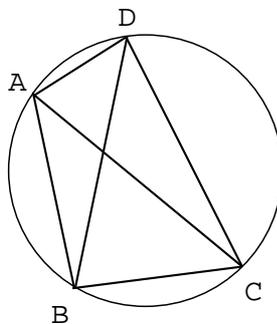


問4：四角形  $ABCD$  が円に内接するとき、

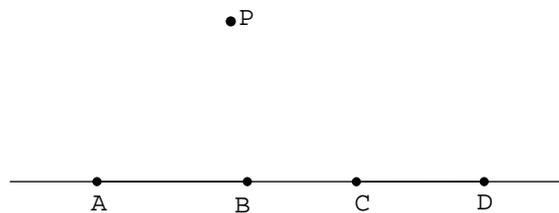
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

であることを示したい。今、図のように  $\angle ABD < \angle DBC$  として、 $AC$  上に  $\angle ABD = \angle EBC$  となる点  $E$  をとる。

1.  $AD \cdot BC = EC \cdot BD$  を示せ。
2.  $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$  を示せ。  
(ヒント：  $AB \cdot CD = AE \cdot BD$  を示すことを考えましょう。)



問5：直線  $l$  と  $l$  上でない点  $P$  がある。また  $l$  上に4点  $A, B, C, D$  があって  $AB = 6$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 5$  である。目盛のない定規だけを用いて、 $P$  を通り  $l$  に平行な直線を作図せよ。まず、作図の手順を簡条書きで説明し、何故その手順で平行線が得られるのか示せ。(ヒント：とりあえず  $AP$  を  $P$  の側に延長したところの点と  $D$  を結びましょう。後はいろいろ引いてみましょう。)



以上で100点(1問25点)です。

問6：(どれもさっぱり分からんという人のために)何かおもしろい事を書いてください。

例年、番外として問6を上記のように設けているわけなんですが、問6に私宛の要望、質問、その他を書いて下さる方が居られます。そこでここ数年、問6の答えとして何か書いて下さった方へ(全てではありませんが)返答するページをweb上に設けています。その際、自分が問6に書いた内容をwebに引用されると困るというひとはその旨を書いておいて下さい。特に記載がなければ匿名で引用することがあります。