

公理、定義 集

定義 1 点と直線の体系を考える。点と直線の間の「点が直線の上にある」又は「点を直線が通る」等の表現で表される関係（結合関係）を考える。また 3 点 A, B, C の間に成り立つ「点 B が点 A と点 C の間にある」等の表現で表される関係についても考える。

結合、順序、距離の公理

- 公理 1：一直線上にない 3 点がある。
- 公理 2：2 点 A, B に対し、 A, B を通る直線 a が唯一つ存在する。（この直線を 直線 AB と表す）
- 公理 3_1 ：直線 a 上の 2 点 A, B に対し、 AB で決まる座標（目盛関数）と呼ばれる 1 対 1 対応

$$f: \{ \text{直線 } AB \text{ 上の点} \} \leftarrow \text{実数の集合}$$

が、 $f(A) = 0$ 、 $f(B) > 0$ となるように決められている。

定義 2 直線 AB 上の 2 点 X と Y に対して、 X の座標と Y の座標の差を、 XY 間の距離という。

定義 3 直線 AB 上の 3 点 X, Y, Z に対して、

$$X \text{ の座標} < Y \text{ の座標} < Z \text{ の座標} \text{ もしくは } X \text{ の座標} > Y \text{ の座標} > Z \text{ の座標}$$

であるとき、 X, Y, Z は X, Y, Z の順に並び、もしくは Y は X, Z の間にあるという。

- 公理 3_2 ：（直線上の 2 点 A, B の取り方で、座標はいろいろ考えられるが、）直線上の点の距離や順序は、どの座標で考えても同じとなっている。
- 公理 4： A, B, C は 1 直線上にない 3 点、直線 a は A, B, C のいずれも通らないとする。そのとき、直線 a が A と B の間の点を通るなら、直線 a は必ず B と C の間の 1 点か、 A と C の間の 1 点か、いずれかを通る。

定義 4 1 直線上の 2 点 A と B に対して、 A 、 B 、及び A と B の間にある点の集合を線分 AB という。

定義 5 直線 l と l 上にない点 A に対し

$$\pi(l, A) = \{ \text{点 } X | X \text{ は } l \text{ 上になく、線分 } AX \text{ は } l \text{ と交わらない} \}$$

で表わされる点の集合を (l で区切られる) 半平面とよぶ。

定義 6 角 (劣角、優角、平角) の定義は煩雑なので略

角度の公理

- 公理 5 : 角 $\angle AOB$ に対して、その大きさと呼ばれる実数が決まり、次を満たす。
 1. 任意の角に対してその大きさは 0 より大きく、360 より小さい。また、平角の大きさは 180 である。
 2. 2 つの劣角 $\angle AOB$ と $\angle AOC$ が半直線 OA を共有していて、その角の領域に重なりがあるとき、「もう一つの半直線も一致すること」と「角の大きさが等しいこと」は同値である。
 3. 2 つの劣角 $\angle AOB$ と $\angle BOC$ が半直線 OB を共有していて、その角の領域に重ならないとき、次が成り立つ。

$$\angle AOC \text{ の大きさ} = \angle AOB \text{ の大きさ} + \angle BOC \text{ の大きさ}$$

ただし、 $\angle AOC$ は点 B を含む方の角とする。

(以下、式で表わすときは「の大きさ」を省略する。)

角の移動の公理

- 公理 6 : 任意の劣角 $\angle AOB$ 、半直線 $O'A'$ 、直線 $O'A'$ で区切られる半平面 α に対して、 α 内に点 B' をとり、 $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$ となるように出来る。(角は任意の場所に大きさを変えずに移せる。)

定義 7 2 つの線分は 長さが等しいときに合同といわれる。2 つの角は 角度が等しいときに合同といわれる。

定義 8 n 個の頂点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ があつたとき、線分の組 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$ を閉じた折れ線という。このとき、 A_i ($1 \leq i \leq n$) を折れ線の頂点といい、線分 A_iA_{i+1} を折れ線の辺という。

閉じた折れ線が

1. 各頂点が異なる。
2. 各辺は 自分の端点以外には 頂点を通らない。
3. 辺と辺は互いに交わらない。

を満たすとき、多角形 (n 角形) という。

定義 9 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ が 次を満たすとき 互いに合同の関係であるといわれる。

1. $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$
2. $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$

合同の公理

- 公理 7: 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ において、 $AB = A'B', AC = A'C', \angle A = \angle A'$ ならば $\angle B = \angle B'$ 。

定義 10 2 直線が交わらないとき、平行という。

平行線の公理

- 公理 8: 直線 l と l 上にない点 A に対して、点 A を通り l に平行な直線はただ 1 つ存在する。